

Université de Caen

LMNO

Relativité générale

C. LONGUEMARE

Applications 2

version 3.0

18 mars 2014

Plan

1. Les trajectoires dans le champ central de la gravitation générale
 - Les paramètres
 - Equations des géodésiques
 - Les trajectoires quasi-circulaires
 - Dérive du périhélie de Mercure

$$\delta\theta = 6\pi \frac{Gm'}{a(1-e^2)c^2} = +0,1'' \quad \text{par révolution} \quad m' = m_{\odot}$$

2. La dynamique de la lumière
 - Redshift gravitationnel

$$m_{\gamma} = \frac{h\nu}{c^2}$$

- Déviation de la lumière par un champ gravitationnel, le cas du soleil $\Delta\theta_{\odot}$

$$\Delta\theta = -4 \frac{Gm'}{c^2 b} \quad b = R_{\odot} \Rightarrow \Delta\theta_{\odot} = -1,75''$$

- Redshift cosmologique
3. Appendices
 - Calcul de la déviation

Les paramètres

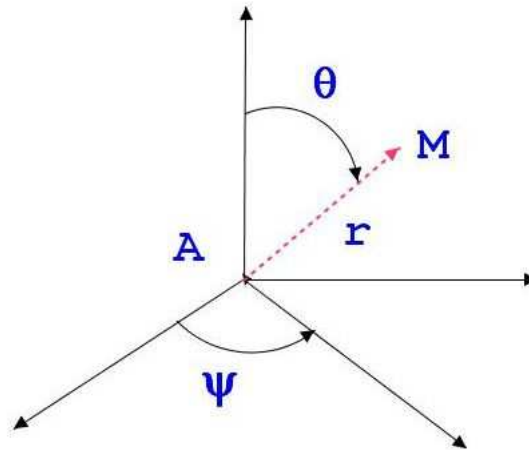


figure 1

- les paramètres du point matériel m dans de champ de m' centré à l'origine

$$q^0 = ct \quad q^1 = r \quad q^2 = \theta \quad q^3 = \psi \quad t \text{ est le temps à } \infty$$

- La métrique de l'espace :

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2}\right)(cdt)^2 - \left(1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2)$$

- l'énergie potentielle classique par unité de masse est

$$\phi = -\frac{Gm'}{r} \quad \text{dimension physique } v^2$$

- Recherche des solutions (planes) telles que

$$\psi = \psi_0$$

Rappel de Relativité générale*

Conclusions

- α "mesure" de la correction de gravité générale (GR) et $\frac{v^2}{c^2}$ celle de relativité restreinte (RR)

pour Mercure $\alpha(r) = \frac{2\phi(r)}{c^2} = -51,2 \cdot 10^{-9} \quad \frac{v^2}{c^2} = 25,3 \cdot 10^{-9} \sim -\frac{\alpha}{2}$

- le moment cinétique $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ est une constante du mouvement

$$p_\theta/m = (r^2 \dot{\theta}) \mathcal{F}^{-1} = l \quad r \dot{\theta} = \frac{l}{r} \mathcal{F}$$

- Changement de fonction, notations et remarques : choisissons $u(\theta) = r^{-1}(\theta)$

$$\alpha = \frac{2\phi(r)}{c^2} = -\frac{2Gm'}{c^2} u = -\alpha_0 u$$

$$\dot{r} = u' l \mathcal{F} \quad r \dot{\theta} = u l \mathcal{F} \quad v^2 = (u'^2 + u^2) (l \mathcal{F})^2$$

- le facteur $\mathcal{F}$ (séminaire du 4 mars 2014)

$$\mathcal{F}^2 = 1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 \right) = 1 + \alpha - \frac{l^2}{c^2} \mathcal{F}^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha} u'^2 + u^2 \right)$$

soit

$$\mathcal{F} = (1 + \alpha)^{1/2} \left(1 + \frac{l^2}{c^2} \left(\frac{1}{1 + \alpha} u'^2 + u^2 \right) \right)^{-1/2}$$

