

Université de Caen

LMNO

Interactions de van der Waals effet Casimir et gravitation

C. LONGUEMARE

7 et 14 avril 2015



*

*. http://en.m.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_force

Plan

1. Les forces intermoléculaires à longue distance
2. L'équation de van der Waals : thermodynamique
3. Le développement du viriel : physique statistique
4. Les forces de London : "un effet quantique"
5. L'effet Casimir : théorie et expérience
6. Les interactions des constituants du modèle standard
7. Propriétés de la couleur selon SU3
8. Les effets attendus à longue distance ?
9. Retour vers la gravitation générale
10. Conclusions

Une introduction grand public : référence 0

Constantes physiques

$\mathcal{G}$	cte de gravitation	$6,673 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
Mpc	méga parsec	$3,086 \cdot 10^{19}$	km
$\mathcal{N}$	nombre d'Avogadro	$6,022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
k	cte Boltzmann	$8,617 \cdot 10^{-5}$	$\text{eV}.\text{K}^{-1}$
$R^* = k\mathcal{N}$	cte des gaz parfaits	8,314	$\text{J}.\text{K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
c	vitesse de la lumière	$2,998 \cdot 10^8$	$\text{m}.\text{s}^{-1}$
$\hbar$	constante de Planck	$6,582 \cdot 10^{-16}$	$\text{eV}.\text{s}$
e	charge élémentaire	$1,602 \cdot 10^{-19}$	C
$(4\pi\epsilon_0 c)^{-1}$	perméabilité	$10^{-7} c$	MKSA
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c \hbar}$	cte structure fine	1/137,036	1

Notations

$g_{\mu\nu}$		métrie relativiste	$+$	$-$	$-$	$-$	
U	E	énergie interne (énergie)		J			
W	Q	travail (chaleur)		J			J
ρ		densité de x	x	m^{-3}			
P	v	pression (volume)	N	m^{-2}			m^3
T	S	température (entropie)		K			$J K^{-1}$
N		Nombre de constituants $\sim \mathcal{N}$		1			
C		Capacité calorifique	J	K^{-1}			
L		Chaleur latente		J			
V	$\vec{E}$	potentiel (champ) électrique		V			V/m
ρ	$\vec{j}$	densité (courant) électrique		C/m^3			$C/s m^2$
$x, \vec{x}$	$\vec{v}$	position (vitesse)		m			m/s
$\vec{u}$		direction (vecteur unitaire)		1			
r	$ \vec{x} $	distance à l'origine		m			m

L'équation d'état de van der Waals

référence 1 page 34 et 70 référence 10 page 458

- Système thermodynamique : ($N = \mathcal{N}$ chimiquement pur)
définit par P v T , l'équation d'état de van der Waals

$$P = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad \text{par môle avec } v > b \quad a > 0$$

- Table de valeurs de a, b par môle (référence 8)

élément	$a \times 10^3$ (Pa·m ⁶)	$b \times 10^3$ m ³
Hélium (He)	3,45	0,0237
Néon (Ar)	21,3	0,0171
Argon (Ar)	136,3	0,0322
Dihydrogène (H ₂)	24,7	0,0266
Diazote (N ₂)	140,8	0,0391
Dioxygène (O ₂)	137,8	0,0318
Eau (H ₂ O)	557,29	0,0310
Méthane (CH ₄)	225,0	0,0428

Conditions normales pour le gaz parfait :

$$P = 101,13 \text{ kPa}, T = 273,17 \text{ K}, v = 22,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{si } a \cdot 10^3 = 1 \Rightarrow \delta P \sim 2 \text{ Pa (conditions normales)} \quad 3$$

Le développement du viriel (physique statistique)

— Le viriel des forces pour $\mathcal{N}$ "atomes"

$$\mathcal{V}(t) = \sum_i \vec{x}_i \vec{f}_i \quad \vec{f}_i = \vec{f}_i(ext) + \vec{f}_{ij}(int)$$

— Principe ergodique

$$\bar{\mathcal{V}}(t) = \langle \mathcal{V} \rangle = -3 P v + \langle \sum_{ij} \vec{r}_{ij} \vec{f}_{ij}(int) \rangle$$

