

Université de Caen

LMNO

Interactions de van der Waals effet Casimir et gravitation

C. LONGUEMARE

7 et 14 avril 2015



*

*. http://en.m.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_force

Plan

1. Les forces intermoléculaires à longue distance
2. L'équation de van der Waals : thermodynamique
3. Le développement du viriel : physique statistique
4. Les forces de London : "un effet quantique"
5. L'effet Casimir : théorie et expérience
6. Les interactions des constituants du modèle standard
7. Propriétés de la couleur selon SU3
8. Les effets attendus à longue distance ?
9. Retour vers la gravitation générale
10. Conclusions

Une introduction grand public : référence 0

Quantum gravity et théories de jauge

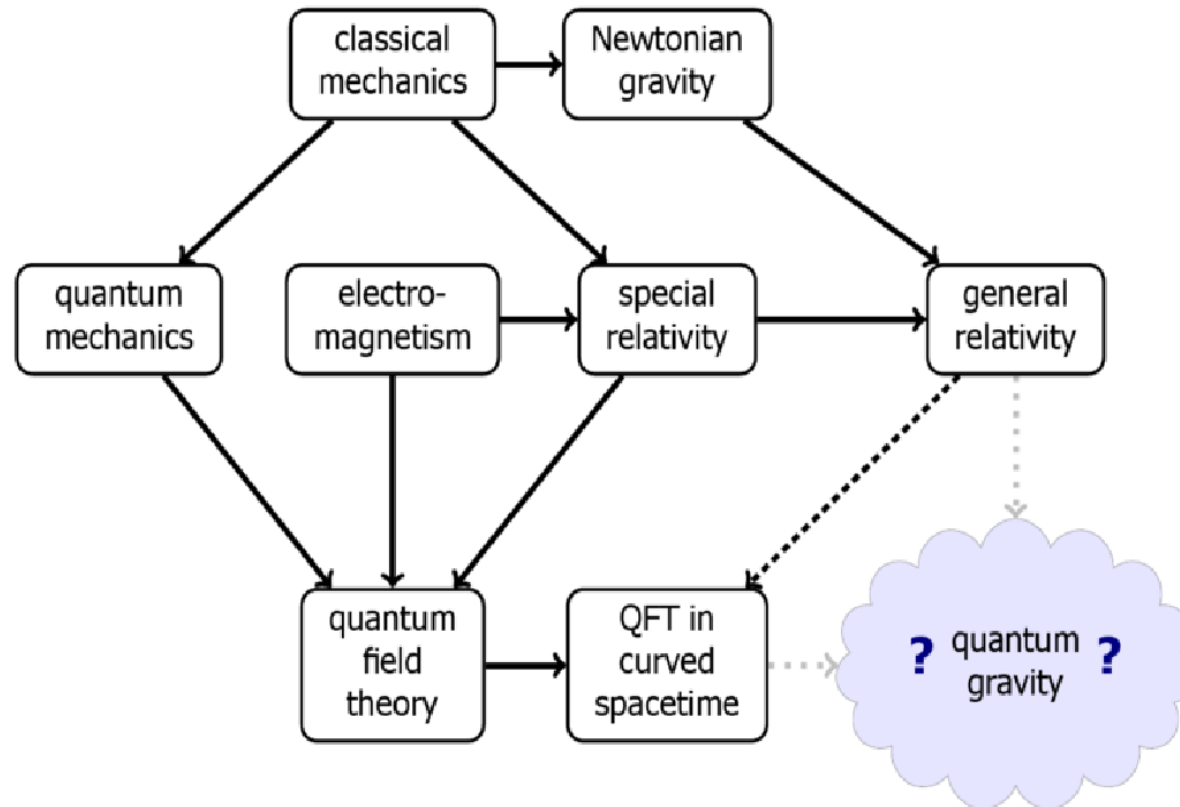


figure 5a *

*. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Quantum_gravity.png

haute énergie / courte distance

basse énergie / longue distance

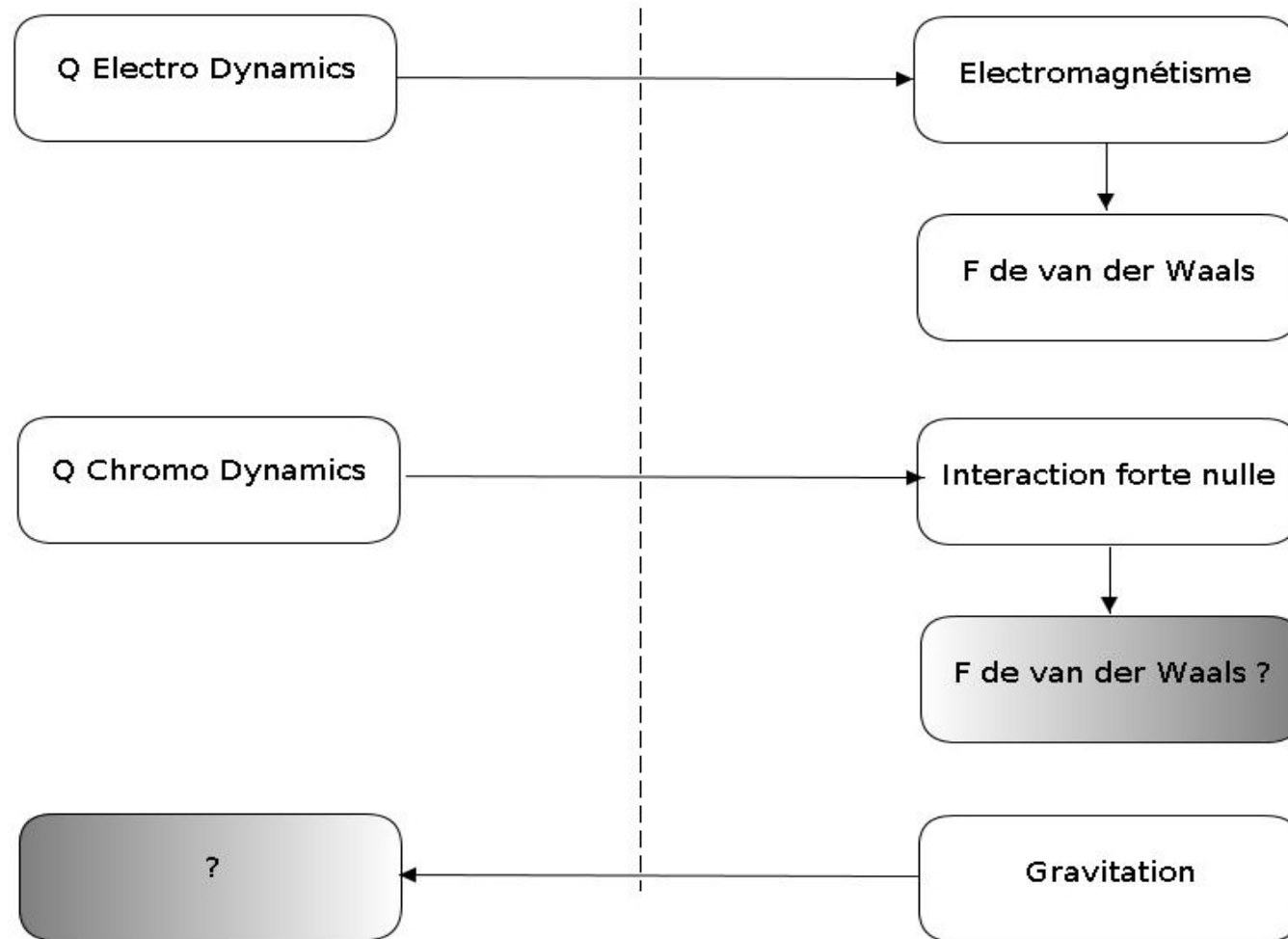


figure 5b

Les masses en GeV/c^2

	B	$2I_3$	1	m	2	m	3	m
$\begin{pmatrix} q \\ q \\ q \end{pmatrix}$	$1/3$	$+1$ -1	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$0,300$ $0,300$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$1,500$ $0,500$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$75,00$ $5,000$
$(\ell)_L$	-1	$+1$ -1	$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$	$0,000$ $0,511 \cdot 10^{-3}$	$\begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix}$	$0,000$ $0,110$	$\begin{pmatrix} \nu \\ \tau \end{pmatrix}$	$0,000$ $1,777$
$(\ell)_R$	-2	0	e		μ		τ	

$$2Q = 2i_3 + B \text{ Gellman Nishijima}$$

$SU(2) * U(1)$ saveur	m	γ $0,000$	$W^\pm$ $80,4$	Z^0 $91,19$	H^0 $125,0$
$SU(3)$ ● ● ● couleur	m	G_μ^j $0,000$	$j = 1, ..8$ $\mu = 0, ..3$		

Les constituants du modèle standard (SM)

