

Le groupe $SU(2) \otimes U(1)$ et la théorie électrofaible

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

9 juin 2008

Version *en travaux*

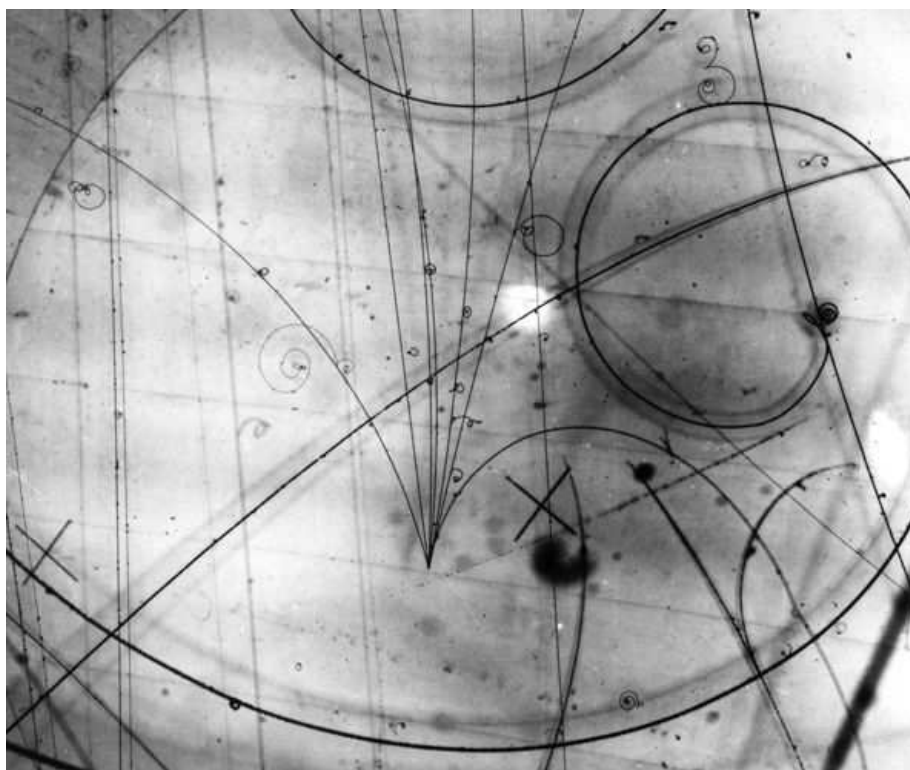


Figure 1: Interaction (faible) d'un neutrino de 10 GeV dans une chambre à bulles

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire sur le "le groupe de symétrie du modèle électrofaible" présenté le 9 juin 2009 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

Les thèmes qui nous intéressent seront les suivants

- l'unification électrofaible et le groupe $SU(2) \otimes U(1)$
- l'application des algèbres de Clifford au modèle électrofaible sur le modèle de l'électromagnétisme

*UNIVERSITE DE CAEN année 2008-2009

SOMMAIRE

1	L'espace des constituants fondamentaux (les fermions de spin 1/2)	5
1.1	Les propriétés spatiales	5
1.2	Etats propres de la quantité de mouvement	6
1.3	Interaction invariante de jauge	6
1.3.1	L'électron en interaction avec un champ E.M.	6
1.3.2	L'interaction faible des électrons	7
1.4	Les propriétés internes des leptons : la saveur leptonique (réf [1])	8
1.5	Les trois générations	9
1.6	Le cas des quarks (hadrons)	9
2	Les propriétés du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)$	10
2.1	Propriétés attendues du groupe de jauge	10
2.1.1	Le groupe de $SU(2)_L \otimes U(1)$	10
2.2	Le principe d'interaction minimal (minimal coupling)	10
2.3	Les conséquences des symétries en physique quantique	11
3	Retour sur la brisure de symétrie électrofaible	12
3.1	La partie électromagnétique	12
3.2	La partie faible neutre	13
3.3	La partie faible chargée	14
3.4	Le cas des quarks	14
4	Conclusion	15
5	Les paramètres du modèle standard	15