*. Séminaire du 4 mars 2014

Rappels suite

Lagrangien et hamiltonien en fonction de $u(\theta)$

- le lagrangien

$$\mathcal{L}/m = -c^2 \mathcal{F} = -c^2(1+\alpha)^{1/2} \left(1 + \frac{l^2}{c^2} \left(\frac{1}{1+\alpha} u'^2 + u^2\right)\right)^{-1/2}$$

- l'énergie E est une constante du mouvement !

$$\mathcal{H}/m = E = c^2(1+\alpha)\mathcal{F}^{-1} = c^2(1+\alpha)^{1/2} \left(1 + \frac{l^2}{c^2} \left(\frac{1}{1+\alpha} u'^2 + u^2\right)\right)^{1/2}$$

- Equation différentielle du 1er ordre sur $u(\theta)$

$$\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - 1 = \alpha + \frac{l^2}{c^2}(u'^2 + (1+\alpha)u^2) \quad (1)$$

- Rappel $\alpha(u) = -\alpha_0 u$ avec $\alpha_0 = \frac{2Gm'}{c^2}$

$$\frac{E^2}{c^2} - c^2 = -2Gm' u + l^2(u'^2 + u^2 - \frac{2Gm'}{c^2} u^3) \quad (2)$$

- En fonction des paramètres E et l les lois de conservation déterminent la trajectoire : $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$, donc :

la donnée initiale (position ,vitesse) détermine la trajectoire

- Equation à l'ordre 0 en c^{-2}

$$E - c^2 = l^2(u'^2 + u^2) - Gm' u \quad \left(-\frac{Gm'l^2}{c^2} u^3\right)$$

- conséquence : en dérivant l'équation complète 1 ou 2, avec $\alpha_0 = \frac{2Gm'}{c^2}$

$$0 = -\alpha_0 + \frac{l^2}{c^2}(2u'' + 2u - 3\alpha_0 u^2)$$

En clair (sans approximation) on déduit (conséquence) l'"équation du mouvement" du 2ieme ordre en $u(\theta)$

$$0 = u'' + u - \frac{Gm'}{l^2} - 3\frac{Gm'}{c^2}u^2$$

qui correspond au renforcement de la force de gravitation

$$Gm' \rightarrow Gm'(1 + \frac{3l^2}{c^2 r^2}) \quad \delta\phi = -\frac{Gm'l^2}{c^2 r^3}$$

référence Lawden Elliptic functions and applications (Springer 1989)

Mouvement par les fonctions elliptiques page 128

Trajectoires quasi-circulaires

- Nous recherchons les solutions sous la forme (chgt de fonction)

$$u = p^{-1}(1 + e\eta(\theta)) \quad \text{avec } p^{-1} = \frac{Gm'}{l^2}$$

avec p^{-1} est l'inverse du paramètre de l'ellipse et $e \ll 1$ son excentricité.

$$0 = \eta'' + \eta - 3 \frac{Gm'}{c^2} \frac{1}{p} (1 + e \eta(\theta))^2$$

- au premier ordre en e et en redéfinissant $\eta \rightarrow \eta + 3 \frac{Gm'}{c^2} \frac{1}{p}$ on obtient :

$$\eta'' = -\Omega^2 \eta \quad \Omega = \sqrt{1 - 6 \frac{Gm'}{p c^2}} \sim 1 - 3 \frac{Gm'}{p c^2}$$

- on choisit le mouvement tel que $\eta = \cos(\Omega\theta)$
le périhélie est atteint pour $\Omega\theta = n 2\pi$ donc

$$\delta\theta = (2\pi) 3 \frac{Gm'}{p c^2} \quad p = a(1 - e^2)$$

— La dérive du périhélie de Mercure

Application numérique :

$$G \quad 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$c \quad 300,0 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

$$m'(\text{soleil}) \quad 2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$a(\text{mercure}) \quad 57,9 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$e(\text{mercure}) \quad 0,206$$

$$T(\text{mercure}) \quad 0,241 \text{ y}$$

$$\alpha = -2 \frac{Gm'}{pc^2} = -53,5 \cdot 10^{-9}$$

$$\delta\theta = (6\pi) \frac{Gm'}{a(1-e^2) c^2} = +0,1'' \quad \text{par révolution}$$

soit 43,0'' par siècle

Expérimentalement on mesure 43,1''.

