

Les spineurs en physique

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

13 novembre 2007

Version 13/02/2008

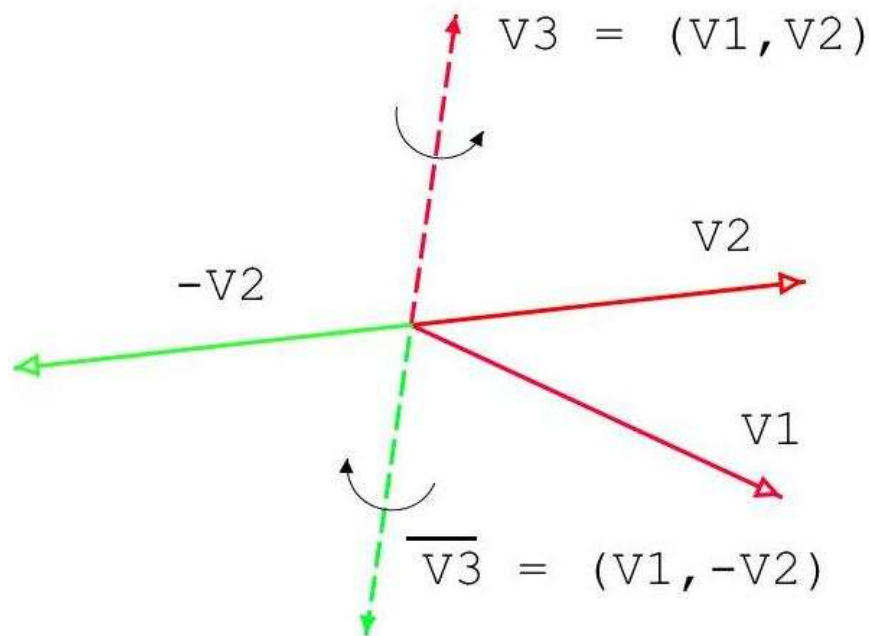


Figure 1: Spineur de E. CARTAN 1913

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu les 13 novembre 2007 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2007-2008

SOMMAIRE

1	Introduction	4
2	Interaction magnétique d'une particule classique	5
2.1	Le mouvement d'un solide	5
2.2	L'interaction magnétique	5
2.2.1	Point de vue énergétique	5
2.2.2	Point de vue dynamique	6
3	Mise en évidence du spin 1/2	7
3.1	L'expérience de Stern & Gerlach	7
3.2	Polarisation d'un électron et mesure du spin (expérience de principe)	8
3.3	L'effet Zeeman du sodium	9
4	Les spineurs non-relativistes de Pauli (1927)	10
4.1	Le spin en MQ	10
4.2	Les spineurs à 3D d'Elie Cartan (1913)	10
4.3	Les spineurs conjugués <i>de charge</i> : références [2][9]	13
4.3.1	définition	13
4.3.2	Rotation des spineurs conjugués	13
4.3.3	Les spineurs transformés par Parité	14
4.4	L'interaction électromagnétique du spin de l'électron	14
4.5	Conclusion	14
5	Les spineurs relativistes de Dirac (1928)	15
5.1	L'invariance de Lorentz	15
5.1.1	Les spineurs de $SL(2C)$	15
5.1.2	L'électron libre	17
5.2	L'équation de Dirac et l'interaction électromagnétique	18
6	Conclusion	19
7	ANNEXES	20
7.1	Propriétés du groupe $SL(2,C)$	20

List of Figures

1	Spineur de E. CARTAN 1913	1
2	Les spineurs en physique	4
3	L'expérience de Stern & Gerlach	7
4	Analyse du spin d'un électron	8
5	La fluorescence du sodium : le doublet D1 D2	9
6	L'effet Zeeman anomal sur le doublet D1 D2 du sodium	9
7	Représentation d'un spineur et de son conjugué en 3D	15

1 Introduction

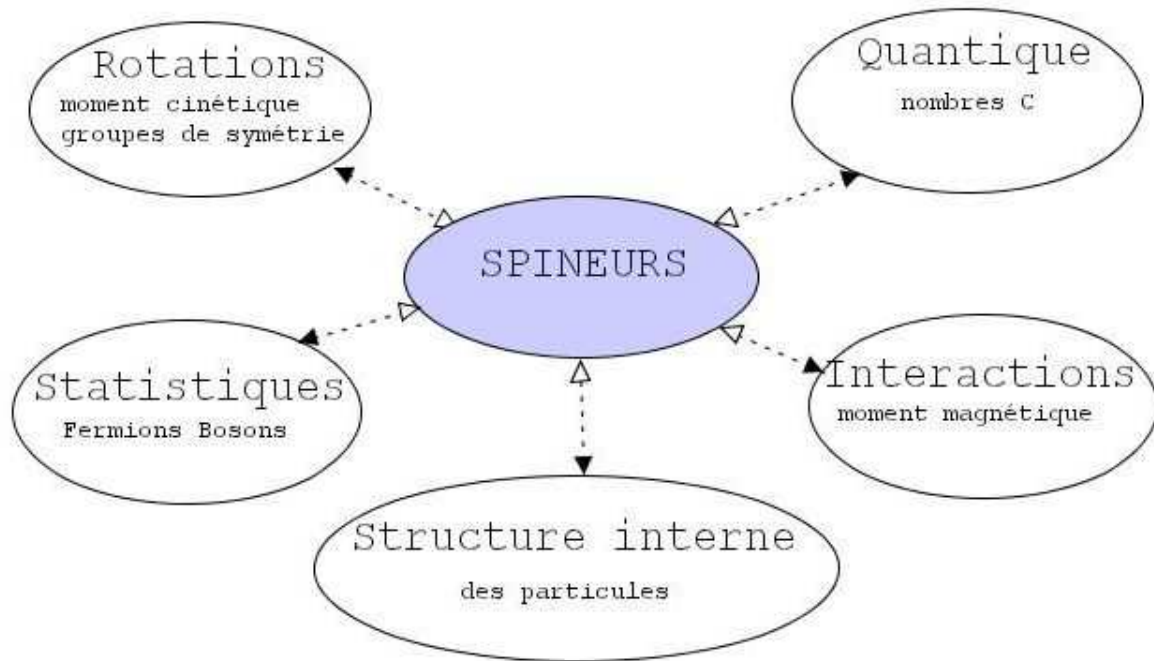


Figure 2: Les spineurs en physique

- Les spineurs et le spin interviennent dans différents domaines de la physique qui sont résumés sur la figure 2.
- Historique
 - E. Cartan 1913
 - W. Pauli 1927
 - P. Dirac 1928