List of Figures

1	Interaction (faible) d'un neutrino de 10 GeV dans une chambre à bulles	1
2	Emission et absorption quantifiée du rayonnement	7
3	Emission et absorption quantifiée des bosons faibles	8
4	la désintégration bêta au premier ordre $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	13

List of Tables

1	Table des notations	4
2	Les saveurs des fermions Left & Right de Weinberg	8
3	Les saveurs des quarks Left & Right des interactions électrofaibles	9
4	Les (principaux) paramètres du modèle électrofaible	15

Notations

$\mu = 0, 1, 2, 3$: indices de l'espace temps

$g_{\mu\nu} = +1 - 1 - 1 - 1$: tenseur métrique dans l'espace temps

$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx_i^2}$: temps propre sur une trajectoire

γ_μ : les matrices de Dirac

T_a les générateurs d'un groupe de Lie :U1, SU2, SU3 ... avec $a = 1, 2, \dots, n$.

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \text{et} \quad \not{X} = \gamma_\mu Y^\mu$$

A_μ	quadri-potentiel électromagnétique
P_ν	quadri-vecteur énergie-impulsion
q_ν	quadri-transfert dans une interaction
$F_{\nu\mu}$	tenseur électromagnétique
$\mathcal{E}$	le champ électrique
$\mathcal{B}$	le champ magnétique
$\mathcal{D}$	l'excitation électrique
$\mathcal{H}$	l'excitation magnétique
$\mathcal{J}$	la densité de courant
$\mathcal{F}$	Force relativiste de H. Minkowski
E_i	champ électrique
B_j	champ magnétique
$\mathcal{A}$	l'action
A	l'amplitude quantique
S	la matrice S
$\mathcal{L}(x)$	la densité lagrangienne
$\mathcal{H}$	l'espace de Hilbert
$\mathcal{H}(x)$	la densité hamiltonienne
$\mathcal{W}$	l'énergie
$\mathcal{W}(x)$	la densité d'énergie

Table 1: Table des notations

1 L'espace des constituants fondamentaux (les fermions de spin 1/2)

Le constituant élémentaire est représenté par un champ de spineurs de Dirac tel que

$$\psi(x)$$

$\psi(x)$ est la fonction d'onde quantique à laquelle est associée une densité de courant de particule

$$\mathcal{J}_\mu = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

La densité de lagrangien dans l'espace temps est :

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

et l'action devient

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) d^4x$$

L'équation de Lagrange-Euler s'écrit pour ces fermions **sans interaction** :

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = 0$$

1.1 Les propriétés spatiales

Le champ de spineurs $\psi(x)$ de Dirac appartient à un espace à 4 composantes :

- nos conventions, rappel

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \quad \epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1$$

- $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ invariant (transformation de Lorentz propre) et avec $(\gamma^5)^2 = 1$
- états de spin 1/2 en nombre $(2s + 1) = 2$
- états d'énergie positive négative (symétrie particule - antiparticule) = 2
- Le champ de spineurs se transforme dans une représentation à 4 dimensions du groupe de la relativité restreinte (de Lorentz) et l'écriture explicite des matrices γ_μ dépend de la représentation choisie. La relation qui établit le lien avec la relativité est :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

- décomposition symétrique anti-symétrique du produit

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \quad \text{application : } \not{A}\not{B} = (A.B) - i\sigma^{\mu\nu}(A_\mu B_\nu)$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :
les générateurs du groupe Lp sont $2\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ et les générateurs des rotations sont les σ^{ij}

1.2 Etats propres de la quantité de mouvement

L'opérateur quadri-impulsion s'écrit :

$$P_\mu = i\partial_\mu$$

Cet opérateur génère les translations d'espace-temps a_μ pour la particule libre décrite par $\psi(x)$ en effet

$$\psi(x-a) = \exp(+iPa) \psi(x)$$

Si l'état est propre de la quadri-impulsion avec la valeur propre p alors

$$\psi(x) = \exp(-ipx) \psi(0)$$

Un tel état sera solution de l'équation libre si

$$(\not{p} - m) \psi(0) = 0$$

Une condition nécessaire (en multipliant par $\not{p} + m$) s'en déduit immédiatement :

$$p^2 = m^2$$

1.3 Interaction invariante de jauge

Les fermions en interaction avec un champ de bosons vectoriels par exemple A_μ (principe d'interaction minimal en électromagnétisme)