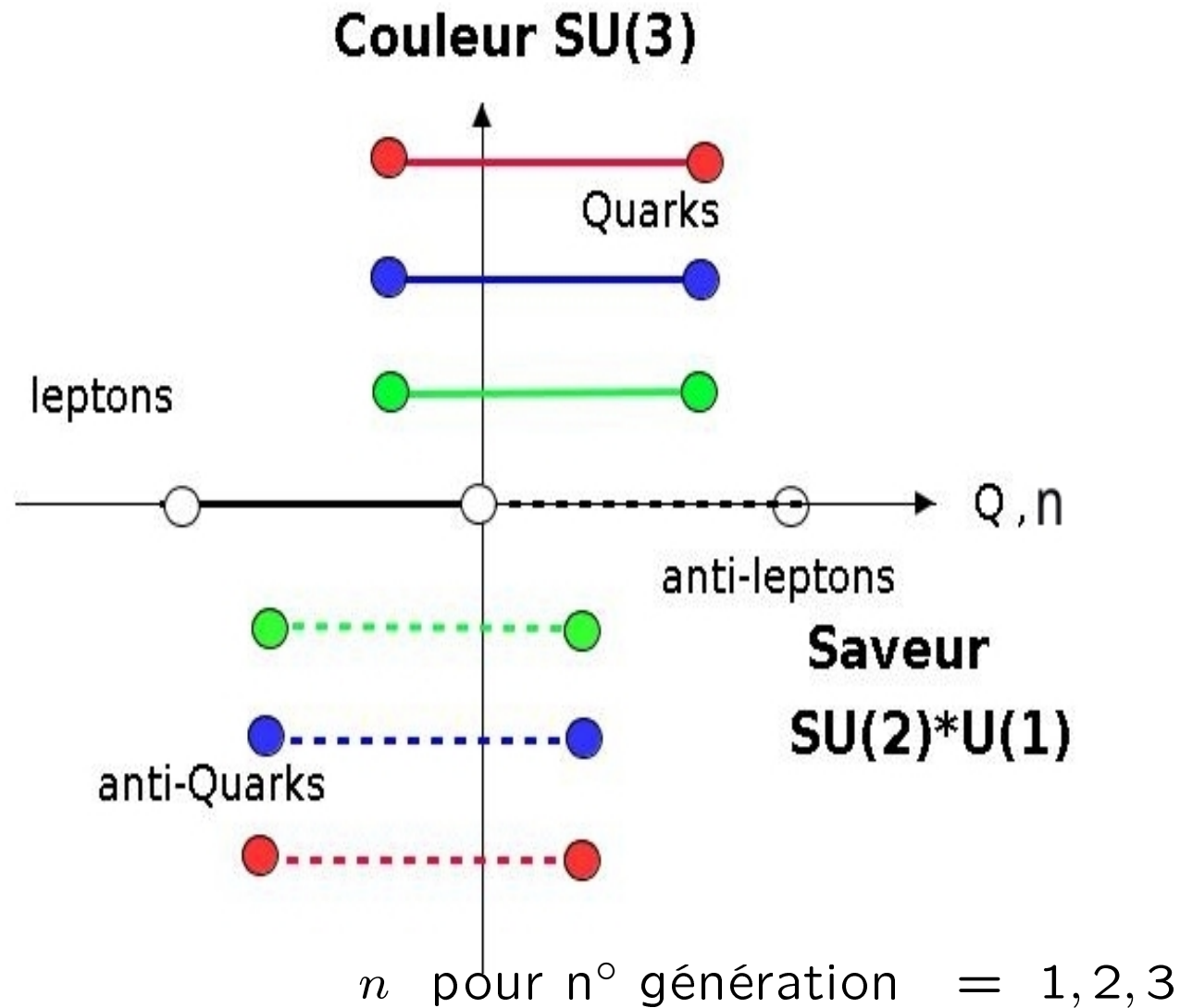


figure 6

$$Q = I_3 + \frac{B}{2} \text{ avec } B = \frac{1}{3} \text{ ou } -1$$

Le groupe SU(3)

référence 12 page 149..168..

L'algèbre de $SU(3)$

- Groupe de Lie simplement connexe

$$U = \exp(i c_k \lambda_k)$$

- 8 générateurs λ_i

$$[\lambda_i, \lambda_j] = c_{ij}^k \lambda_k$$

- Algèbre de Lie de rang 2 : choix d'une base $(H_1, H_2, E_3, ..E_8)$
si $|m\rangle$ est propre de H_i

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \Rightarrow H_i E_\alpha |m\rangle = (\alpha_i + m) |m\rangle$$

- Racines : $\vec{\alpha} = (\alpha, \beta)$ on a

$$[H_i, E_\alpha] = -[H_i, E_{-\alpha}] \text{ et } [H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta]$$

une racine est simple si elle ne peut être obtenue par addition ou inversion..., pour SU3

$$\vec{\alpha}_1 \text{ et } \vec{\alpha}_2 = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

autres racines $-\vec{\alpha}_1, -\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, -\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$

- Diagramme des racines de SU(3) voir figure 7
- Deux opérateurs de Casimir (réf 12 page 171)

$$[C, \lambda_k] = 0 \quad C \sim \lambda^2$$

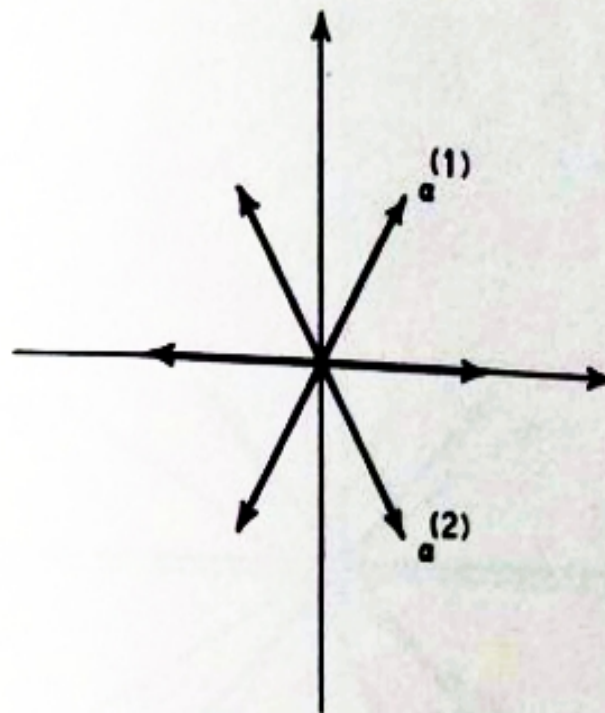


Figure 3.2

figure 7

Le groupe SU(3)

choix de la représentation / physique

- Symétrie SU(3) : les matrices générateurs λ_j de Gell-man telles que

$$U = \exp(i\lambda_j c_j) \quad c_j \in \mathbb{R}$$

matrices (3,3) λ_j hermitiques de trace nulle

$$\lambda_j = \begin{matrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Le groupe SU(3)

Algèbre de SU(3)