— Théorème du viriel

$$\langle \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \vec{p}_i \rangle = 0 = 2E_c + \langle \mathcal{V} \rangle$$

— Développement du viriel pour les gaz ...

$$\frac{Pv}{RT} = 1 + \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} \dots$$

— Viriel des forces gravitationnelles ($P = 0$)

$$\langle \mathcal{V} \rangle = U_{potentielle} = -2E_c$$

isothermes de van der Waals

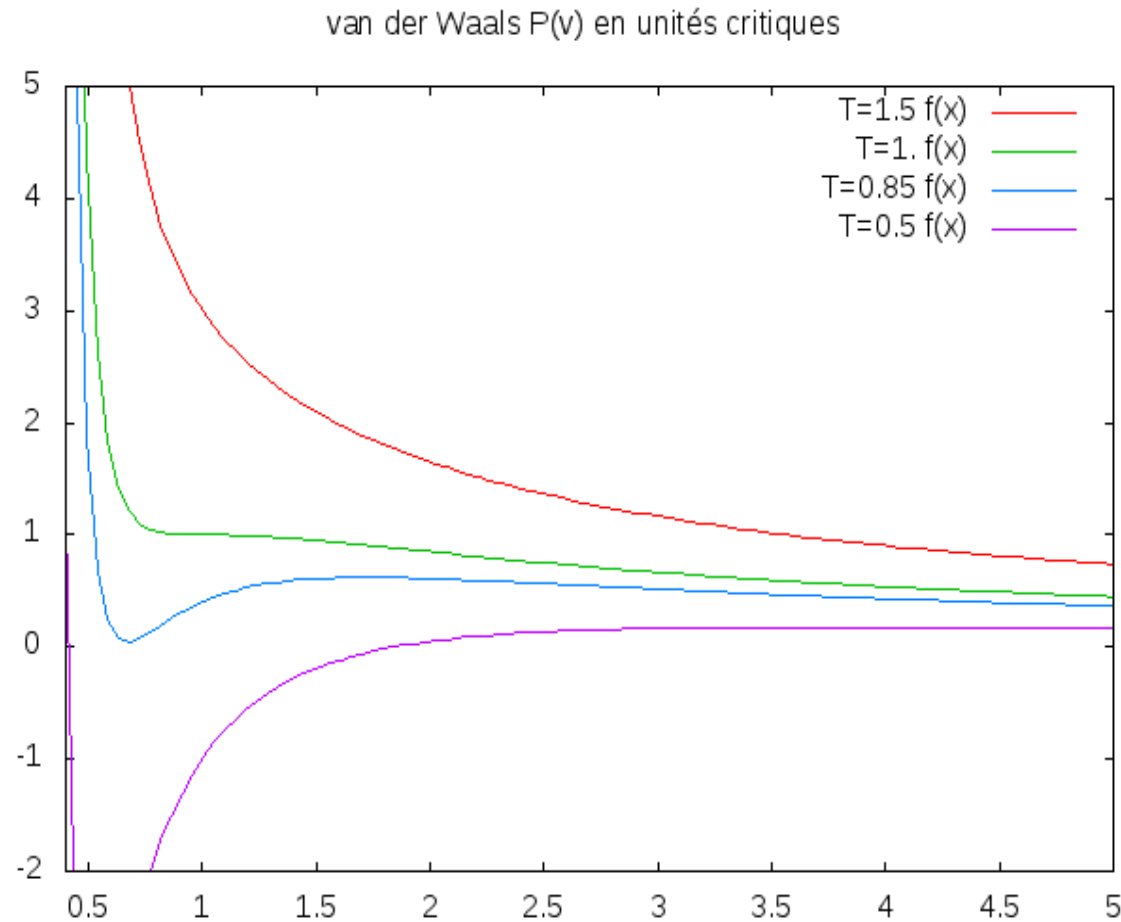


figure 1

$$P(x) = \frac{r T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

$$a = 3.0 \quad r = 8./3. \quad b = 1/3.$$

- Détermination de l'énergie interne par la thermodynamique *

$$U(T, v) = \int^T C_v(T) dT - \frac{a}{v}$$

- Relations thermodynamiques (démonstration)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T = -P(v, T) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v = -S(v, T)$$