1.3.1 L'électron en interaction avec un champ E.M.

- principe d'interaction minimale (invariance de jauge : réf [2], 144 équation 32,1 et 32,3)

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - q A_\mu \quad \text{avec} \quad p_\mu = i\partial_\mu \quad (1)$$

- Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des fermions relativistes** de spin 1/2 (leptons) et le champ classique A_μ (photons) s'écrit :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\psi} \{ (i \not{\partial} - q \not{A}) - m \} \psi(x)$$

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants (action sur ψ):

$$\{i \not{\partial} - m\} \psi(x) = + q \not{A} \psi(x) \quad \text{avec} \quad q = e Q \quad (2)$$

- Les courants de charges sont la source des champs (Maxwell) :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$$

- En présence de l'interaction, les états ψ propres de P ne satisfont plus l'équation [2] de Dirac et il y a diffusion. Si les champs vectoriels sont quantifiés on peut représenter leur action sur les fermions par un graphe (figure 2), de même pour l'émission quantifiée du rayonnement par le même graphe . La nature électronique de la particule se conserve dans l'interaction : celle-ci ne modifie que la quantité de mouvement et son action est "commutative" car un électron reste électron.

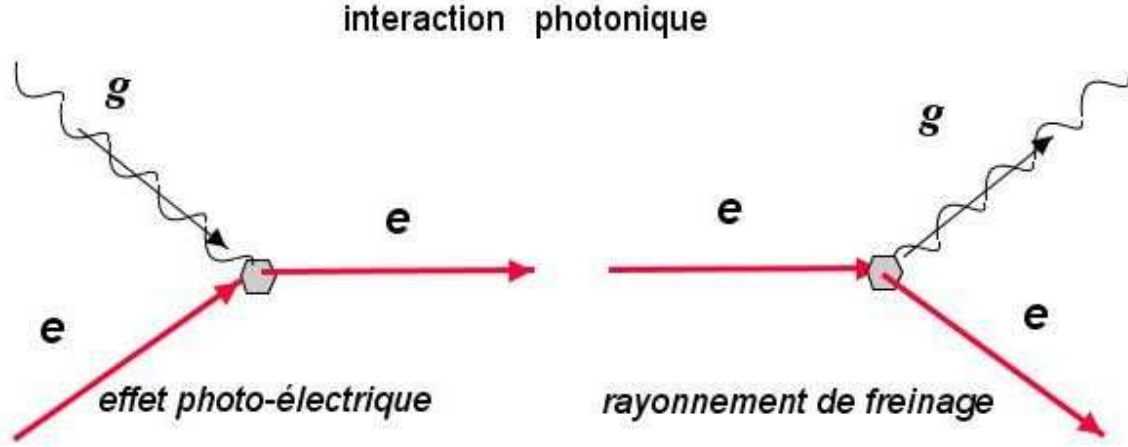


Figure 2: Emission et absorption quantifiée du rayonnement

- La transformation de jauge locale qui laisse "invariante l'interaction" est de type $U(1)$

$$U(\alpha(x)) = \exp(-i Q \alpha(x)) \quad (3)$$

Le générateur infinitésimal du groupe est Q est un scalaire.

Si, par exemple, nous avons deux fermions de charge q_1 , q_2 en interaction électromagnétique, l'opérateur Q s'écrira :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

1.3.2 L'interaction faible des électrons

L'étude des propriétés expérimentales de l'interaction faible conduit à postuler que l'électron et le neutrino associés sont une même particule pour l'interaction faible et que la symétrie faible doit s'exercer dans un espace de spineurs à deux composantes internes, la composante électronique et la composante neutrinoïque soit :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \nu(x) \\ e(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dans cet espace, l'électron et le neutrino se mélangent sous l'action de champs chargés, les bosons vectoriels de l'interaction faible W^+ ou W^- , ce qui se traduit par les graphes de la figure 3. Pour respecter les propriétés connues des interactions faibles, Weinberg avait choisi dans sa publication de 1967, "a theory of leptons", le groupe continu unitaire $SU(2)$.