- La sous algèbre commutative à 2 dimensions : H_1 H_2

$$H_2 = \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad H_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Opérateurs propres : $I_{\pm}$ $U_{\pm}$ $V_{\pm}$

$$I_+ = \lambda_1 + i\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_+ = \lambda_4 + i\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_+ = \lambda_6 + i\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_- = \lambda_1 - i\lambda_2 \text{ etc...}$$

- Racines de SU(3)

$$[H_1, I_+] = I_+ \quad [H_2, I_+] = 0$$

$$[H_1, U_+] = \frac{1}{2} U_+ \quad [H_2, U_+] = \frac{\sqrt{3}}{2} U_+$$

$$[H_1, V_+] = -\frac{1}{2} V_+ \quad [H_2, V_+] = \frac{\sqrt{3}}{2} V_+$$

Le groupe SU(3)

Les représentations de $SU(3)$

- Choix d'une base (pour une représentation)

$$H_i |M\rangle = M_i |M\rangle \Rightarrow H_i E_\alpha |M\rangle = (M_i + \alpha_i) E_\alpha |M\rangle$$

$\vec{M}$ est un "poids" dans un plan.

- Poids "maximum"

$$\forall \alpha \quad E_\alpha |M_{max}\rangle = 0$$

- Génération des éléments de la représentation

$$E_{-\alpha} E_{-\beta} E_{-\gamma} \dots |M_{max}\rangle$$

- Représentations irréductibles de $SU(3)$ $(a, b) \in \mathbb{N}^2$

$$\vec{M}_{max} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2\sqrt{3}} \right)$$

- Représentations irréductibles : dimension de la représentation (a, b)

$$D_{a,b} = \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(a+b+2)$$

- représentations fondamentales dimension 3 : $(1, 0)$ ou $(0, 1)$
Autres exemples : $D_{0,0} = 1$ $D_{1,1} = 8$ $D_{3,0} = 10$
- Représentation adjointe $(a, b) \rightarrow (b, a)$, autoadjointe $a = b$