$$F = -RT \ln(v - b) + g(T) - \frac{a}{v}$$

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = C_v$$

- interaction entre constituants

1. attractive : $a > 0$
2. électromagnétique ! seule possible

*. $F = U - TS$: l'énergie libre et le travail $dW = -Pdv$

Les actions électromagnétiques classiques

Les équations de Maxwell

$$\operatorname{div} D = \rho \qquad D = \epsilon_0 E + \dots$$

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad B = \mu_0 (H + \dots)$$

$$\operatorname{rot} H = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

L'action sur les courants : la force de Lorentz

$$F = qE + j \wedge B \qquad \vec{j} = q \vec{v}$$

Unités internationales : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

L'énergie électromagnétique U

La densité d'énergie électromagnétique dans le "vide"

$$U = \int \omega \, d^3x \quad \omega = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})$$

Le cas de l'électrostatique

- Inter - Action de deux charges électriques (réf 11 page 43)

$$U_{12} = \int (\vec{D}_1 \vec{E}_2) \, d^3x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = q_1 V_2$$

- Equation de Laplace

$$\forall |x| \gg B \quad \Delta V(x) = 0$$

- Développement multipolaire du potentiel de Laplace
(ref 11, page 117)

$$V(x) = \epsilon_0^{-1} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$V(x) = \epsilon_0^{-1} \left(\frac{b_0}{r} Y_0^0 + \frac{b_{1m}}{r^2} Y_1^m(\theta, \phi) + \dots \right) \text{ avec } a_{lm} = 0$$

- Interactions dipolaires ($l = 1, m = 0$) : dipole $\vec{\sigma}$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{\sigma}\vec{u}) \sim \cos(\theta)$$

$$E = -grad V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{\sigma} - 3\vec{u}(\vec{\sigma}\vec{u}))$$

- Energie d'interaction de deux dipôles $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$

$$U = -\vec{\sigma}_1 \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} ((\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - 3(\vec{\sigma}_1 \vec{u})(\vec{\sigma}_2 \vec{u}))$$

- Les forces de van der Waals $\sim$ Interactions dipolaires
— de Keesom (molécules dipolaires permanentes)

$$U_{\text{Keesom}} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0 r^3)^2} \left[\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{3} \beta \right] \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

— de Debye (dipôles induits (1) $\rightarrow$ (2)) *

$$\vec{\sigma}_2 = \alpha_2 \vec{E}_1 \quad U_{\text{Debye}} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0 r^3)^2} [\sigma_1^2 \alpha_2]$$

*. dimension $\sigma = qL$ $\beta = W^{-1}$ $\alpha = \sigma^2 W^{-1}$

— de London (dipoles spontanés) :

$$U_{\text{London}} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0 r^3)^2} \left[\frac{3}{4} (h\nu) \alpha_1 \alpha_2 \right]$$

Les forces de London sont la seule action attractive intermoléculaire permettant d'expliquer la liquéfaction ou la solidification des molécules non-polaires.

Exemples de constituants non-polaires :

les gaz rares He Ne Ar Xe,

les dihalogènes F₂, Cl₂, Br₂, I₂,

les molécules diatomiques : H₂ O₂...et d'autres comme CH₄

T_{liq}	He	Ne	F ₂	Cl ₂	H ₂	O ₂	K
	4,22	27,1	85.03	239.11	20,39	90,19	

- Intensité relative des forces moléculaires

Type d'interaction	Énergie de dissociation (kcal)
covalente	400
hydrogène	12-16
ion dipole	10
de Keesom	0,5-3
de London	< 1

1 kcal par mole $\sim$ 0,05 eV par "atome"

Les forces de London : un effet quantique

référence 7

- Perturbation V dans un système à deux états d'énergie $E_0 = 0$ et $E_1 = \Delta E$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \Delta E & V \\ V^* & 0 \end{pmatrix}$$

un modèle simpliste* figures 2a et 2b

- Déplacement de l'énergie des états sous l'action de V

$$\delta E_0 = -\frac{|V|^2}{\Delta E} \quad \delta E_1 = +\frac{|V|^2}{\Delta E}$$