- $SU(2)$, constante de couplage g , agissant sur un doublet de fermions

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \quad \text{avec } U(\alpha) = \exp(-ig T_a \alpha_a(x))$$

Les $T_{a=1,2,3}$ sont les générateurs de la symétrie interne $SU(2)$ qui transforme ψ en ψ' :

$$\psi \rightarrow \psi' = U(\alpha) \psi$$

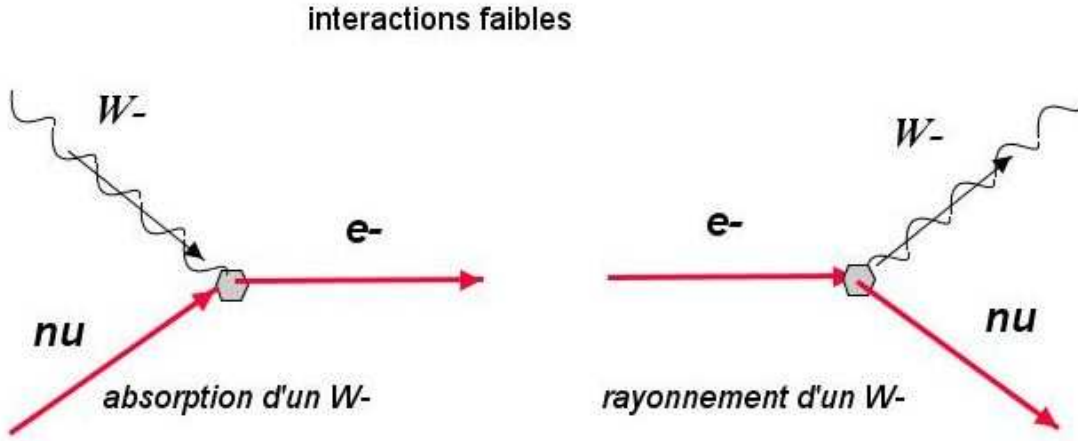


Figure 3: Emission et absorption quantifiée des bosons faibles

1.4 Les propriétés internes des leptons : la saveur leptonique (réf [1])

L'interaction électro-faible nous amène assez naturellement à attribuer des nombres quantiques (valeurs propres) aux leptons dont nous avons discuté ci-dessus

- la charge électrique $Q = -1, 0$ respectivement pour l'électron et le neutrino
- une composante d'isospin faible $T_3 = -1/2, 1/2$ respectivement pour l'électron $+1/2$ et le neutrino
- si, guidé par d'autres considérations (paragraphe 3), nous introduisons une hypercharge faible (table 2) Y pour ces particules ¹, nous obtenons la charge électrique Q

$$Q = T_3 + Y$$

Pour respecter les propriétés connues de violation de parité dans les interactions faibles et de conservation de la parité dans les interactions électromagnétiques, Weinberg avait choisi dans sa publication de 1967, de distinguer les sous-espaces L (gauche) et R (droit).

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \quad \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ν_L	$1/2$	$-1/2$	0
e_L	$-1/2$	$-1/2$	-1
e_R	0	-1	-1

Table 2: Les saveurs des fermions Left & Right de Weinberg

$SU(2)$ agissant sur le doublet gauche ; les générateurs sont les $T_{a=1,2,3} = \frac{1}{2}\sigma_a$

$U(1)$ agissant sur les trois composantes ; le générateur est l'hypercharge Y

¹Notre définition de l'hypercharge se distingue de la définition historique par un facteur 2, ainsi la relation qui définit la charge électrique s'écrit traditionnellement $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ et les valeurs propres sont alors -1 ou -2

1.5 Les trois générations

Sans que cela soit nécessaire, la nature nous impose l'existence de trois doublets fermioniques dont les propriétés sont totalement identiques vis à vis de l'interaction électrofaible. La seule différence évidente est la masse des leptons chargés et peut-être des différences de masse des neutrinos associés. Nous sommes donc amenés à considérer que l'interaction électrofaible agit sur trois doublets indépendants décomposés en Left, Right comme pour le doublet électronique décrit ci-dessus.

$$\begin{array}{lll} \psi_e(x) = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} & \psi_\mu(x) = \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} & \psi_\tau(x) = \begin{pmatrix} \nu \\ \tau \end{pmatrix} \\ m_e = 0.5110 & m_\mu = 105.6 & m_\tau = 1777. \quad \text{MeV} \end{array}$$

De ces propriétés il ressort qu'il existe trois nombres leptoniques conservés par les interactions électrofaibles.