- Notations

Nous utilisons les notations de E. Cartan [2] qui ne sont malheureusement pas très standard :

- * signifie transposée
- $\bar{x}$ signifie conjugaison complexe de x
- La matrice C est $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- A^+ qui signifie la conjugaison hermitique de A
- conventions de l'électromagnétisme : Les champs électriques et magnétiques sont notés $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$, ou bien $\mathcal{B}$ de plus :

$$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

2 Interaction magnétique d'une particule classique

2.1 Le mouvement d'un solide

Le solide est le modèle le plus simple pour une particule "élémentaire" non-ponctuelle

$$\begin{aligned} \text{mvt du centre de gravité } \vec{P} &= M\vec{V} = \sum m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \\ \text{mvt autour du centre de gravité } \vec{\sigma}_G &= \sum \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G \end{aligned} \quad (1)$$

Le torseur cinématique est

$$\text{torseur des vitesses} \equiv (\vec{V}, \vec{\Omega}) \quad (2)$$

Les propriétés cinétiques s'évaluent en appliquant les théorèmes de König de la mécanique :

$$\begin{aligned} \text{l'énergie cinétique } E_C &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I.\Omega^2 \\ \text{le moment cinétique } \vec{\sigma}_O &= M\vec{OG} \wedge \vec{V} + \vec{\sigma}_G \end{aligned} \quad (3)$$

Remarques

- si la particule est ponctuelle le mouvement autour de G ne comporte pas d'énergie car le moment d'inertie est nul.
- dans le référentiel G le mouvement est une rotation autour d'un axe passant par G ; si le mouvement est libre $\vec{\sigma}_G$ est constant (mouvement du rotateur libre en méca).
- ordres de grandeur pour les particules quantiques

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar} \quad I = \frac{\hbar^2}{mc^2} \Rightarrow r = \frac{\hbar}{mc} \quad \text{soit} \quad v = r\omega = c \quad \text{et} \quad \sigma_G = I\omega \sim \hbar \quad (4)$$

2.2 L'interaction magnétique

2.2.1 Point de vue énergétique

Les équations de Hamilton et l'invariance de jauge conduisent à modifier l'hamiltonien libre de la particule caractérisée par (m, q)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 \quad p \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \\ H_{em} &= qA^0 + \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Localement le champ $\vec{B}$ est constant donc $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{B})$

Linéairement en A c'est à dire par rapport au champ électromagnétique et par rapport à la charge q on obtient :

$$H_{em} = qA^0 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m}(\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{B} \quad \text{avec } \vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (6)$$

Si l'on décrit une particule composée, non-ponctuelle, au repos dans son référentiel comme un solide en rotation, l'interaction électromagnétique devient en fonction du moment magnétique $\vec{\mu}$:

$$H_{em} = H_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad \text{avec } \vec{\mu} = \sum \frac{q}{2m} (\vec{r} \wedge \vec{p})$$

où H_0 est l'hamiltonien avec $\mathcal{B} = 0$.

- Notations de la physique microscopique

Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ devient $\rightarrow \vec{j}$ ou $\vec{s}$

Le moment magnétique est lié au moment cinétique

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{j}$$

Le rapport gyromagnétique est γ

$$\gamma = g \left(\frac{q}{2m} \right)$$

où q et m sont respectivement la charge et la masse totale du système (de l'atome ou de la particule) et où g est le facteur de Landé (de l'atome ou de la particule) ¹

Conclusion :

L'étude de l'interaction magnétique des particules permet une analyse de leur spin noté j ou s qui "représente" leur moment cinétique interne.

$$H_{em} = H_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

2.2.2 Point de vue dynamique

Mouvement dans un champ magnétique

- Classiquement le moment magnétique n'est stable que s'il s'aligne avec le champ externe $\mathcal{B}$ créé par le dispositif expérimental.
Quantiquement l'énergie de l'état stationnaire observé est modifiée par la présence du champ.

$$E = E_0 - \gamma j_z \mathcal{B} \quad \text{avec } j_z = m\hbar$$

- Si le champ externe $\mathcal{B} = (0, 0, \mathcal{B})$ créé par le dispositif expérimental est dirigé selon Oz et est inhomogène, la particule subit une force qui l'entraîne vers les régions de champ $\mathcal{B}$ intense si j_z est positif et inversement si j_z est négatif.

$$F_z = \gamma j_z \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}$$

Si j_z est nul le mouvement de la particule n'est pas modifié.