Redshift gravitationnel (réf [2])

- Variation des fréquences dans un champ gravitationnel ;
 τ est le temps propre de l'observateur

$$\nu = \frac{N}{\delta\tau} \quad d\tau = \sqrt{(1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2})} dt \quad \nu_\infty = \nu \sqrt{(1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2})}$$

alors $\phi(r) < 0 \Rightarrow \nu \geq \nu_\infty$

- La "masse gravitationnelle" du photon est donc

$$m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2} \quad \text{car} \quad h\nu_\infty = h\nu + m_\gamma \phi(r) + \dots \quad (3)$$

- Variation des fréquences dans un référentiel en mvt

$$d\tau = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})} dt \quad \nu_0 = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \nu \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

- Application au GPS * $c^{-1} = 3 \text{ ns/m}$

$$\text{traj. cercle ou th. viriel} \Rightarrow \phi(r) \sim -v^2 \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-9}$$

*. [http ://www.aapt.org/doorway/tgrutalks/Ashby/AshbyTalk3of6.htm](http://www.aapt.org/doorway/tgrutalks/Ashby/AshbyTalk3of6.htm)

Déviaton d'un photon relativiste par un champ gravitationnel

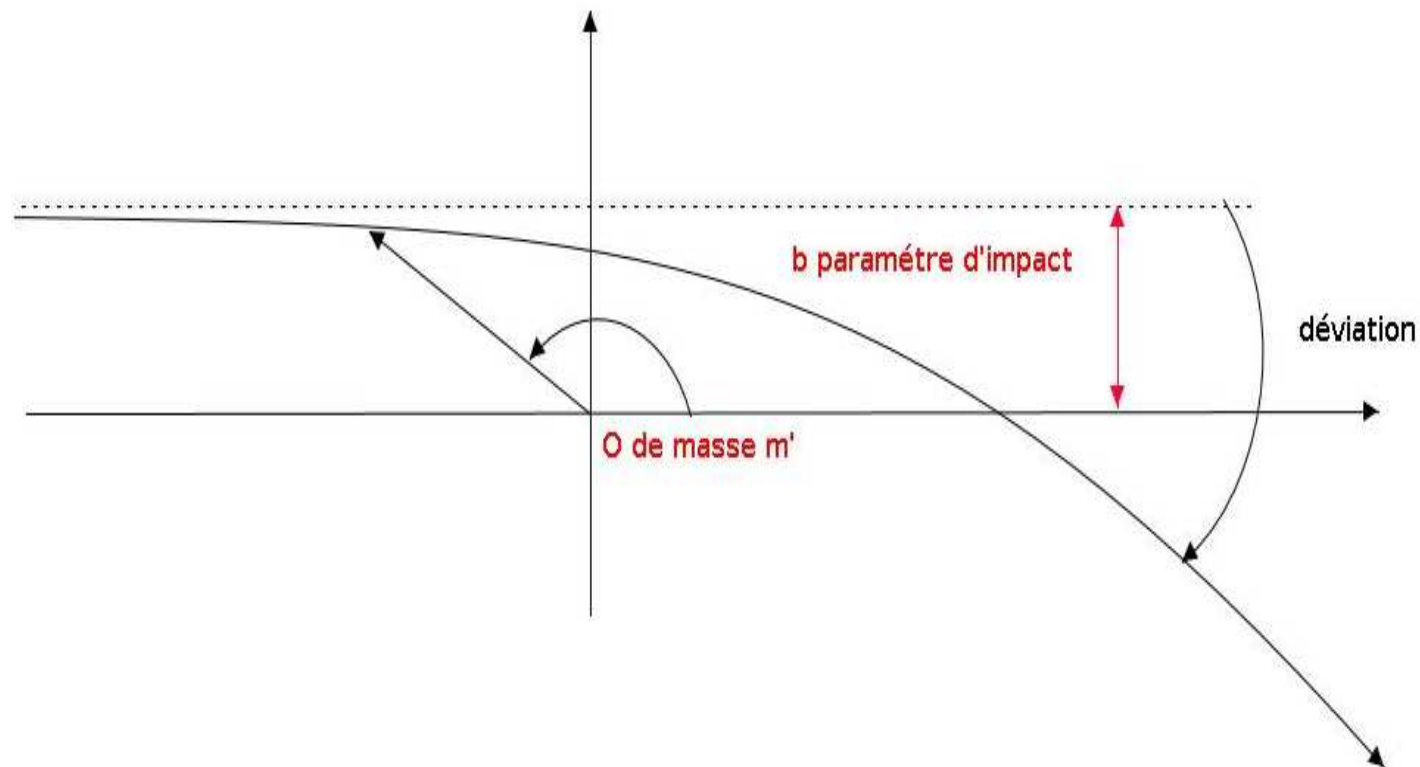


figure 2
Déviaton des photons

- Le ds^2 ne dépend pas de la masse incidente (principe d'inertie), on peut faire $m_\gamma \rightarrow 0$!

$$\left(\frac{E^2}{m_\gamma c^2} - m_\gamma c^2\right) = -2 Gm' m_\gamma u + \frac{l^2}{m_\gamma} (u'^2 + u^2 - \frac{2 Gm'}{c^2} u^3)$$