1.6 Le cas des quarks (hadrons)

L'interaction électrofaible s'est appelée pendant un temps l'interaction universelle de Fermi. Cette terminologie rendait hommage au physicien italien qui a ouvert la voie aux développements actuels. Les quarks sont donc sensibles aux interactions électrofaibles. Cependant, ce domaine est compliqué en principe par :

- les quarks ne sont jamais observés directement , on ne connaît leurs propriétés qu'à travers celles des hadrons qui sont des composés de quarks : proton, neutron, pion etc....
- les quarks ont des interactions fortes qui se mélangent aux électrofaibles.
- leurs masses sont essentiellement indéterminées

Néanmoins, il semble qu'il existe trois générations de quarks distingués par leur saveurs électrofaibles et dont les propriétés sont semblables à celles des leptons (référence table 3).

$$\begin{array}{lll} \psi_1(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & \psi_2(x) = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} & \psi_3(x) = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \\ m_d \ m_u \sim .010 & m_s \sim .130 & m_c \sim 1.350 \quad m_b \sim 5.0 \quad m_t \sim 178. \text{ GeV} \end{array}$$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
u_L	1/2	+1/6	+2/3
d_L	-1/2	+1/6	-1/3
u_R	0	+2/3	+2/3
d_R	0	-1/3	-1/3

Table 3: Les saveurs des quarks Left & Right des interactions électrofaibles

- Il existe des transitions faibles entre les trois générations de quarks (matrice U de Cabibbo Kobayashi Maskawa ...), la seule famille stable étant la plus légère soit ψ_1 .

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad \uparrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \leftrightarrow \uparrow \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \leftrightarrow \uparrow \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

De ces propriétés, il ressort que le nombre total de quarks est conservé par les interactions électrofaibles ($\sim$ conservation du nombre baryonique).

2 Les propriétés du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)$

2.1 Propriétés attendues du groupe de jauge

Il s'agit d'une transformation linéaire continue éventuellement unitaire dans l'espace des fermions (spin 1/2), nous la noterons U . La transformation U sera dite locale car elle sera fonction de l'espace (continue dérivable). Cette transformation couple donc des propriétés internes (la nature des fermions) avec l'espace-temps relativiste.

$$\psi'(x) \rightarrow U(\alpha) \psi(x)$$

Le groupe (de Lie) de transformations U sera caractérisé par ses générateurs T^a (avec $a = 1, \dots, n$) et son algèbre de Lie :

$$U(\alpha) = \exp(-ig T_a \alpha_a(x)) \quad (5)$$

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (6)$$

La constante g n'est pas indispensable à ce niveau mais prend un sens dans les équations finales. Utilisant les conventions d'Einstein, on pourra écrire :

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \not{X} = \gamma_\mu Y^\mu \quad \text{et}$$

$$\tau(\not{X}) = \gamma_\mu T_a Y_a^\mu$$

Au voisinage de l'identité, la transformation U sera linéaire en α

$$U(\alpha) = 1 - ig T_a \alpha_a + \dots = 1 - ig \tau(\alpha) + \dots$$

2.1.1 Le groupe de $SU(2)_L \otimes U(1)$

Pour $SU(2)$, groupe d'invariance noncommutatif, on obtient les générateurs T_a en fonction des matrices de Pauli.

$$T_a = \frac{1}{2} \sigma_a \quad \text{avec } a = 1, 2, 3 \quad \sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \sigma_c \quad f_{abc} = \epsilon_{abc}$$

$SU(2)$ agira sur des doublets gauches de quarks et de leptons et les bosons associés aux générateurs seront notés W_a^μ .