3.8 Construction of the Representations of Simple Lie Groups

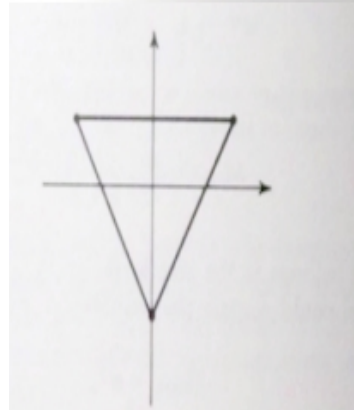


Figure 3.6

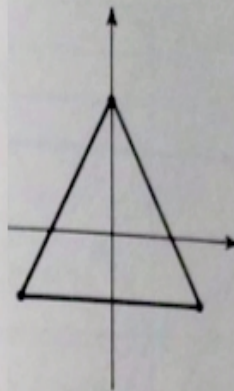


Figure 3.7

figure 8a

Représentations fondamentales de $SU(3)$

1. $(1,0) \vec{M}_{max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$
2. $(0,1) \vec{M}_{max} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$

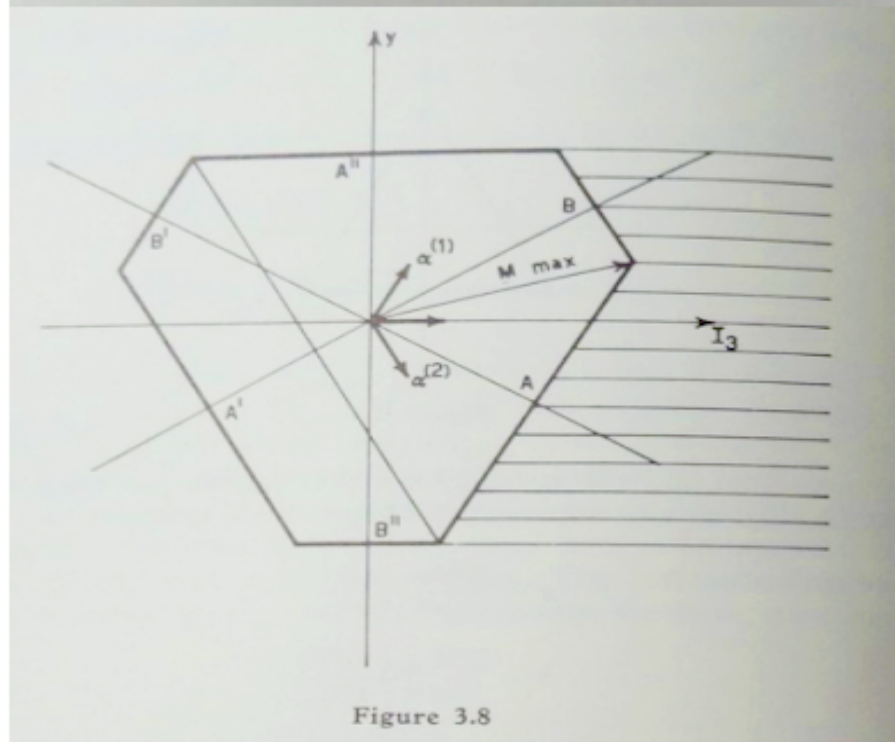
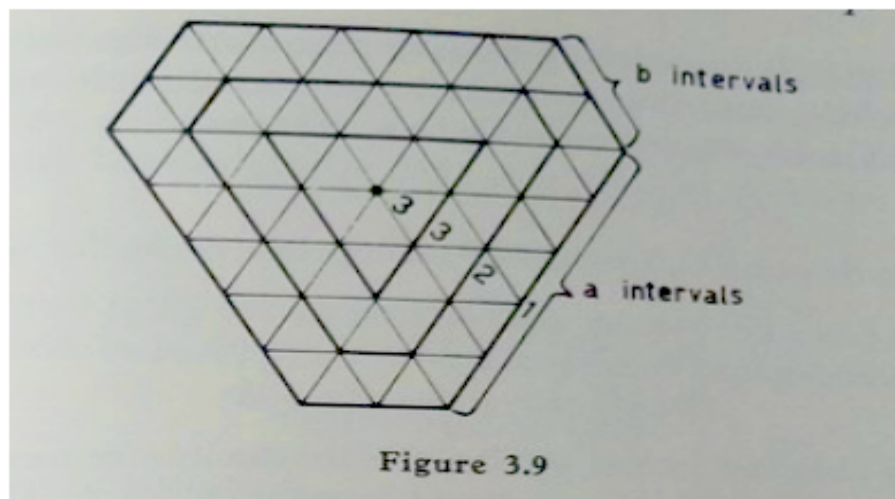
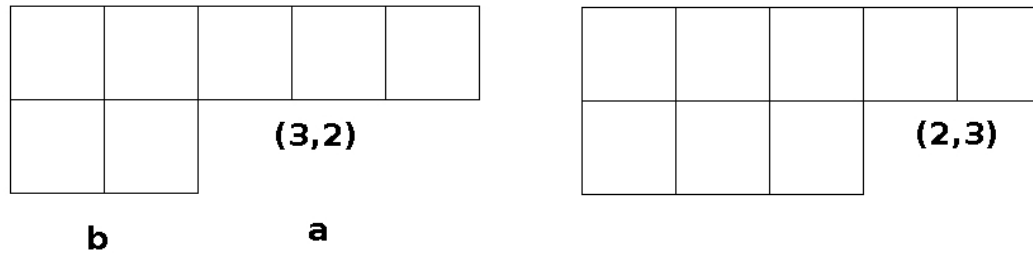


figure 8b $(a,b)=(5,2)$ dimension 81

Le groupe $SU(3)$

Les diagrammes d'Young de $SU(3)$

- Diagramme d'Young associé à une représentation (a, b)



- Construction des représentations par produit de Kronecker

$$D_1 \otimes D_2 = \sum_j \oplus D_j$$

- Exemples utiles pour la chromodynamique

Les mésons $q\bar{q}$

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$$

les paires de quarks qq

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (1, 0)$$

Les baryons qqq

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0) = (3, 0) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0)$$