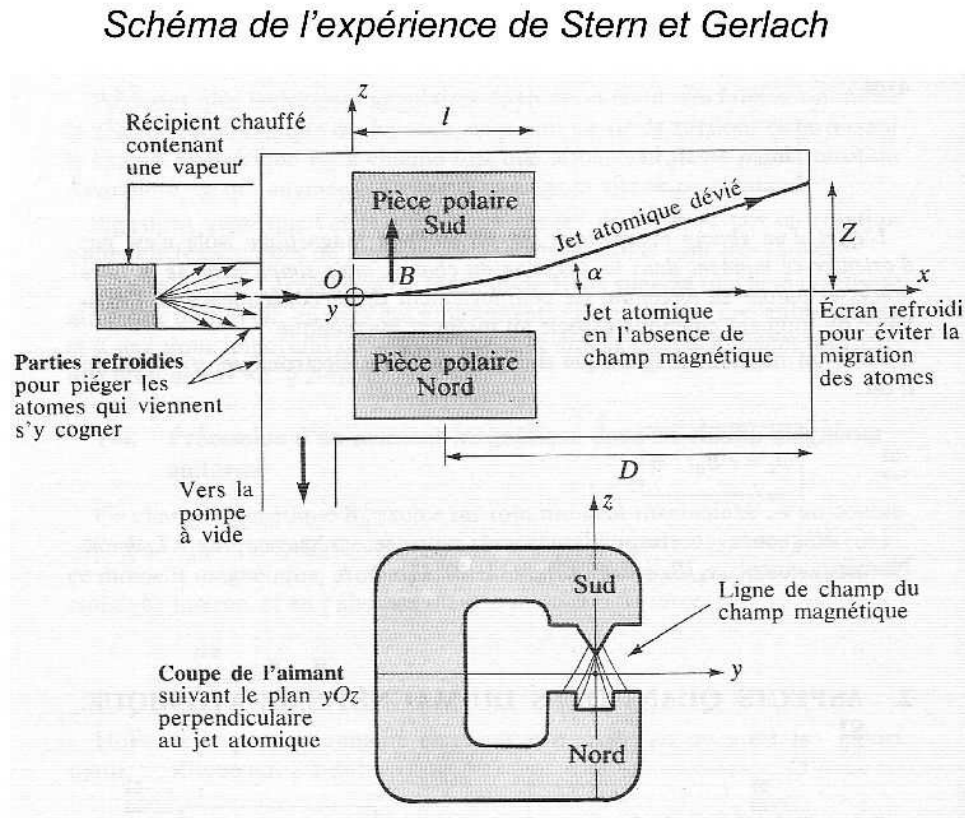
¹cf exposé sur l'expérience g-2

3 Mise en évidence du spin 1/2

3.1 L'expérience de Stern & Gerlach

L'expérience de Stern et Gerlach est une expérience de Mécanique quantique démontrant la quantification du spin. L'expérience, mise au point par Otto Stern et Walther Gerlach en 1920, consiste à faire passer des particules de spin 1/2 (en l'occurrence des atomes d'argent **neutre électriquement**) dans un champ magnétique non uniforme de direction verticale.

Dans le modèle classique de l'atome de Niels Bohr, le faisceau de particules devrait être dispersé



Bertin, Faroux et Renault, Electromagnétisme 4, p. 152

Figure 3: L'expérience de Stern & Gerlach

verticalement en raison de la composante verticale du moment magnétique de l'atome qui prend un continuum de valeurs entre $-\mu_z$ et $+\mu_z$ en fonction de l'orientation de l'atome. En revanche, l'expérience montre que le faisceau se sépare en deux, indiquant que la composante verticale du moment magnétique donc du spin ne peut prendre que deux valeurs opposées. On ne peut attribuer ce résultat à un moment cinétique orbital, comme le pensaient Stern et Gerlach, car le nombre quantique représentant cette valeur est toujours impair ($2J+1$ avec J entier). L'atome d'argent a une structure électronique telle que le moment magnétique de l'atome résulte d'un seul électron périphérique sur la couche 5s, en effet, la structure atomique de l'argent est :

1s2 2s2 2p6 3s2 3p6 4s2 3d10 4p6 4d10 5s1

L'atome d'argent se comporte comme un électron lourd mais neutre ce qui présente un avantage sur le plan expérimental par rapport à l'électron lui-même.

3.2 Polarisation d'un électron et mesure du spin (expérience de principe)

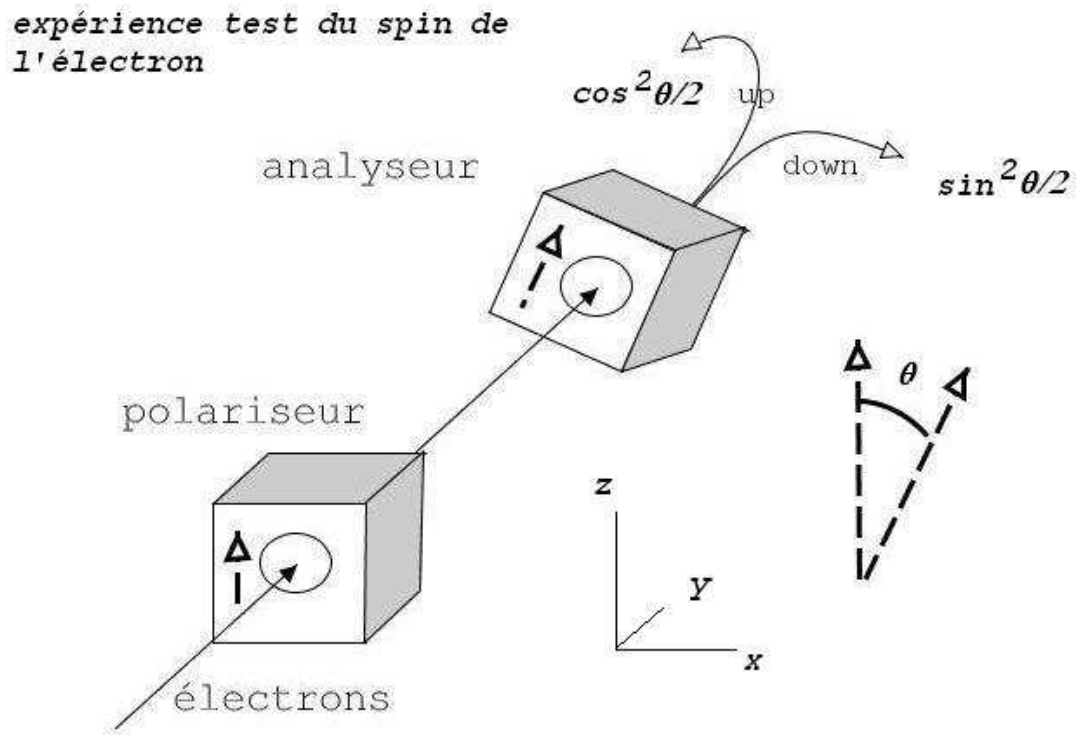


Figure 4: Analyse du spin d'un électron

Dans la suite on justifiera la propriété des spineurs de tourner sous l'action des matrices de $SU(2)$

$$\psi \rightarrow U\psi \quad U = \cos(\alpha)\sigma_0 - i \sin(\alpha) \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (0, 1, 0) \\ \alpha &= -\theta/2 \\ \psi &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \psi' \propto \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\text{probabilités : (up) } = \cos^2(\theta/2) \quad (\text{down}) = \sin^2(\theta/2)$$

Cas particuliers

$$\theta = \pi/2 \text{ alors probabilités (up/down) } = 0,5/0,5$$

$$\theta = \pi \text{ probabilités (up/down) } = 0/1$$

4 Les spineurs non-relativistes de Pauli (1927)

4.1 Le spin en MQ

La mécanique quantique impose

- le recours aux nombres complexes pour calculer les amplitudes de probabilité
- de décrire les systèmes physiques dans un espace de Hilbert
- si un système n'admet que deux valeurs propres, l'espace est de dimension 2

Un spineur de Pauli est un élément de $C(2)$ qui décrit une direction interne éventuelle d'une particule (l'électron) sous la forme d'un vecteur de $R(3)$.