Pour $U(1)$, le groupe d'invariance est commutatif et sera engendré par un seul générateur Y , l'hypercharge faible ; c'est un opérateur diagonal dans l'espace des fermions qui sera associé au boson noté B^μ

$$T_a = Y \quad \text{avec } a = 1$$

2.2 Le principe d'interaction minimal (minimal coupling)

Le lagrangien libre des fermions de spin 1/2 est construit pour conduire à l'équation de Dirac.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi(x) \quad (7)$$

Le lagrangien des fermions en interaction est construit selon le principe d'interaction minimale généralisé aux groupes non-abéliens qui conduit aux théories de Yang-Mills et à la généralisation de l'invariance de jauge.

$$P_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \tau(W_\mu) - g' Y (B_\mu) \Rightarrow \mathcal{L}_{int}(x) = -\bar{\psi} (g \tau(\not{W}) + g' Y \not{B}) \psi(x) \quad (8)$$

L'équation de Lagrange-Euler s'écrit pour ces fermions en interaction avec les bosons W et B de l'électrofaible symétrique :

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = (g \tau(W) + g' Y B) \psi(x)$$

Il est évident que cette équation induit des transitions entre les composantes de ψ car l'interaction n'est plus diagonale comme dans le cas électromagnétique. Cependant certains termes, tels que ceux couplés à W_3 et à B , sont diagonaux et permettront de construire l'électromagnétisme par la brisure de la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$.

Du point de vue géométrique (invariance de Lorentz), l'interaction sous forme lagrangienne peut s'exprimer en fonction des courants de fermions couplés aux bosons :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -(g W_a^\mu J_{a\mu} + g' B^\mu J_{Y\mu}) \quad (9)$$

où les courants d'isospin et d'hypercharge s'écrivent :

$$J_{a\mu} = \bar{\psi} (T_a \gamma_\mu) \psi(x) \quad \text{avec } a = 1, 2, 3 \quad \text{et } \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$J_{Y\mu} = \bar{\psi} (Y \gamma_\mu) \psi(x)$$

2.3 Les conséquences des symétries en physique quantique

Classiquement, le théorème de Noether (Emmy Noether 1918) établit qu'une symétrie a comme conséquence une loi de conservation ou une intégrale première du mouvement.

En physique microscopique, une symétrie est une opération qui laisse invariante l'hamiltonien (le lagrangien), elle permettra donc de classer ou de caractériser les états quantiques stationnaires, observables ou permanents à l'échelle macroscopique, par exemple les états propres de l'énergie, du moment angulaire ou de la quantité de mouvement voire de la charge électrique.

Une symétrie permettra de plus de constater la conservation de certaines grandeurs lors de transitions (désintégrations ou réactions entre particules accélérées) comme par exemple le nombre leptonique, le moment angulaire quantifié ou la 4-impulsion.

Elle permet en principe de prévoir des relations entre les amplitudes de transition de divers processus liés par la symétrie.

Conséquences de la symétrie U

- U commute avec $\mathcal{H}$

$$[\mathcal{H}, U] = 0 = [\mathcal{L}, U]$$

- si $|\psi\rangle$ est stationnaire propre de $\mathcal{H}$ alors $|U\psi\rangle$ est propre de $\mathcal{H}$; le groupe de symétrie U engendre un sous-espace d'états stationnaires.
- si on observe une transition entre $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ d'amplitude A , on observera la même amplitude entre les états $|U\psi_1\rangle$ et $|U\psi_2\rangle$ car

$$\mathcal{S} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}(x) d^4x\right)$$

3 Retour sur la brisure de symétrie électrofaible

Ce modèle prévoyait des interactions neutres des neutrinos au même niveau de probabilité que l'interaction électromagnétique mais celles-ci n'avaient pas encore été observées ; d'autre part les interactions électromagnétiques risquaient de violer la parité. Il était donc nécessaire, pour satisfaire aux données de l'expérience, de redéfinir les bosons W et B en bosons plus "physiques" par exemple en brisant la symétrie initiale $SU(2)_L \otimes U(1)$ et en attribuant des masses aux bosons de l'interaction faible . La nature choisit, pour ainsi dire, une solution à travers le mécanisme de Higgs! :

réécrivons la partie diagonale de $\mathcal{L}_{int}$

$$\mathcal{L}_{int} = - (g W_3^\mu J_{3\mu} + g' B^\mu J_{Y\mu})$$

en explicitant les courants fermioniques droits et gauches :

$$\begin{aligned} J_{3\mu} &= \bar{\psi}_L (T_3 \gamma_\mu) \psi_L \\ J_{Y\mu} &= \bar{\psi}_L (Y \gamma_\mu) \psi_L + \bar{\psi}_R (Y \gamma_\mu) \psi_R \end{aligned} \quad (10)$$