Les gluons G

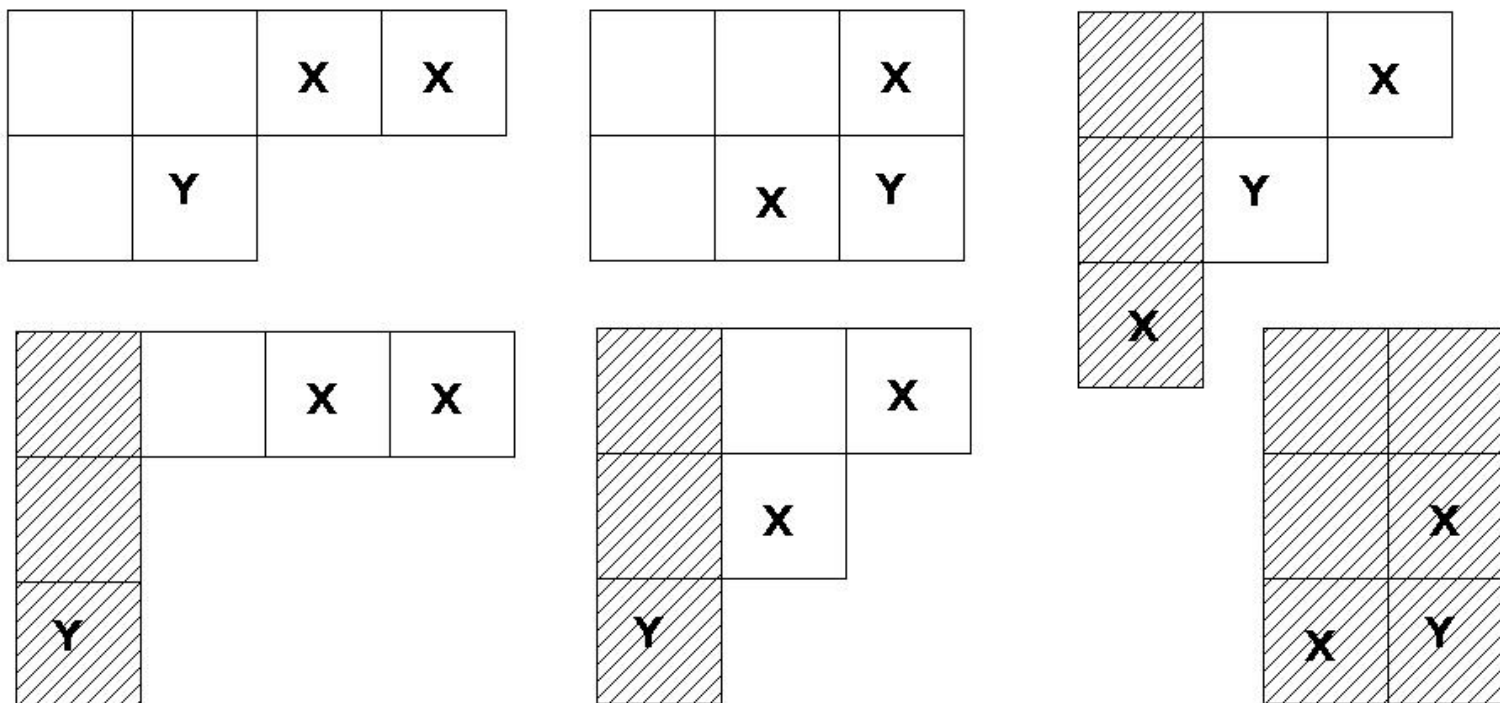
$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$$

Les paires de gluons GG

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) \oplus (3, 0) \oplus (0, 3) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0)$$