L'introduction mathématique des spineurs doit permettre de construire une application de $R(3)$ dans $C(2)$ qui permette une interprétation quantique

4.2 Les spineurs à 3D d'Elie Cartan (1913)

Les mathématiques viennent au secours du programme de W. Pauli

Introduisons les spineurs en suivant E. Cartan, 1913([2], [5]) Soit deux vecteurs V_1 V_2 de R^3 et définissons un vecteur complexe $V = V_1 + iV_2$ et assoçons ψ à ce vecteur complexe.

$$V = \begin{pmatrix} x = x_1 + i x_2 \\ y = y_1 + i y_2 \\ z = z_1 + i z_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \psi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$\exists \xi_0, \xi_1 \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} x = \xi_0^2 - \xi_1^2 \\ y = i(\xi_0^2 + \xi_1^2) \\ z = -2\xi_0\xi_1 \end{cases} \quad \text{si } |V_1| = |V_2| \text{ et } V_1 \perp V_2$$

Rappel : Les matrices sigma de Pauli sont hermitiques telles que :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de Pauli vérifient :

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} & \text{si } (ijk) \sim + \\ \text{soit } (a.\sigma)(b.\sigma) &= (a.b) + i((a \wedge b).\sigma) & \forall i \quad \sigma_i^+ = \sigma_i \end{aligned} \quad (7)$$

Autre façon d'écrire la relation existant entre V et ψ

$$V = V_1 + iV_2 \text{ vecteur isotrope} \leftrightarrow \text{matrice : } X = V.\sigma = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} -\xi_0\xi_1 & +\xi_0^2 \\ -\xi_1^2 & +\xi_0\xi_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi_1 & \xi_0 \end{pmatrix} = 2(\psi)(\psi)^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Nous utilisons ici les notations de E. Cartan, à savoir * signifie transposée et $\bar{x}$ signifie conjugaison complexe de x ; elles ne sont malheureusement pas très standard .

La matrice C est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous utilisons également A^+ pour la conjugaison hermitique de A .

En résumé, l'application qui, à $V = V_1 + iV_2$, fait correspondre le spineur ψ est définie par :

$$X = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = 2(\psi)(\psi)^* C \quad \text{avec } |X| = 0$$

Propriétés remarquables :

1. Vérification $V^2 = x^2 + y^2 + z^2 = V_1^2 - V_2^2 + 2iV_1.V_2 = 0 \Rightarrow |V_1| = |V_2|$ et $V_1.V_2 = 0$
2. $V^+.V = \bar{x}x + \dots = V_1^2 + V_2^2 = 2(\bar{\xi}_0\xi_0 + \bar{\xi}_1\xi_1)^2 = 2(\psi^+\psi)^2$
3. si V_1 et V_2 sont unitaires (sur la sphère unité) ψ est normé

$$\psi^+\psi = \bar{\xi}_0\xi_0 + \bar{\xi}_1\xi_1 = 1$$

En MQ , la somme des probabilités est égale à 1

4. Condition vérifiée par X et ψ

$$X\psi = 0$$

Cette condition n'est pas suffisante pour définir ψ , on obtient simplement

$$x = z \frac{\xi_1^2 - \xi_0^2}{2\xi_0\xi_1} \quad y = z \frac{\xi_1^2 + \xi_0^2}{2i\xi_0\xi_1} \quad (9)$$

il faut encore $z = -2\xi_0\xi_1$

5. de plus

$$x_i = \frac{1}{2} \text{trace}[\sigma_i X]$$

6. Une rotation dans R3 induit une transformation unitaire sur ψ car $\psi^+\psi = 1$ est conservé.
7. Une symétrie plane par rapport à un plan de normale unitaire $\vec{a}$ induit les transformations suivantes, avec $A = a.\sigma$:

$$X \rightarrow X' = -AXA$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \pm A\psi$$

Pour démontrer cette dernière propriété il faut faire appel à une propriété de la matrice C à savoir :

$$CA = -A^*C \Rightarrow \psi^*CA = -\psi^*A^*C = (A\psi)^*C$$

8. Une rotation comme combinaison de symétrie $\vec{a}$ puis $\vec{b}$ induit les transformations suivantes :

$$X \rightarrow X' = UXU^+ \quad \text{avec } U = BA = (a.b) - i(\sigma.(a \wedge b)) \text{ et } U^+ = AB = U^{-1} \quad (10)$$

$$U = \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)(\sigma.n)$$

La rotation $(\vec{n}, \theta)$ devient sur le spineur ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = \pm U \psi$$

9. $U(1)$ est l'action la plus simple sur ψ , c'est une transformation linéaire unitaire commutative tandis que l'action correspondante sur (V_1, V_2) est une rotation autour de la direction V_3 perpendiculaire au plan (V_1, V_2) : $V_3 = V_1 \wedge V_2$.

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha) \psi \Rightarrow (V_1, V_2) \rightarrow \text{Rot}(2\alpha) \circ (V_1, V_2)$$

Il est remarquable que V_3 soit un vecteur axial ou bivecteur et qu'il ne soit pas le 3ième vecteur de base d'un trièdre orthonormé. ! Démonstration 1 : Considérant une rotation infinitésimale...

$$R_3(2\alpha) \circ (V_1 + i V_2) \sim [1 + 2\alpha V_3 \wedge] (V_1 + i V_2) = (1 - 2i\alpha)(V_1 + i V_2) \sim \exp(-2i\alpha)(V_1 + i V_2) \text{ soit}$$

$$\psi' = \exp(-i\alpha)\psi$$

Démonstration 2 : Considérons un changement de phase quelconque sur un spineur

- dans cette transformation $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-i\alpha)\psi$ et $x \rightarrow \exp(-2i\alpha) x$ soit

$$\begin{aligned} x'_1 &= \cos(2\alpha)x_1 + \sin(2\alpha)x_2 \\ x'_2 &= -\sin(2\alpha)x_1 + \cos(2\alpha)x_2 \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