$$0 = u'' + u - \frac{Gm' m_\gamma^2}{l^2} - 3 \frac{Gm'}{c^2} u^2$$

- **Démonstration 1** : Limite ultra relativiste pour un photon de masse négligeable

$$E \rightarrow E_\gamma \quad l = m_\gamma v_\infty b = \frac{E_\gamma}{c} b \quad b \text{ est le paramètre d'impact}$$

$$E_\gamma^2 = E_\gamma^2 b^2 (u'^2 + u^2 - \frac{2 Gm'}{c^2} u^3)$$

En divisant par E_γ^2 , en posant :

$$\alpha_0 = \frac{2 Gm'}{c^2 b} \quad x(\theta) = bu(\theta)$$

$$(x'^2 + x^2) = 1 + \alpha_0 x^3 \quad (4)$$

Conséquence

$$(x'' + x) = 3 \frac{\alpha_0}{2} x^2 \quad (5)$$

— **Démonstration 2** : la trajectoire est telle que $ds^2 = 0$

$$ds^2 = (1 + \alpha)(c dt)^2 - (1 + \alpha)^{-1}dr^2 - (rd\theta)^2 = 0 \quad \text{soit}$$

$$(1 + \alpha)^2 c^2 = (\dot{r})^2 + (1 + \alpha)(r\dot{\theta})^2$$

Nous avons vu précédemment que :

$$(\dot{r}) = u' l \mathcal{F} \quad (r\dot{\theta}) = u l \mathcal{F} \quad l = \frac{E_\gamma}{c} b \quad E_\gamma = (1 + \alpha) \mathcal{F}^{-1}$$

Après quelques transformations algébriques nous obtenons

$$(1 + \alpha)^2 c^2 \mathcal{F}^{-2} = l^2 ((u')^2 + (1 + \alpha)(u)^2)$$

Enfin, avec $x = b u$ $\alpha = -\alpha_0 x$ l'équation devient

$$1 = (x'^2 + x^2 - \alpha_0 x^3)$$

- pour un photon massif dans un champ coulombien l'équation s'écrirait :

$$(x'^2 + x^2) = 1 + \alpha_0 x \quad \Rightarrow \Delta\theta = -\alpha_0 \quad (6)$$

- La solution pour la diffusion coulombienne est de la forme

$$x = (a + e \sin(\theta + \phi_0)) \text{ avec } e \sin(\phi_0) = 1$$

- Formule de Rutherford pour la gravitation :