A la suite de Weinberg et pour passer aux bosons "physiques" on effectue une rotation dans l'espace $(W_3, B \rightarrow Z_0, A)$

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ A \end{pmatrix}$$

3.1 La partie électromagnétique

L'interaction électromagnétique devient (interaction avec A)

$$\mathcal{L}_{em} = \dots - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A^\mu (J_{3\mu} + J_{Y\mu}) \Rightarrow J_\mu^{em} = (J_{3\mu} + J_{Y\mu}) \quad (11)$$

en explicitant :

$$\mathcal{L}_{em} = \dots - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A \{ (\bar{\nu}\nu)_L (\frac{1}{2}) + (\bar{e}e)_L (\frac{-1}{2}) + (\bar{\nu}\nu)_L (\frac{-1}{2}) + (\bar{e}e)_L (\frac{-1}{2}) + (\bar{e}e)_R (-1) \}$$

Soit

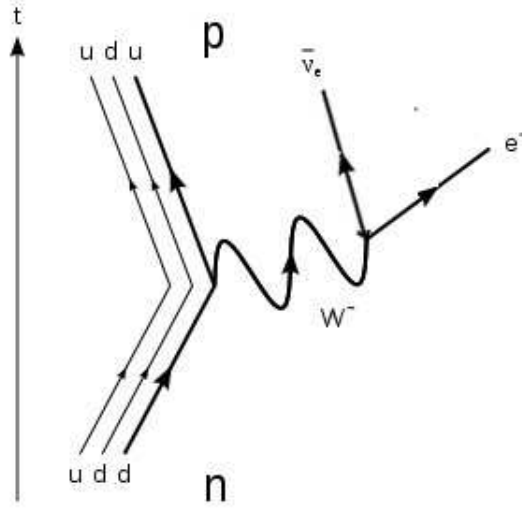
$$\mathcal{L}_{em} = \dots + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A^\mu ((\bar{e}\gamma^\mu e)_L + (\bar{e}\gamma^\mu e)_R) = -e A^\mu (\bar{e}\gamma^\mu e)$$

en clair et pour le doublet leptonique le courant chargé est électronique :

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = e \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) \quad (12)$$

L'interaction électromagnétique conserve la parité et le neutrino n'interagit pas avec le champ électromagnétique A . On obtient l'expression de la charge électronique dans ce modèle :

$$e = - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (13)$$

Figure 4: la désintégration bêta au premier ordre $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

3.2 La partie faible neutre

Le modèle prévoyait l'existence d'une interaction neutre (couplage au Z_0) des neutrinos qui a été découverte en 1973 par une expérience CERN conduite par le professeur A. Lagarrigue du LAL (Orsay). On peut écrire l'interaction du Z_0 explicitement comme cela a été fait pour l'interaction électromagnétique. En introduisant l'angle de Weinberg θ_W tel que :

$$\cos(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g'} \quad ; \quad \sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g} \quad (14)$$

en explicitant :

$$\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0^\mu (\cos^2(\theta_W) J_{3\mu} - \sin^2(\theta_W) J_{Y\mu})$$

Remarque : Le lien entre l'électromagnétisme et les interactions faibles neutres s'exprime conventionnellement par la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned} J_\mu^{em} &= J_{3\mu} + J_{Y\mu} \text{ équation 11} \\ J_\mu^Z &= \cos^2(\theta_W) J_{3\mu} - \sin^2(\theta_W) J_{Y\mu} = J_{3\mu} - \sin^2(\theta_W) J_\mu^{em} \end{aligned} \quad (15)$$

en explicitant pour les leptons:

$$\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0 \left((\bar{\nu}\nu)_L \left(\frac{1}{2} \right) + (\bar{e}e)_L \left(\frac{-1}{2} \right) - \sin^2(\theta_W) (-\bar{e}e) \right)$$

en clair

$$\mathcal{L}_Z(x) = -\frac{|e|}{\sin(2\theta_W)} Z_{0\mu} \left(\bar{\nu}(x) \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu(x) + \bar{e}(x) \gamma^\mu \left(\frac{-1}{2} - 2\sin^2(\theta_W) + \frac{\gamma_5}{2} \right) e(x) \right) \quad (16)$$