- Polarisation de deux atomes (réf 4 page 365 et figure 3a)

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_{2a}} - \frac{1}{r_{1b}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{ab}} \right) \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\delta r}_1 \vec{\delta r}_2}{r_{ab}^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2}{r_{ab}^3}$$

si r_{ab} est grand $V \rightarrow 0$ et les atomes sont distincts

- A distance quantique, les électrons sont indiscernables $\Rightarrow$ apparition d'une polarisation
- Si le champ "quantique" polarise deux "atomes" apolaires :

$$V \sim r^{-3} \Rightarrow U(r) = \delta E_0 \sim -r^{-6}$$

*. formule complète (réf 3 page 160)

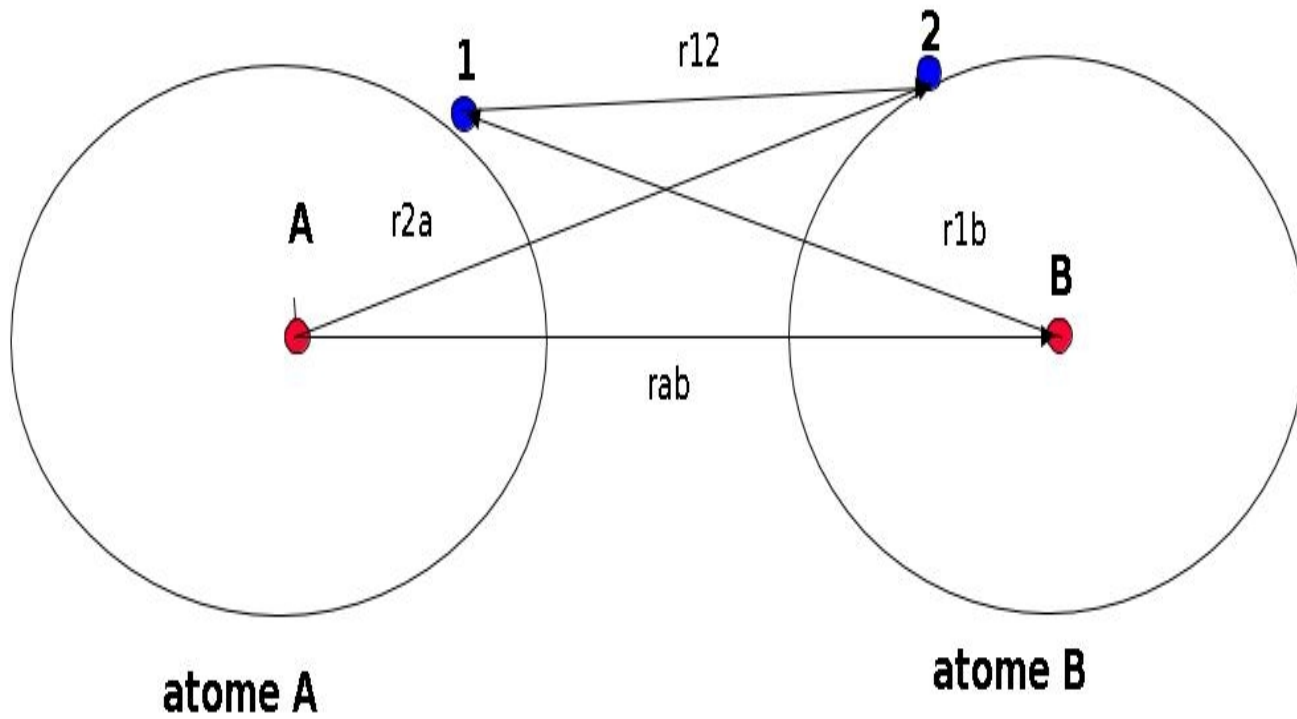


figure 2a : réf [3] page 159

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_{2a}} - \frac{1}{r_{1b}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{ab}} \right)$$