- alors $|V_1|$, $|V_2|$ et $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ sont conservés

- et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est invariant

En MQ, si ψ est stationnaire (propre de H) la phase de ψ varie avec le temps :

$$\psi(t) = \exp(-i\omega t) \psi(0) \quad \text{avec } \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Cette évolution est associée dans R^3 à une rotation du couple (V_1, V_2) autour de V_3 : le "spineur est en rotation" à la vitesse angulaire 2ω (attention, seule la vitesse relative a un sens car l'énergie n'est pas définie de façon absolue)

10. Les transformations par $SU(2)$ de ψ sont associées aux rotations dans R^3 , $SU(2)$ est une représentation à 2 dimensions de $SO(3)$; par exemple une rotation $\theta = 2\alpha$ autour d'une direction $\vec{n}$ de R^3 agira sur ψ par une matrice de $SU(2)$ à 3 paramètres $(\alpha, \vec{n})$:

$$\psi \rightarrow \pm U\psi \quad U = \cos(\alpha)\sigma_0 - i \sin(\alpha) \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

11. Les matrices de $SU(2)$ peuvent s'écrire dans l'espace des spineurs à 2 dimensions

$$U = \exp(-i\alpha(\sigma n))$$

car $(\sigma n)^2 = 1$; on peut aussi l'écrire comme la matrice spéciale unitaire la plus générale :

$$U = \begin{pmatrix} a, b \\ -b^*, a^* \end{pmatrix} \quad \text{avec } aa^* + bb^* = 1 \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} a &= \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)n_3 \\ b &= -i \sin(\alpha)(n_1 - in_2) \end{aligned}$$

12. D'une manière générale, l'évolution du spineur $\psi(t)$, régie par l'équation de Schrödinger est unitaire et conduit nécessairement dans l'espace du spin à une rotation décrite par une matrice de $SU(2)$ fonction du temps

$$\psi(t) = U(t)\psi(0)$$

4.3 Les spineurs conjugués de charge : références [2][9]

4.3.1 définition

Ils sont associés au vecteur $\bar{V}$ c'est à dire à la paire de R^3 ($V_1, -V_2$) ; évidemment dans cette conjugaison V_3 change de signe et les rotations autour de V_3 s'inversent. La matrice associée à $\bar{V}$ est X^+ car :

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} x_1 - i x_2 \\ y_1 - i y_2 \\ z_1 - i z_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V} \text{ conjugué} \leftrightarrow \bar{V} \cdot \sigma = X^+ \text{ hermitique conjuguée} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{x} - i\bar{y} \\ \bar{x} + i\bar{y} & -\bar{z} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Etant donné l'expression de X en fonction de ψ (équation 12) il vient très simplement :

$$X^+ = -2C (\bar{\psi}) (\psi)^+$$

Si, avec E. Cartan, on appelle C la matrice :

$$C = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

et si de plus on appelle ψ_c le spineur $\pm iC\bar{\psi}$ alors :

$$X^+ = 2\psi_c\psi_c^*C \quad (13)$$

Ce qui signifie que le conjugaison dans l'espace des spineurs s'écrira (voir [9] page 51) :

$$\psi \rightarrow \psi_c = \pm iC\bar{\psi} = \pm i \begin{pmatrix} +\bar{\xi}_1 \\ -\bar{\xi}_0 \end{pmatrix}$$

L'opération de conjugaison est involutive ; au carré elle ne redonne ψ .

$$(iC\bar{\cdot}) \circ (iC\bar{\cdot}) = 1 \quad (\psi_c)_c = \psi$$

Un changement de phase sur ψ se traduit par le changement de phase opposé sur ψ_c . En mécanique quantique ceci a des conséquences importantes vis à vis des charges qui sont inversées mais aussi l'énergie. Si l'on considère un état d'énergie négative la conjugaison de charge en fera un état physique d'énergie positive, si l'on considère un état d'énergie positive la conjugaison puis le renversement du temps en feront un état physiquement acceptable.

E. Cartan appelle les spineurs ψ_c , spineurs de 2ième espèce [2] page 62.

4.3.2 Rotation des spineurs conjugués

La rotation des spineurs conjugués est déterminée par celle des spineurs ψ

$$\psi \rightarrow U\psi \Rightarrow \psi_c \rightarrow -iC\bar{U}\bar{\psi}$$

Il est facile de montrer que

$$C\bar{U} = UC$$

Il en résulte que ψ_c se transforme comme ψ dans les rotations

$$\psi_c \rightarrow U\psi_c$$

4.3.3 Les spineurs transformés par Parité

a) **La parité n'est pas :** Le spineur associé à la paire $(-V_1, -V_2)$ n'est pas le transformé par parité du vecteur V , dans cette transformation V_3 est inchangé. La matrice associée à $-V$ est évidemment $-X$. Etant donné l'expression de X en fonction de ψ (équation 12), il résulte que cette transformation n'est autre qu'une rotation de $\pm\pi/2$:

$$\psi \rightarrow (\pm i) \psi$$

b) **La parité est :** La transformation de parité dans le plan associe au couple initial (V_1, V_2) la paire $(V_1, -V_2)$ et donc au vecteur V le vecteur $\bar{V}$. La parité est donc liée à la symétrie plane par rapport au plan V_1, V_3 et à la conjugaison de charge à ceci près qu'au cours du temps le comportement du transformé par parité se distingue de celui obtenu par conjugaison de charge (les rotation sont inversées au cours du temps).

A une rotation près on peut définir la parité comme :

$$\psi \rightarrow \psi_c \quad (14)$$

4.4 L'interaction électromagnétique du spin de l'électron

Il faut obtenir une équation de Schrödinger pour le spineur de Pauli qui prenne en compte l'interaction magnétique constatée expérimentalement.