3.3 La partie faible chargée

Cette partie du Lagrangien d'interaction est due aux bosons "primaires" W_1 et W_2 qui sont responsables des changements de l'état interne des leptons comme dans les désintégrations bêta (figure 4). réécrivons la partie non-diagonale de $\mathcal{L}_{int}$

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - g (J_{1\mu} W_1^\mu + J_{2\mu} W_2^\mu)$$

que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (J_{+\mu} W_+^\mu + J_{-\mu} W_-^\mu)$$

$$J_{i\mu} = \bar{\psi}_L (T_i \gamma_\mu) \psi_L \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2 \quad J_\pm = (J_1 \pm i J_2)$$

avec

$$W_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - iW_2) \quad W_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + iW_2)$$

en explicitant pour les leptons:

$$\mathcal{L}_W = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (W_+ (\bar{\nu}e)_L + W_- (\bar{e}\nu)_L)$$

en clair

$$\mathcal{L}_W(x) = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_+^\mu \bar{\nu}(x) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} e(x) + W_-^\mu \bar{e}(x) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu(x) \right) \quad (18)$$

De ce résultat (voir figure 4), il est possible de calculer une estimation de la masse des W à partir de la durée de vie du neutron ² : On vérifie avec $\cos(\theta_C) = .975$ $g = 0,65$ $M_W = 80. GeV$:

$$\frac{G_\beta^2}{2\pi^3} = \left(\frac{g^4}{(4\pi)^3} \right) \frac{\cos^2(\theta_C)}{M_W^4} = 2.08 \cdot 10^{-24} MeV^{-4}$$

3.4 Le cas des quarks

Les courants chargés des quarks sont gauches et couplés aux $W^\pm$. L'interaction faible brise la symétrie de Parité tandis que l'électromagnétisme la conserve (équation 11 et table 3) Le courant électromagnétique défini par l'équation 11 est symétrique droite-gauche et fait intervenir les quarks dont les charges sont 2/3 ou -1/3.

$$J_\mu^{em} = J_{3\mu} + J_{Y\mu}$$

Le courant neutre hadronique (équation 15) a été l'objet de longues et difficiles expériences depuis 1973, la compatibilité avec le modèle standard est totale dans les erreurs expérimentales.

$$J_\mu^Z = J_{3\mu} - \sin^2(\theta_W) J_\mu^{em}$$

L'une des prédictions majeures du modèle est l'existence de bosons de 80-90 GeV dont les modes de désintégration sont déterminés. **Dix ans d'expérimentation au CERN et ailleurs ont confirmé ces prédictions.**

²C. Longuemare : Interactions électro-faibles, janvier 2006

4 Conclusion

Pour être complet, il faudrait traiter la question de la brisure de la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$ par le mécanisme de Higgs ; ce sujet a été abordé dans le cadre du séminaire lors d'une séance sur la particule de Higgs³.

5 Les paramètres du modèle standard

paramètre	modèle W& S	expérience
e	$e^2 = 4\pi\alpha$	0,303
θ_W		$27,8^\circ$
	$\cos(\theta_W)$	0,8846
g'	$g' = e/\cos(\theta_W)$	0,3426
g	$g = e/\sin(\theta_W)$	0,6498
$M_{W^\pm}$		81,23 GeV
M_{Z^0}		91,82 GeV
M_A		0

Table 4: Les (principaux) paramètres du modèle électrofaible

References

- [1] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [2] L. Landau & E. Lifchitz. *{ Théorie quantique relativiste I }*. MIR , Inc., 1972.

Il existe beaucoup d'autres très bons manuels sur les théories de jauge, j'ai eu l'occasion de m'y référer antérieurement⁴.

³C. Longuemare : Sur la particule de Higgs, janvier 2009

⁴C. Longuemare , séminaires d'analyse du LMNO (Caen) : Interactions électro-faibles (janvier 2006), Le lambshift (mars 2006).