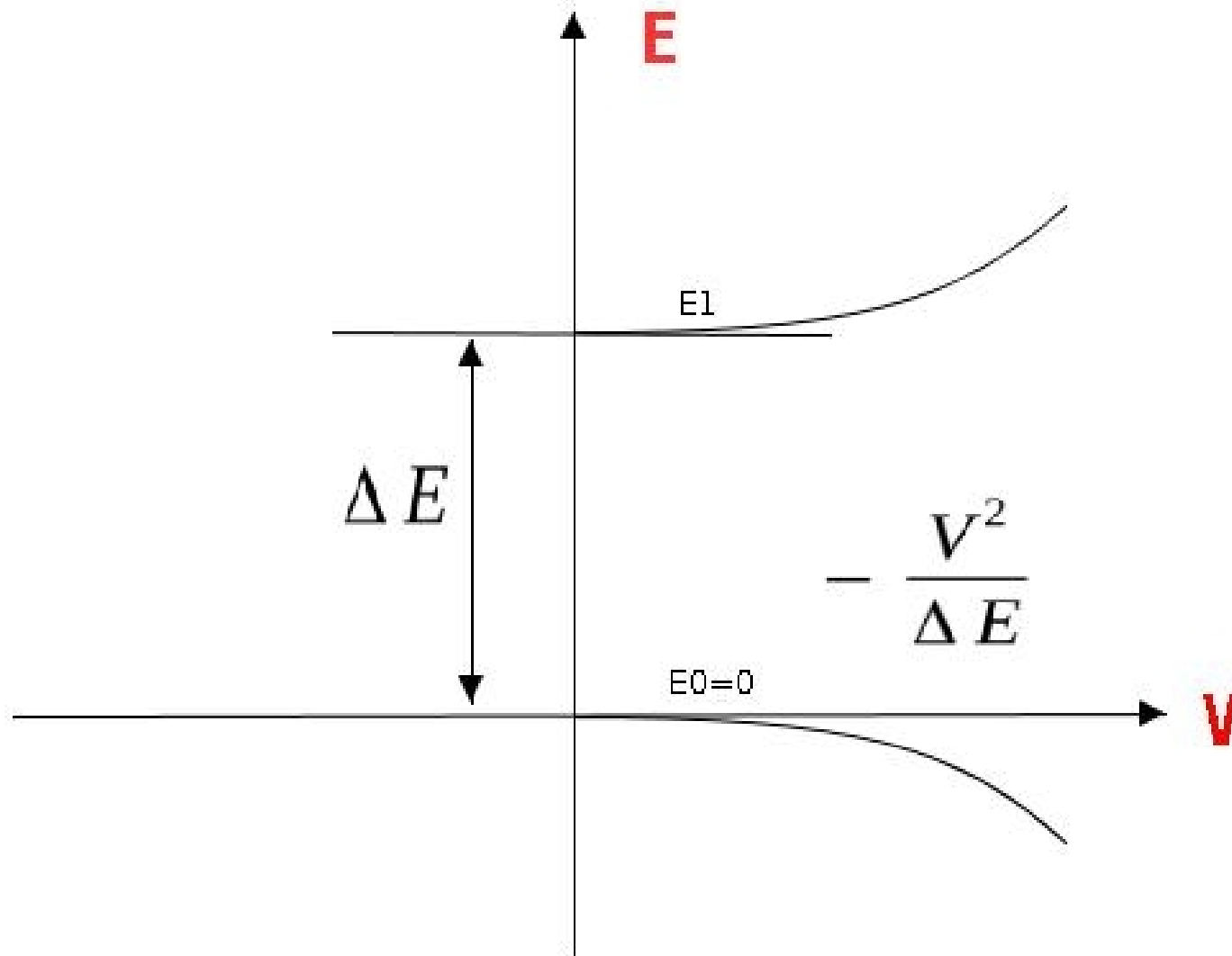
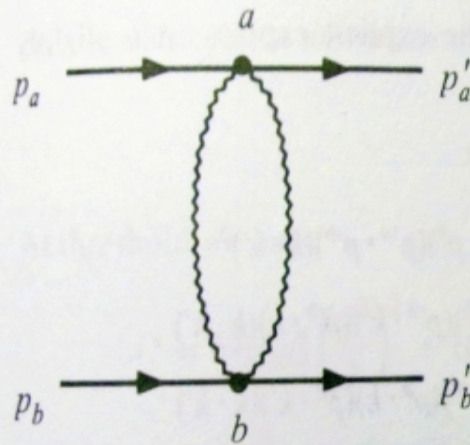


figure 2b : réf [3] page 160

E est l'énergie et V la perturbation



7-3-3 Van der Waals Forces at Large Distances

We return to the question of the large distance potential between polarizable neutral systems introduced in Chap. 3. Our derivation is modeled after the work of Feinberg and Sucher.