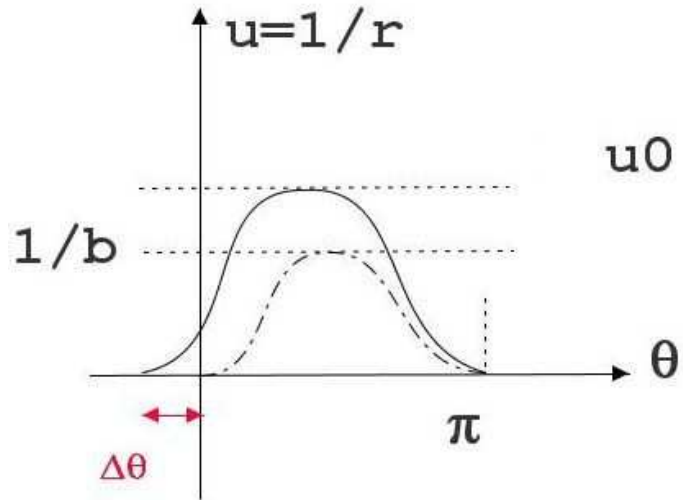
$$\text{tg}(\phi_0) = \frac{\alpha_0}{2} = + \frac{Gm'}{c^2 b}$$

- et la déviation en fonction de b

$$\Delta\theta = -2\phi_0 \sim -\alpha_0 = -\frac{2 Gm'}{c^2 b}$$

— Calcul de la déviation : voir l'appendice 1.

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm(1 - x^2 + \alpha_0 x^3)^{1/2} \quad (7)$$



— Déviation des rayons lumineux par la gravitation solaire : *
Equation 7

G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
c	$300,0 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$
$m'(\text{soleil})$	$2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
$R(\text{soleil})$	$696, \cdot 10^6 \text{ m}$

Pour $b = R$

$$\alpha_0 = 2 \frac{Gm'}{c^2 R} = 4,26 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \Delta\theta = -2\alpha_0 = -1,75''$$

*. Christian Magnan : <http://www.lacosmo.com/DeviationLumiere/>

Redshift cosmologique un exemple

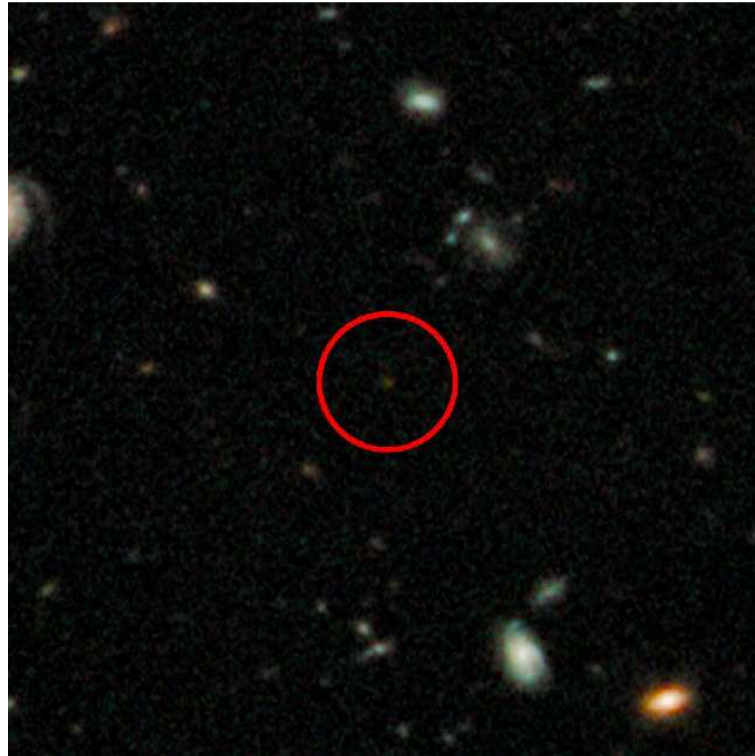


figure 4

UDFy-38135539 at a redshift of $z=8.6$ (date 600 millions d'années)

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = z \text{ ou } \lambda = (1 + z) \lambda_0$$

Redshift cosmologique

- Effet Doppler relativiste

$$h\nu = h\nu_0 \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad 1 + z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \sim 1 + \beta \quad (8)$$

- Expansion cosmologique : $\Lambda(t)$ est le facteur d'échelle

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \Lambda(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