La solution de Pauli (1927) est, pour l'électron, :

$$H_{em} = H_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \text{avec } \vec{\mu} = g \gamma \vec{s} \text{ et } \begin{cases} \vec{s} = (\frac{\hbar}{2}) \vec{\sigma} & \gamma = (q/2m) \\ g - 2 = 0,00.. & q = -e \end{cases} \quad (15)$$

• Théorie des atomes à un électron (alcalins ou ions)

L'électron est dans le champ d'attraction du noyau et dans un champ magnétique extérieur $\mathcal{B}$ alors son hamiltonien "phénoménologique" s'écrit :

$$H_{em} = \left(qA^0 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \text{avec } \vec{\mu} = \gamma [\vec{l} + g \vec{s}] \text{ et } \vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

• Transformation de H_{em} dans la conjugaison de charge

Sur l'hamiltonien, la transformation de conjugaison des spineurs s'écrit :

$$H_{em} \rightarrow C \bar{H}_{em} C^{-1} \quad \text{soit } -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \rightarrow +\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

A partir de $C \bar{\sigma}_i C^{-1} = -\sigma_i$ et $C \bar{l}_i C^{-1} = -l_i$

4.5 Conclusion

Avec l'hypothèse de Pauli, on explique

- l'expérience de Stern-Gerlach
- mais aussi l'effet Zeeman atomique à savoir la démultiplication des raies d'émission (raies de fluorescence) sous l'effet du champ magnétique.
- la structure de l'atome grâce au principe d'exclusion

Un spineur pourrait être représenté géométriquement comme le montre la figure 7

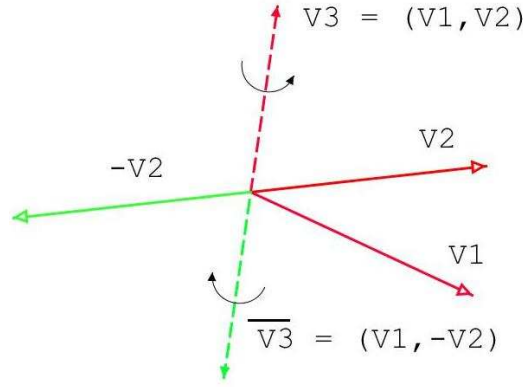


Figure 7: Représentation d'un spineur et de son conjugué en 3D

5 Les spineurs relativistes de Dirac (1928)

5.1 L'invariance de Lorentz

Il est évident que l'hypothèse de Pauli est non relativiste et ad-hoc pour expliquer les résultats expérimentaux (effet Zeeman & l'expérience de Stern-Gerlach). Paul Dirac en 1928 construit une théorie relativiste du spin 1/2 (de l'électron) en partant de l'équation de Klein-Gordon.

Le spineur de Dirac a 4 composantes complexes, c'est un élément de $C(4)$. Les 4 dimensions sont associées

- $\times 2$: degrés de liberté du spin
- $\times 2$: existence des anti-particules, les positrons !

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \chi_1, \chi_2 \text{ des spineurs de Pauli}$$

Notations

L'énergie impulsion $P = (E, \vec{p})$

Les quantités de mouvement :

$$p_\mu = i\partial_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

5.1.1 Les spineurs de $SL(2C)$

Le groupe $SL(2C)$ est le groupe des matrices (2,2) complexes et spéciales (référence [6] page 138) ; ce groupe est une représentation du groupe de Lorentz propre, il contient le sous-groupe $SU(2)$ qui représente les rotations. C'est un groupe de Lie à 6 paramètres réels, ses générateurs peuvent être construits à l'aide des matrices de Pauli.

$$\sigma_j \text{ et } i\sigma_j \quad j = 1, 2, 3$$

Il s'exponentie

$$A = \exp(-i(\lambda.\sigma))$$

Si λ est complexe l'élément A de $SL(2C)$ n'est pas unitaire !

Le lien de A avec la matrice de Lorentz Λ associée dans l'espace des quadrvecteurs est donné par

$$X = x_0 - (x.\sigma) = \begin{pmatrix} x_0 - z & -x + iy \\ -x - iy & x_0 + z \end{pmatrix} \Rightarrow X' = A X A^\dagger = (\Lambda X) \quad (16)$$

$$|X| = x_0^2 - \sum x_i^2$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{trace}[\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+]$$

réf [6] page 139

Le spineur complexe conjugué $\psi_c = \pm i C \bar{\psi}$ ne se transforme pas comme ψ :

$$\psi \rightarrow A\psi \Rightarrow \psi_c \rightarrow C \bar{A} C^{-1} \psi_c$$

Il y a deux représentations (2,2), A et $\bar{A}$, distinctes (inéquivalentes) du groupe de Lorentz. On introduit parfois les composantes non-pointées (pointées) d'un spineur comme celles des composantes qui se transforment par A (par $\bar{A}$). Très symboliquement on écrira :

$$\psi^{n,\dot{m}} \rightarrow A^n \bar{A}^{\dot{m}} \psi^{n,\dot{m}}$$

Le spineur de Dirac est composé des spineurs de Pauli ψ_0 et ψ_1 qui se transforment de Lorentz respectivement l'un comme ψ , l'autre comme ψ_c !

$$\psi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

Par construction, les transformations de Lorentz agissent sur ces spineurs $\psi_D(x)$ comme suit

$$\psi_D(x) \rightarrow \Sigma(A) \psi_D(x) = \psi'_D(x')$$

avec

$$\Sigma(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \bar{A} C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^+)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et } x' = \Lambda x \quad (17)$$

Introduisons l'opérateur $\hat{P}$ construit avec les opérateurs d'énergie-impulsion :

$$\hat{P} = m^{-1}(p_0 - (p \cdot \sigma)) \Rightarrow \hat{P}^{-1} = m^{-1}(p_0 + (p \cdot \sigma)) \quad (18)$$

En utilisant les propriétés de SL(2C) résumées dans l'annexe, on montre facilement que l'opérateur de Dirac $D(P)$ agissant sur les spineurs ψ_D défini ci-dessous permet de construire une équation invariante relativiste.

$$D(P) = m \begin{pmatrix} 0 & \hat{P} \\ \hat{P}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - (p \cdot \sigma) \\ p_0 + (p \cdot \sigma) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(P) \psi_D = m \psi_D \quad (19)$$

La démonstration repose sur les propriétés remarquables suivantes et aussi sur les équations 26-28 :

$$\begin{aligned} D^2(P) &= m^2 \quad \text{si } P^2 = m^2 \\ A \hat{P} A^+ &= \hat{P}' \quad (A^+)^{-1} (\hat{P})^{-1} A^{-1} = (\hat{P}')^{-1} \quad \text{avec } P' = \Lambda P \\ \text{Enfin } \Sigma(A) D(P) \Sigma^{-1}(A) &= D(P') \end{aligned}$$