Figure 7-16 Interaction between neutral systems arising from electric and magnetic susceptibilities.

370 QUANTUM FIELD THEORY

where ΔE is a characteristic atomic excitation energy. Similarly, the (electric) susceptibility α for each atom is obtained by treating a perturbation $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ to second order, with the result that

$$\alpha \sim \frac{\langle e^2 r^2 \rangle}{\Delta E}$$

Altogether we find

$$V^{\text{nr}} \sim - \frac{\Delta E \alpha_a \alpha_b}{(r_{ab})^6}$$

figure 3 : réf [4] page 365

référence 9

Mathematics. — *On the attraction between two perfectly conducting plates.* By H. B. G. CASIMIR.

(Communicated at the meeting of May 29, 1948.)

In a recent paper by POLDER and CASIMIR¹⁾ it is shown that the interaction between a perfectly conducting plate and an atom or molecule with a static polarizability α is in the limit of large distances R given by

$$\delta E = -\frac{3}{8\pi} \hbar c \frac{\alpha}{R^4}$$

and that the interaction between two particles with static polarizabilities α_1 and α_2 is given in that limit by

$$\delta E = -\frac{23}{4\pi} \hbar c \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R^7}.$$

These formulae are obtained by taking the usual VAN DER WAALS-LONDON forces as a starting point and correcting for retardation effects.

In a communication to the "Colloque sur la théorie de la liaison chimique" (Paris, 12—17 April, 1948) the present author was able to show that these expressions may also be derived through studying by means of classical electrodynamics the change of electromagnetic zero point energy. In this note we shall apply the same method to the interaction between two perfectly conducting plates.

Let us consider a cubic cavity of volume L^3 bounded by perfectly conducting walls and let a perfectly conducting square plate with side L be placed in this cavity parallel to the xy face and let us compare the situation in which this plate is at a small distance a from the xy face and the situation in which it is at a very large distance, say $L/2$. In both cases the expressions $\frac{1}{2} \sum \hbar \omega$ where the summation extends over all possible resonance frequencies of the cavities are divergent and devoid of physical meaning but the *difference* between these sums in the two situations, $\frac{1}{2} (\sum \hbar \omega)_I - \frac{1}{2} (\sum \hbar \omega)_{II}$, will be shown to have a well defined value and this value will be interpreted as the interaction between the plate and the xy face.

The possible vibrations of a cavity defined by

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq z \leq a$$

have wave numbers

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{a} n_z,$$

where n_x, n_y, n_z are positive integers;

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}.$$

¹⁾ H. B. G. CASIMIR and D. POLDER, Phys. Rev., **73**, 360 (1948).



Attraction entre plaques supraconductrices

référence 4 page 145 et référence 14 (Guy Laville)