$$(1,1) * (1,1) = (2,2) + (0,3) + (1,1) + (3,0) + (1,1) + (0,0)$$

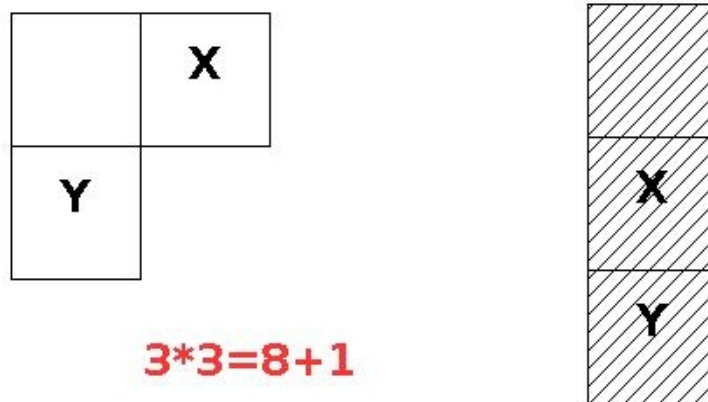


$$8*8=64=27+10+8+10+8+1$$

figure 9a

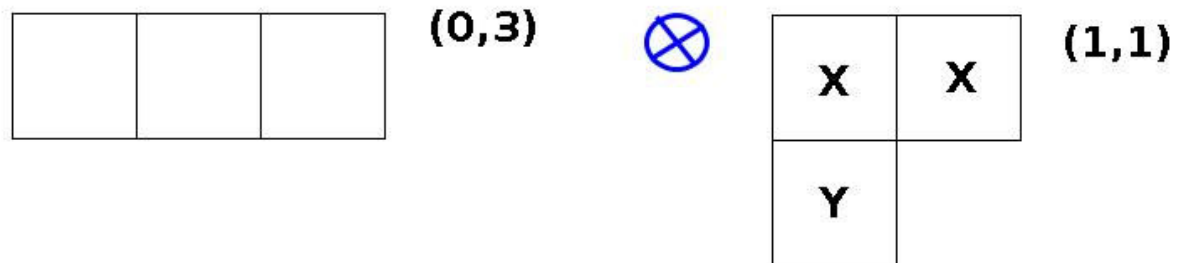


$$(1,0) \otimes (0,1) = (1,1) + (0,0)$$

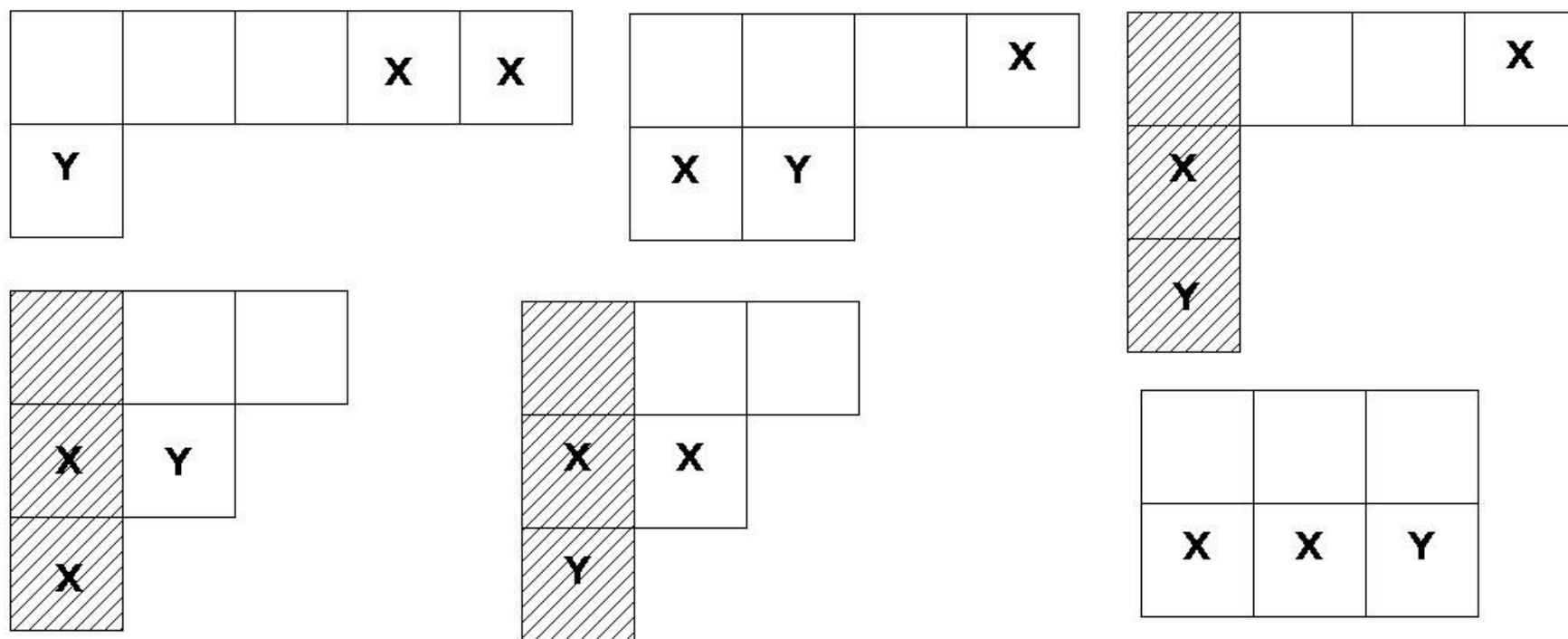


$$3 \times 3 = 8 + 1$$

figure 9b



$$(0,3)*(1,1)=(1,4)+(2,2)+(0,3)+(1,1)+(1,1)+(3,0)$$



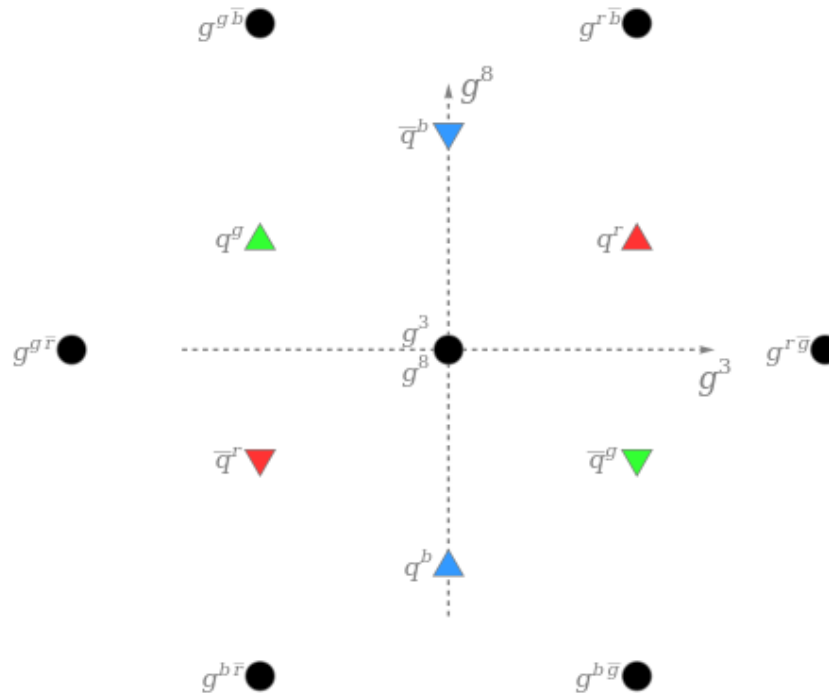
$$10*8=80=35+9+10+8+8+10$$

figure 9c

La chromodynamique : (r,g,b)

Invariance de jauge

- Symétrie SU(3) : 8 Bosons de jauge (référence 13)