- Le décalage vers le rouge dû à l'expansion de l'Univers s'écrit : $\Lambda(t_0)$ est le facteur d'échelle à l'époque où l'objet a émis la lumière qui nous parvient et $\Lambda(t)$ la valeur actuelle du facteur d'échelle.

$$1 + z = \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t_0)}$$

- Relations entre les deux interprétations

$$z = \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} = h(t)\Delta t = h \frac{l}{c} = \frac{v}{c} = \beta$$

avec la fonction de Hubble $h(t) = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$

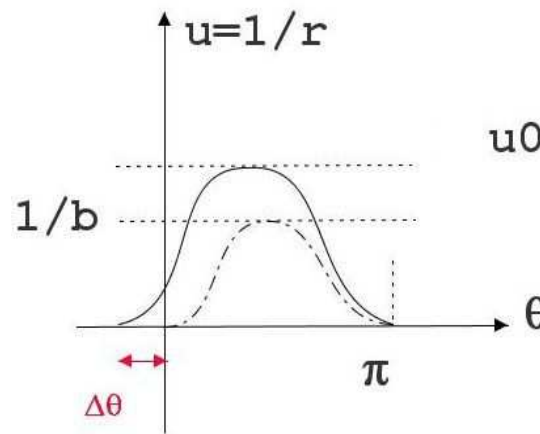
références

- 0 L. Landau & E. Lifchitz , *Mécanique* , Ed MIR 1969
- 1 L. Landau & E. Lifchitz , *Théorie des champs* , Ed MIR 1970
- 2 R. Feynman , *Leçons sur la gravitation* , Ed Odile Jacob 2001
- 3 C. Misner & al , *Gravitation* , Ed W.H. Freeman & Co 1973
- 4 C.D. Walecka , *Introduction to general relativity* , Ed World Scientific 2007
- 6 C. Nash & al , *Topology and geometry for physicists* , Ed Dover 2011
- 7 K.L. Wardle , *Differential geometry* , Ed Dover 2008
- 8 D.F. Lawden , *Elliptic functions and applications* , Ed Springer 1989
- 9 - , <http://scienceworld.wolfram.com/physics/> , www
- 10 - , http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations/ , www

Appendice 1 : Déviation des rayons lumineux

— Calcul de la déviation

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + \frac{2Gm'}{c^2} u^3 \right)^{1/2}$$



— formule générale et changement de variable $x = b u$

$$\pi - \Delta\theta = 2 \int_0^{x_0} (1 - x^2 + \alpha_0 x^3)^{-1/2} dx \quad \text{avec } \alpha_0 = \frac{2Gm'}{c^2 b}$$

x_0 est solution de $1 - x_0^2 + \alpha_0 x_0^3 = 0$ correspond au maximum de u (minimum de r)

— cas où la gravitation est nulle

$$\int d\theta = \pi - \Delta\theta = 2 \int_0^1 (1 - x^2)^{-1/2} dx = \pi \Rightarrow \Delta\theta = 0$$

— cas de la gravitation classique (photon massif)

$$\int d\theta = \pi - \Delta\theta = 2 \int_0^{x_0} (1 - x^2 + \alpha_0 x)^{-1/2} dx \Rightarrow \Delta\theta = -\alpha_0$$

— cas de la gravitation générale $x = x_0 \sin \beta$

$$\pi - \Delta\theta = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \beta + \alpha_0 x_0 (\sin^3 \beta - 1))^{-1/2} \cos \beta d\beta$$

$$-\Delta\theta = \alpha_0 x_0 \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 \beta + \sin \beta + 1)}{(1 + \sin \beta)} d\beta + \dots$$

soit au premier ordre en α_0 et $x_0 \sim 1$ à l'ordre 0.

$$-\Delta\theta = \alpha_0 x_0 \int_0^{\pi/2} \left(\sin \beta + \frac{1}{1 + \sin \beta} \right) d\beta + \dots \Rightarrow \Delta\theta \sim -2 \alpha_0$$

Calcul des primitives avec mathematica ? *

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin \beta + \frac{1}{1 + \sin \beta} \right) d\beta = \left[-\cos(\beta) + \frac{2}{1 + \cot g(\beta/2)} \right]_0^{\pi/2} = 2$$