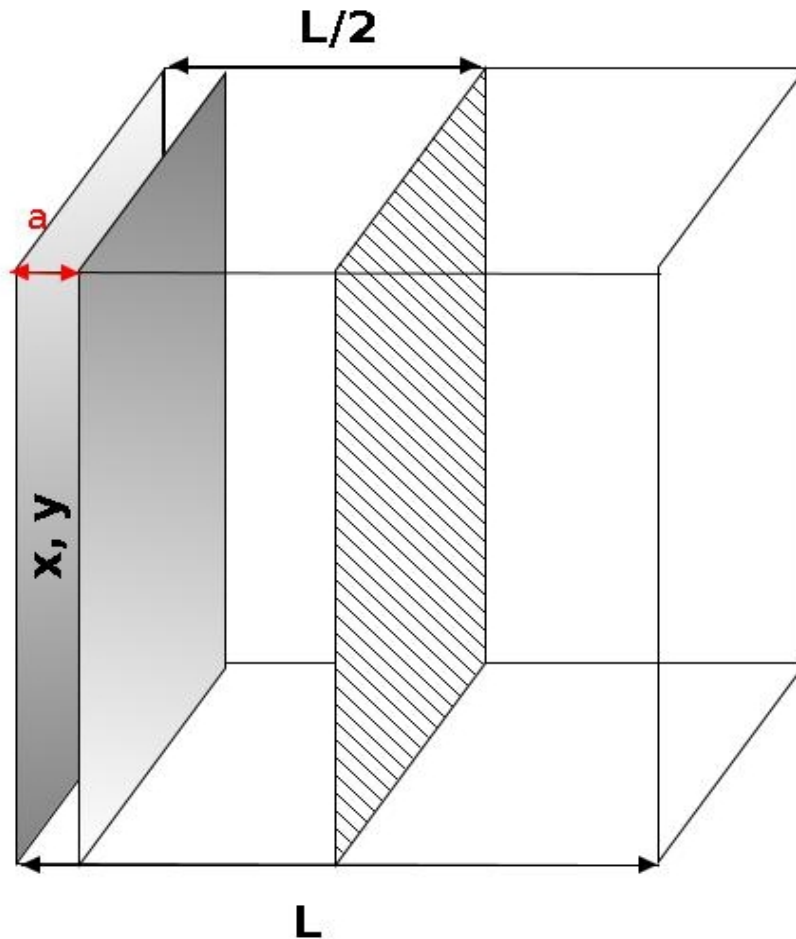


figure 4

$$\frac{U}{S} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{a^3}$$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4} \quad \text{soit } 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-2} \text{ pour } a = 1\mu\text{m}$$

~ Démonstration (Casimir & Polder) à T=0

- Définition de l'énergie du "vide" dans le volume $v = L^2 a$
 1. avec des plaques à la distance a
 2. et à T=0

$$U = \sum_{(a)} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right) - \sum_{(L)} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)$$

- Propriétés du photon

$$\epsilon = \hbar \omega \quad \omega = c \sqrt{k_{xy}^2 + k_z^2} \quad \epsilon = c p \quad m = 0$$

- Quantification des états

$$\sum_{(L)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad \sum_{(a)} = \int \frac{d^2 k_{xy} L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n \geq 0} (\dots)_{(k_z = \frac{n\pi}{a})}$$

- Extraction des dimensions physiques* : $\vec{k} = \frac{\pi}{a} \vec{x}$

$$\frac{U}{L^2} = \frac{\pi}{8} \frac{\hbar c}{a^3} \times B \text{ avec } B = \int \sum_{n \geq 0} \sqrt{\vec{x}^2 + n^2} d^2 x - \int_{z > 0} \sqrt{\vec{x}^2 + z^2} d^2 x dz$$