- L'interaction de jauge des fermions en x est de la forme :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = j_j^\mu(x) G_\mu^j(x) \quad \text{avec } j_j^\mu(x) = g \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_j \psi(x)$$

g est la constante de couplage numérique ~ 1 (pour la chromodynamique)
Exemple $j^\mu \sim \bar{b} \gamma^\mu r$ l'annihilation de ce boson transforme un quark b en quark r

$$G^{r\bar{b}} + q^b \rightarrow q^r \quad G^{r\bar{b}} = G^6 - iG^7$$

Interaction en x des 8 gluons colorés de SU(3) d'après QCD :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g \times G_\mu^1 \frac{1}{2} (\bar{g} \gamma^\mu r + \bar{r} \gamma^\mu g) + G_\mu^2 \frac{i}{2} (-\bar{g} \gamma^\mu r + \bar{r} \gamma^\mu g) \\ & + G_\mu^4 \frac{1}{2} (\bar{b} \gamma^\mu g + \bar{g} \gamma^\mu b) + G_\mu^5 \frac{i}{2} (\bar{b} \gamma^\mu b - \bar{g} \gamma^\mu b) \\ & + G_\mu^6 \frac{1}{2} (\bar{r} \gamma^\mu b + \bar{b} \gamma^\mu r) + G_\mu^7 \frac{i}{2} (-\bar{r} \gamma^\mu b + \bar{b} \gamma^\mu r) \\ & + G_\mu^3 \frac{1}{2} (\bar{r} \gamma^\mu r - \bar{g} \gamma^\mu g) + G_\mu^8 \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{r} \gamma^\mu r + \bar{g} \gamma^\mu g - 2\bar{b} \gamma^\mu b) \end{aligned}$$

- Lagrangien bosonique : plus complexe et lié au confinement de la couleur

Les effets attendus à longue distance ?

Conséquences (prouvées ou supposées)

- Les états complexes s'obtiennent par produit direct de représentations fondamentales (1,0) et (0,1)
- La couleur est cachée à l'échelle macroscopique mais "nécessaire" à l'échelle quantique...
- Les singulets les plus simples composés de quarks ou de gluons :
 1. $q q q$ ou $\bar{q} q$ ou $\bar{q} \bar{q} \bar{q}$
 2. $G G$ ou $G G G$
 3. pas d'état singulet de type $q G$ ou $q q$
- Un singulet pourrait exister à l'échelle macroscopique :
 1. G_μ^0 couplé à $\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{b}\gamma^\mu b + \bar{r}\gamma^\mu r + \bar{g}\gamma^\mu g)$ (symétrie U(1) de couleur ?)
 2. un singulet du type $G G$ car $8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 8 \oplus 1$

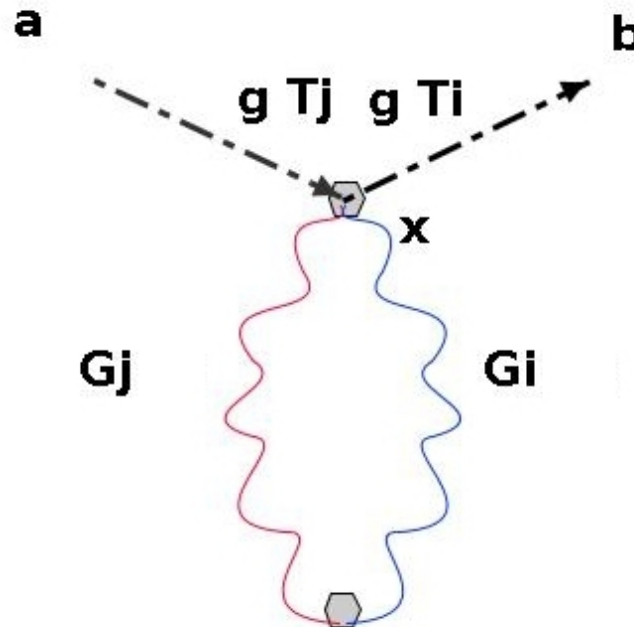
Les effets attendus à courte (longue) distance ?

- Il faudrait justifier un terme d'interaction à la "van der Walls" :

$$(\mathcal{L}_{int}(x))^2 \sim g_{vdW} [\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_j \psi(x) G_\mu^j(x)]^2$$

- avec une constante de couplage résiduelle de 10^{-10}

$$g(QCD) \sim 1 \quad \rightarrow \quad g_{vdW} \sim 10^{-10} \Rightarrow \alpha^2 \sim g^4 \sim 10^{-40}$$



Retour vers la gravitation générale

- Mouvement dans le champ E.M. en RR
- Mouvement géodésique en RG

Action des forces électromagnétiques

- La source du champ EM est J_μ un courant

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \quad [1]$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [2]$$

- L'action électromagnétique avec $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$

$$\ddot{x}^\mu = \frac{q}{m} (g^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu}) \dot{x}^\nu$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu = q F_{\mu\nu} v^\nu$$

- Le champ EM est antisymétrique en $\mu\nu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Le potentiel A_μ est le champ EM classique et le champ du photon

$$A^\mu \rightarrow \gamma$$

Action de la gravitation relativiste

— La source de la géométrie est $T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \left(a T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (a T + 2 \Lambda) \right) \quad [3]$$

$$R_{ik} = R^{\ell}_{ilk} = \nabla^{\ell}_{\ell s} \Gamma^s_{ik} - \nabla^{\ell}_{ks} \Gamma^s_{il} \quad [4]$$

$$T = \text{Tr} (T_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad R_{\mu\nu} = \text{tenseur de Ricci} \quad a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}$$

— La trajectoire géodésique est (avec $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$)

$$\ddot{x}^{\mu} = - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho}$$

— Le "champ" grave est tensoriel et symétrique en $\rho \nu$

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (-g_{\rho\nu,\sigma} + g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu})$$

— Le "potentiel" grave classique est $g_{\mu\nu}$
exemple : le champ statique NR*

$$g^{\mu\nu} \sim ((1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2}), -1, -1, -1) \Rightarrow \Gamma^i_{00} = \nabla_i \phi(x) = -F^i$$

— le champ quantique ?