*. <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>

Déviation d'un photon relativiste par un champ gravitationnel

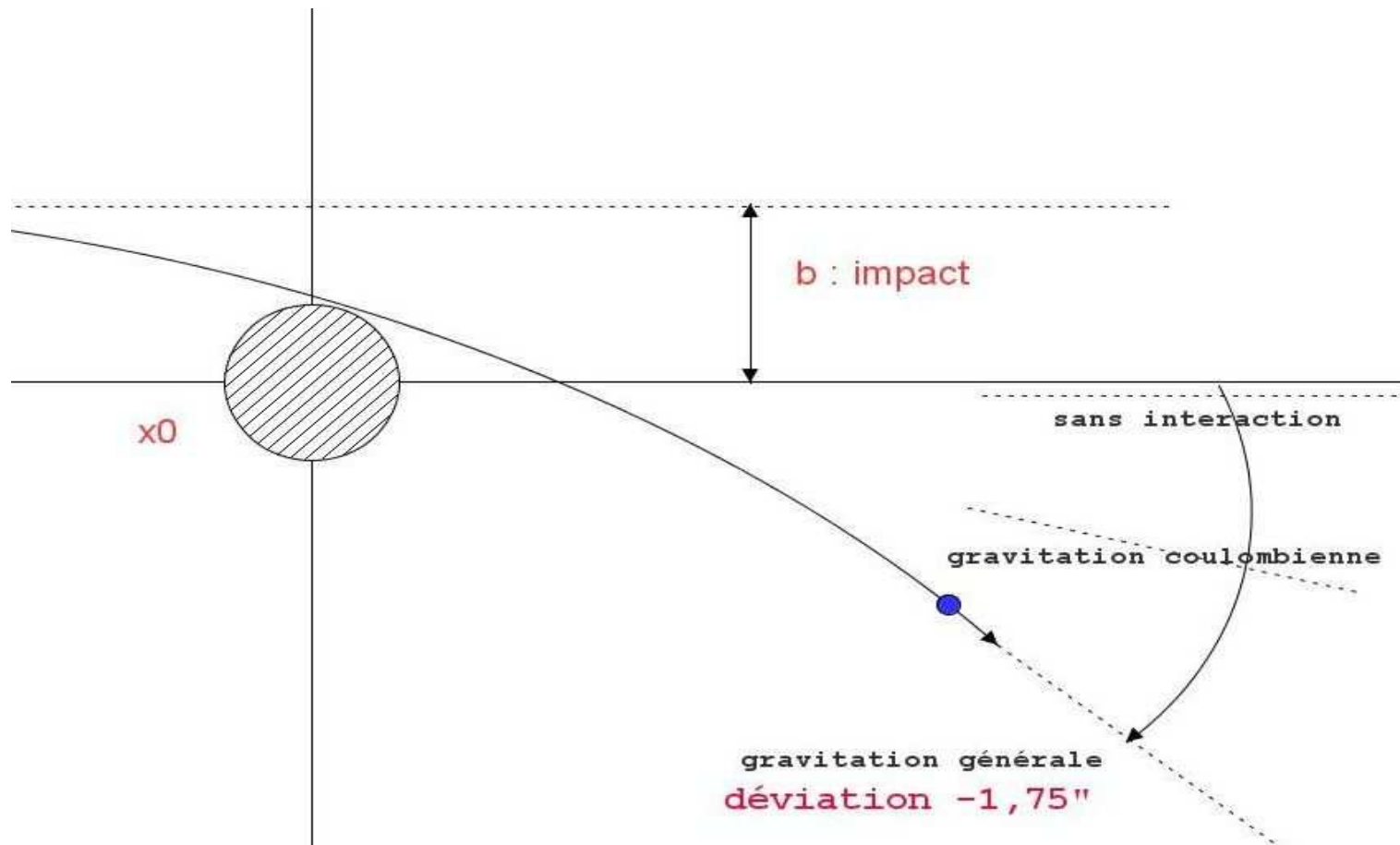


figure 6

Déviaton des photons par le soleil en incidence rasante : $b = R_{\odot}$