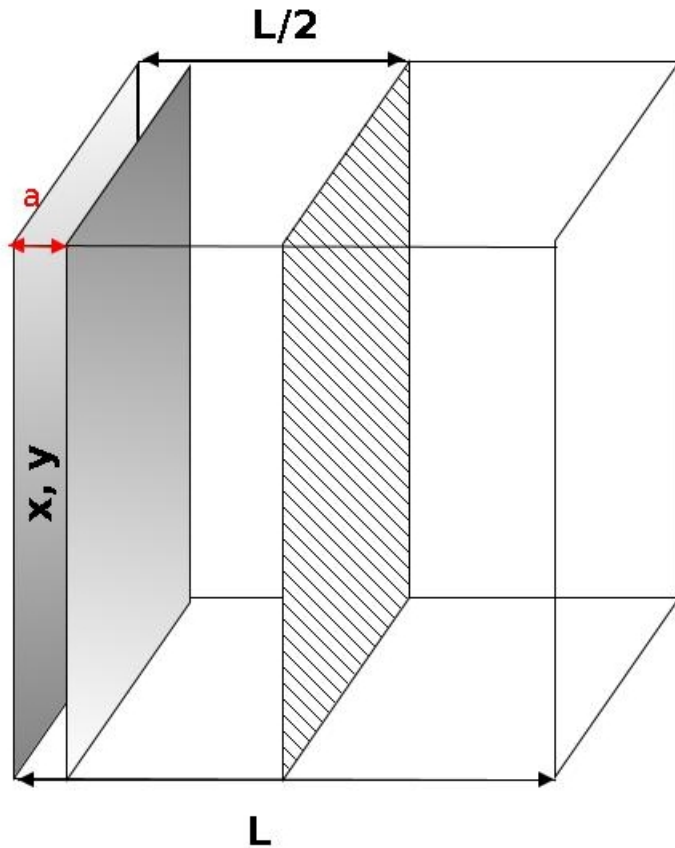
- Pour plus de détails voir annexe 1

*. $\hbar c = W L$ donc $\frac{U}{L^2}$ est $W L^{-2}$

références

- 0 <http://www.astrosurf.com/luxorion/quantique-particules3.htm>
- 1 I. Bazarov , *Thermodynamique* , Ed MIR 1970
- 2 L. Landau & E. Lifchitz , *Physique statistique* , Ed MIR 1967
- 3 L. Landau & E. Lifchitz *Mécanique quantique*, Ed MIR 1966
- 4 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory*, Macgraw Hill 1980
- 5 http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_van_der_Waals
- 6 http://en.m.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_force
- 7 http://en.wikipedia.org/wiki/London_dispersion_force
- 8 http://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_d'état_de_van_der_Waals
- 9 H. Casimir *On the attraction between two perfectly conducting plates ?*
- 10 L. Couture & R. Zitoun *physique statistique* , Ellipse 1992
- 11 J.D. Jackson *Electrodynamique classique* , Dunod 2001
- 12 L. Fonda & G. Ghirardi *Symmetry principles in Q.. Physics* , Dekker 1970
- 13 http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_chromodynamics
- 14 <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/laville/eml.pdf>

Appendice 1 : Calcul de l'effet Casimir (partie physique)



— Hypothèses

1. Considérons un condensateur parfait (supra-conducteur) constitué de deux plaques carrées de côté L , très proches, à la distance a l'une de l'autre et à $T = 0K$.

$$a \ll L$$

Les deux conducteurs sont neutres à l'échelle macroscopiques.

2. L'effet Casimir est le résultat de l'indiscernabilité des électrons de conduction aux distances quantiques ; en effet les fonctions d'onde des électrons de conduction ne sont pas localisées à l'intérieur des conducteurs mais s'étendent au delà sur l'un ou l'autre à travers le gap de largeur a (effet tunnel), ceci induit des configurations où un ou des électrons de conduction quittent le conducteur A et se retrouvent sur le conducteur B ; A se charge alors positivement quand B se charge négativement ou réciproquement . Cette dissymétrie électrique induit toujours une "force attractive" : c'est l'effet Casimir qui découle évidemment de la MQ.
3. Le calcul de l'effet passe par la détermination de l'énergie du vide électromagnétique dans le gap de largeur a quand L est infini ou très grand pour qu'on puisse négliger les effets de bord.

- L'analyse physique (qui reste à développer) nous conduit à la question mathématique suivante

$\mathcal{E}$ est l'énergie "renormalisée" par unité de surface

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty k \, dk \times$$

$$\left(\sum_{-\infty}^\infty \sqrt{k^2 + \left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} - \int_{-\infty}^\infty \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}x\right)^2} \, dx \right)$$

- Soit avec $k = \frac{\pi}{a} y$

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{4 a^3} \int_0^\infty y \, dy \times$$

$$\left(\sum_{-\infty}^\infty \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^\infty \sqrt{y^2 + x^2} \, dx \right)$$

- Réf 4 page 141 :

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{a^3} \frac{B_4}{4!} \text{ avec } B_4 = -\frac{1}{30}$$

Justification par les mathématiques :

Guy Laville séminaire du 19 mai 2015 ou

[http ://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/laville/eml.pdf](http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/laville/eml.pdf)

- La force (attractive) par unité de surface est donc

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{\hbar c \pi^2}{a^4} \frac{B_4}{8} = -\frac{\hbar c \pi^2}{a^4} \frac{1}{240}$$

$\hbar c = 3 \cdot 10^{-26} \text{ J.m}$ pour $a \sim 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ on a $\mathcal{F} = 1 \text{ N/m}^2$