Alors,

$$D(P) \psi_D = m \psi_D \Rightarrow D(P') \psi'_D = m \psi'_D$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Dirac que l'on obtient ici dans une représentation particulière qui est celle de Weyl, appelée parfois représentation chirale ou relativiste car associée à une représentation particulière du groupe de Lorentz propre (référence [6] page 143).

$$D = \not{p} \Rightarrow D \psi_D(x) = m \psi_D(x)$$

Les matrices gamma dans la représentation relativiste de Weyl (réf [1], page 115) sont :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \text{ (réf [1] page 101)}$$

Si l'énergie implusion est fixée (P étant déterminé, l'état physique est une onde plane...), les spineurs de Dirac constituent un espace de Hilbert élémentaire à deux dimensions (spin up ou down) et il y a des états à énergie positive ou négative. Dans la représentation de Weyl, au repos, on a

$$\psi_D(x) = \exp(-i m x_0) \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} \text{ ou } \exp(+i m x_0) \begin{pmatrix} -\psi \\ \psi \end{pmatrix} \text{ avec } \psi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

L'opérateur de spin permet de donner un sens physique aux états de base au repos. Ils sont propres de l'opérateur qui génère les rotations autour de la direction conventionnelle Oz (cf Annexe 1).

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

L'opérateur de parité qui échange χ_1 et χ_2 et qui s'écrit donc dans cette représentation γ_0 permet aussi de caractériser physiquement ces états; on a

$$\gamma_0 \psi_D = \pm \psi_D \text{ selon le signe de l'énergie}$$

Ceci signifie que la parité intrinsèque d'un spineur complexe conjugué est l'opposé de celle du spineur. Cette propriété a des conséquences expérimentales importantes dans la spectroscopie des particules en particulier des mésons.

5.1.2 L'électron libre

- L'équation invariante de Dirac :

$$(\not{p} - m)\psi = (i \not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :

1. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
2. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \rightarrow$ générateurs du groupe de Lorentz propre : $\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$
3. γ^5 invariant de Lorentz ; $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$
4. conséquence : décomposition du produit en partie symétrique anti-symétrique

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -i \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$$

- Les matrices de Pauli :

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

- Les matrices γ^μ dans la représentation de Pauli-Dirac :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} ; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \beta\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

- Les solutions libres pour l'électron :

- avec $p^0 = E = \omega = \sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -\omega - m \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (21)$$

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \cdot p}{\omega + m} \chi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ à l'approximation non-relativiste} \quad (22)$$

- avec $p^0 = E = -\omega = -\sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} -\omega - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & \omega - m \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (23)$$

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \cdot p}{\omega + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \text{ à l'approximation non-relativiste} \quad (24)$$

- Passage de la représentation relativiste (de Weyl) à la représentation non-relativiste (de Pauli) peut se faire par l'intermédiaire d'une transformation unitaire U dans l'espace des spineurs de Dirac telle que

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & \sigma_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma^0 \gamma^5) \quad U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \gamma^0 \gamma^5)$$

$$\psi_R = U^{-1} \psi_{NR} \quad \gamma_{NR} = U \gamma_R U^{-1}$$

- Au repos, les spineurs à énergie positive (respectivement négatives) s'écrivent :

$$\psi_R(p=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm \chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

5.2 L'équation de Dirac et l'interaction électromagnétique

- principe d'interaction minimale (invariance de jauge) :

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \not{p} \rightarrow \not{p} - q \not{A} \quad (25)$$

par exemple : pour un électron $q = -e$ et $A_0 = A^0 = V$ (le potentiel électrique).

$$p_0 = i\partial_0 \quad \rightarrow \quad E + e A_0 = i\partial_0 + e V$$

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants électroniques :

$$\{\gamma^\mu (i\partial_\mu - q A_\mu - m)\} \psi(x) = 0 = (\not{p} + e \not{A} - m) \psi(x)$$

- Conséquence (vers Klein-Gordon modifiée) :

$$(\not{p} + e \not{A} + m)(\not{p} + e \not{A} - m)\psi(x) = 0$$

$$\left((P + eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \psi(x) = 0 \text{ avec } P = (E, \vec{p})$$

où l'on voit que

- le "spin" $\sigma^{\mu\nu}$ n'interagit qu'avec $F_{\mu\nu}$ c'est à dire avec les champs $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$
- mais le mouvement dépend encore du potentiel A_μ (expérience de Böhm Aharonov ...)
- Vers l'équation de Schrödinger modifiée :

$$\left((E + eV - m)(E + eV + m) - (p + eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \psi = 0$$

- A la limite non-relativiste ($E + eV + m \sim 2m$) on retrouve l'équation de Pauli et l'interaction magnétique du spin de Pauli (cf paragraphe 4.4 et référence [7])

$$\left((E + eV - m) - \frac{(p+eA)^2}{2m} + \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \psi = 0$$

6 Conclusion

L'équation de Dirac et son opérateur constituent des questions historiques et fascinantes à la limite de la physique et des mathématiques, des questions où la pertinence des maths pour décrire le monde physique tient du "mystère".

Références additionnelles [2], [4], [8], [5], [10], [3]

7 ANNEXES

7.1 Propriétés du groupe $SL(2, \mathbb{C})$

- définition : Soit les matrices de $GL(2, \mathbb{C})$ ce sont les matrices $(2, 2)$ à coefficients complexes soit 8 paramètres réels. Les spéciales sont de déterminant 1 elles forment un sous-groupe des matrices non singulières ; elles dépendent de 6 paramètres réels.

$$A \in SL(2\mathbb{C}) \text{ si } |A| = 1$$

- Les matrices A de $SL(2, \mathbb{C})$ sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

- Propriété remarquable du groupe $SL(2, \mathbb{C})$: si C est la matrice donnée par l'équation 12 nous avons pour toute matrice A de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$(A^*)^{-1} = C A C^{-1} \quad \text{soit } (A^+)^{-1} = C \bar{A} C^{-1}$$