*. Remarque $1 + 2 \frac{\phi}{c^2} \sim (1 + \frac{\phi}{c^2})^2$

Conclusions

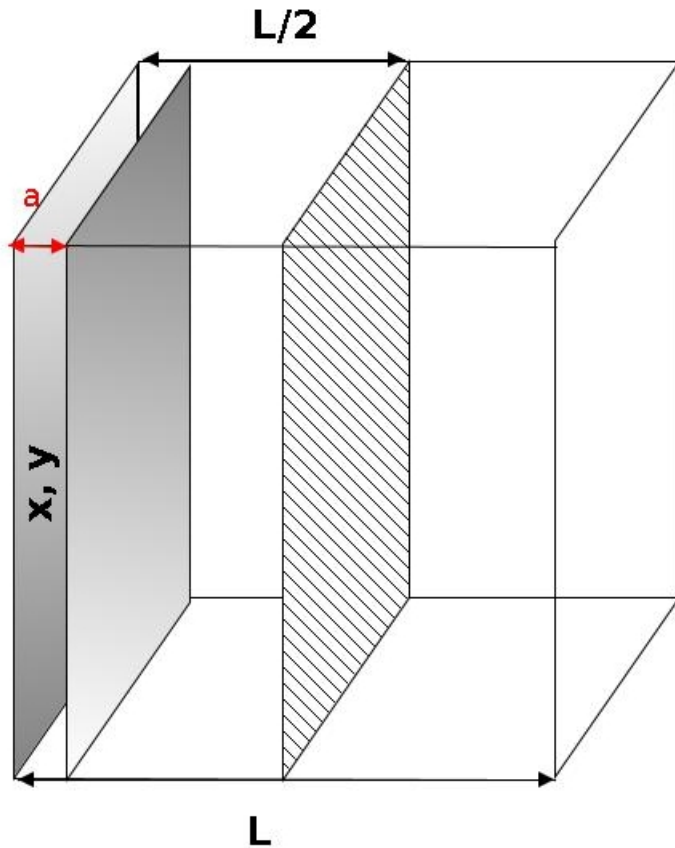
La gravitation est-elle une force de van der Waals associée à QCD ?

- Evidemment l'analyse présentée est totalement embryonnaire , c'est une idée, éventuellement une piste
- **Les points positifs :**
 1. L'attractivité de la gravitation est naturelle
 2. Sa relative faiblesse trouve une explication qualitative
 3. QCD doit avoir une action à distance macroscopique, laquelle ?
 4. Le "graviton" est identifié : un état singulet de deux gluons.
 5. L'interaction du "graviton" est naturellement tensorielle.
- **Les points négatifs :**
 1. L'action sur les photons est problématique
 2. La dépendance de la force en r^{-7} semble incompatible avec la gravitation
- **Pour aller plus loin, il faut**
 1. essayer quelques prédictions "qualitatives"
 2. comprendre la force de van der Waals en théorie quantique (QED)
 3. comprendre pourquoi ce "graviton" devrait-il être faiblement couplé aux hadrons.

références

- 0 <http://www.astrosurf.com/luxorion/quantique-particules3.htm>
- 1 I. Bazarov , *Thermodynamique* , Ed MIR 1970
- 2 L. Landau & E. Lifchitz , *Physique statistique* , Ed MIR 1967
- 3 L. Landau & E. Lifchitz *Mécanique quantique*, Ed MIR 1966
- 4 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory*, Macgraw Hill 1980
- 5 http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_van_der_Waals
- 6 http://en.m.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_force
- 7 http://en.wikipedia.org/wiki/London_dispersion_force
- 8 http://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_d'état_de_van_der_Waals
- 9 H. Casimir *On the attraction between two perfectly conducting plates ?*
- 10 L. Couture & R. Zitoun *physique statistique* , Ellipse 1992
- 11 J.D. Jackson *Electrodynamique classique* , Dunod 2001
- 12 L. Fonda & G. Ghirardi *Symmetry principles in Q.. Physics* , Dekker 1970
- 13 http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_chromodynamics

Appendice 1 : Calcul de l'effet Casimir (partie physique)



— Hypothèses

1. Considérons un condensateur parfait (supra-conducteur) constitué de deux plaques carrées de côté L , très proches, à la distance a l'une de l'autre et à $T = 0K$.

$$a \ll L$$

Les deux conducteurs sont neutres à l'échelle macroscopiques.

2. L'effet Casimir est le résultat de l'indiscernabilité des électrons de conduction aux distances quantiques ; en effet les fonctions d'onde des électrons de conduction ne sont pas localisées à l'intérieur des conducteurs mais s'étendent au delà sur l'un ou l'autre à travers le gap de largeur a (effet tunnel), ceci induit des configurations où un ou des électrons de conduction quittent le conducteur A et se retrouvent sur le conducteur B ; A se charge alors positivement quand B se charge négativement ou réciproquement . Cette dissymétrie électrique induit toujours une "force attractive" : c'est l'effet Casimir qui découle évidemment de la MQ.
3. Le calcul de l'effet passe par la détermination de l'énergie du vide électromagnétique dans le gap de largeur a quand L est infini ou très grand pour qu'on puisse négliger les effets de bord.

- L'analyse physique (qui reste à développer) nous conduit à la question mathématique suivante

$\mathcal{E}$ est l'énergie "renormalisée" par unité de surface

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty k \, dk \times$$

$$\left(\sum_{-\infty}^\infty \sqrt{k^2 + \left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} - \int_{-\infty}^\infty \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}x\right)^2} \, dx \right)$$

- Soit avec $k = \frac{\pi}{a} y$

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{4 a^3} \int_0^\infty y \, dy \times$$

$$\left(\sum_{-\infty}^\infty \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^\infty \sqrt{y^2 + x^2} \, dx \right)$$

- Les documents des physiciens (réf 4 page 141) donnent

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2 B_4}{a^3 4!} \text{ avec } B_4 = -\frac{1}{30}$$

- La force (attractive) par unité de surface est donc

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{\hbar c \pi^2 B_4}{a^4 8} = -\frac{\hbar c \pi^2}{a^4} \frac{1}{240}$$

$$\hbar c = 3 \cdot 10^{-26} \text{ J.m pour } a \sim 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m on a } \mathcal{F} = 1 \text{ N/m}^2$$