- L'algèbre de Lie du groupe peut être construite sur des générateurs qui sont les matrices $(2, 2)$ de trace nulle

$$\sigma_j \text{ et } i\sigma_j \text{ avec } j = 1, 2, 3$$

- les matrices A de $SL(2, \mathbb{C})$ peuvent s'écrire sous forme exponentielle :

$$A = \exp\left(-\frac{i}{2}((a - ib) \cdot \sigma)\right)$$

Les matrices de $SL(2\mathbb{C})$ constituent une représentation à deux valeurs $\pm A$ du groupe de Lorentz propre

- La correspondance se construit de la manière suivante soit X une matrice associée à un quadrivecteur dans l'espace temps $V = (x_0, x, y, z)$ alors

$$X = x_0\sigma_0 - x_i\sigma_i = x_0 - (x \cdot \sigma) = \begin{pmatrix} x_0 - z & -x + iy \\ -x - iy & x_0 + z \end{pmatrix}$$

- Par construction, le déterminant de X est égal à la métrique (pseudo-norme) de X :

$$|X| = x_0^2 - \sum_j x_j^2 = x^2$$

D'autre part :

$$x_\mu = \frac{1}{2} \text{trace}[\sigma_\mu X]$$

- De plus :

$$\begin{aligned} X^+ &= \begin{pmatrix} \bar{x}_0 - \bar{z} & -\bar{x} + i\bar{y} \\ -\bar{x} - i\bar{y} & \bar{x}_0 + \bar{z} \end{pmatrix} = \bar{x}_0\sigma_0 + \bar{x}_i\sigma_i \\ X^{-1} &= \frac{1}{|X|} \begin{pmatrix} x_0 + z & x - iy \\ x + iy & x_0 - z \end{pmatrix} = x_0\sigma_0 + x_i\sigma_i \end{aligned} \quad (26)$$

- La transformation $X \rightarrow X'$ conserve la métrique c'est donc une transformation de Lorentz ; attention $\pm A$ donne le même Λ .

$$X \rightarrow X' = A X A^+ \text{ alors } x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \text{ avec } \Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{trace}[\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+] \quad (27)$$

De plus X^{-1} se transforme par $(A^+)^{-1}$:

$$X'^{-1} = (A^+)^{-1} X^{-1} A^{-1} \quad (28)$$

- Cas particulier : les rotations.

$$A = \exp(-\frac{i}{2}((a - ib).\sigma)) \text{ avec } b = 0 \text{ et}$$

$$\boxed{\vec{a} = a \vec{n}}$$

En utilisant $(a.\sigma)^2 = a^2$ on obtient

$$A = \cos(a/2) - i \sin(a/2)(n.\sigma) \quad A^+ = \cos(a/2) + i \sin(a/2)(n.\sigma)$$

Evidemment, Λ est une rotation d'angle $\theta = a$ autour du vecteur $\vec{n}$; en particulier, A étant manifestement unitaire, on aura $\Lambda_{00} = 1$ et $\Lambda_{0i} = 0$ et $x'_0 = x_0$.

Plus particulier encore, les rotations θ autour de Oz :

$$A = \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)\sigma_3 \sim 1 - i \theta \frac{\sigma_3}{2}$$

- Cas particulier : les Lorentz pures.

$$A = \exp(-\frac{i}{2}((a - ib).\sigma)) \text{ avec } a = 0 \text{ et}$$

$$\boxed{\vec{b} = b \vec{n}}$$

En utilisant $(b.\sigma)^2 = b^2$ on obtient

$$A = \cosh(b/2) - \sinh(b/2)(n.\sigma) \quad A^+ = A$$

A la limite non-relativiste dans la direction Ox :

$$A \sim 1 - b \frac{\sigma_1}{2}$$

La transformation n'est pas unitaire mais hermitienne, c'est un boost dans la direction du vecteur $\vec{n}$ à la vitesse $v = \tanh(b)$. En effet le calcul de X' donne :

$$X' = [ch - sh (n.\sigma)] \times (x_0 - (x.\sigma)) \times [ch - sh (n.\sigma)]$$

avec

$$\begin{aligned} (n.\sigma) \times (x.\sigma) &= ((n.x) + i(n \wedge x).\sigma) \\ (n.\sigma) \times (x.\sigma) \times (n.\sigma) &= (n.x)(n.\sigma) - (x - (n.x)n).\sigma = ((2(n.x)n - x).\sigma) \end{aligned} \quad (29)$$

En développant :

$$X' = x_0(ch^2 + sh^2 - 2chsh(n.\sigma)) - ((ch - sh(n.\sigma))(x.\sigma)(ch - sh(n.\sigma))$$

on trouve

$$\begin{aligned} x'_0 &= (ch^2 + sh^2)x_0 + 2chsh(n.x) \\ x' &= 2chsh x_0 n + ch^2x + sh^2((2(n.x)n - x) \end{aligned}$$

Soit en changeant l'argument des fonctions hyperboliques ($b/2 \rightarrow b$), on retrouve le boost de Lorentz :

$$\begin{aligned} x'_0 &= ch(b)x_0 + sh(b)(n.x) = \gamma(x_0 + v(n.x)) \\ (n.x') &= sh(b)x_0 + ch(b)(n.x) = \gamma((n.x) + v x_0) \\ (n \wedge x') &= (n \wedge x) \end{aligned}$$

$$\text{avec } sh(b) = v\gamma \quad ch(b) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad th(b) = v$$

Plus particulier encore, le boost à la vitesse v est selon de Ox :

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 + vx_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 + v x_0) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

References

- [1] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [2] E. Cartan. *{ La théorie des spineurs I et II }*. Hermann Edt., 1938.
- [3] E. Durand. *{ Mécanique quantique III }*. Masson Edt., 1976.
- [4] M. Gourdin. *{ Cours de DEA : polycopiés }*. LPTHE. Orsay, 1969.
- [5] J. Hladik. *{ Les Spineurs en physique }*. Masson Edt., 1996.
- [6] Les Houches. *{ High Energy Physics }*. Dunod Edt, 1965.
- [7] C. Longuemare. *{ Lamb shift }*. Séminaire d'analyse U-Caen, 2006.
- [8] P. Lounesto. *{ Clifford Algebras and Spinors }*. Cambridge U Press., 1997.
- [9] M. Morand. *{ Géométrie spinorielle }*. Masson Edt., 1973.
- [10] V. Morin. *{ <http://www.ummo-sciences.org/activ/science/spineurs> }*. U-Angers, 2003.