

Université de Caen

LMNO

Relativité générale

C. LONGUEMARE

Applications

version 2.0

4 mars 2014

Plan

1. Rappels de dynamique classique
 - La force de Coulomb
 - Le principe de moindre action : lagrangien , hamiltonien etc..
 - Mouvement d'un point dans le champ coulombien
2. Dynamique en relativité restreinte
3. Relativité générale
 - La métrique de Schwarzschild
 - La moindre action et le lagrangien
 - La dynamique dans la gravité relativiste
 - Les corrections de GR
4. Appendices
 - La métrique de Schwarzschild

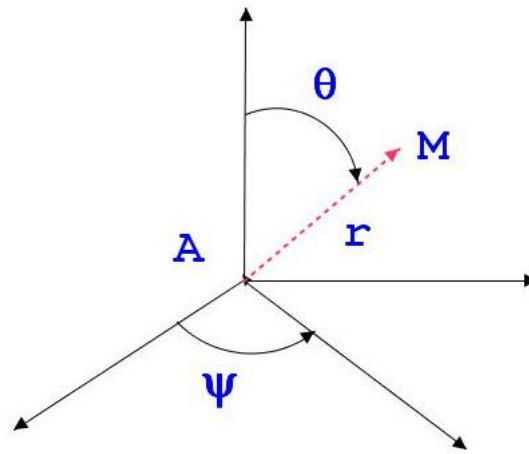


figure 1

- Le potentiel gravitationnel

$$\Delta\phi = 4\pi G \rho(\vec{x}) \quad \text{si} \quad \rho = m' \delta(\vec{x}) \Rightarrow \phi = -\frac{Gm'}{r}$$

- La force gravitationnelle

$$\vec{F} = -g \vec{rad} (m \phi) = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = r^{-1} \vec{x}$$

- Référentiel de Copernic est galiléen : Loi de Newton

$$\vec{F}/m = \vec{A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u} + \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \vec{u}_\theta = -G \frac{m'}{r^2} \vec{u}$$

- Principe de moindre action $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \mathcal{L}(x, v) dt = \int_1^2 -\mathcal{H} dt + p dx$$

minimisation : équation de Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

- Mouvement non-relativiste contraint par une énergie potentielle

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - m\phi(x) \quad \mathcal{H} = \sum v p - \mathcal{L} \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}$$

- en coordonnées sphériques (r, θ, ψ) et pour la gravitation

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\psi}^2 - \phi(r))$$

$$p_r = m \dot{r} \quad p_\theta = mr^2 \dot{\theta} \quad p_\psi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}$$

- Equations de Lagrange-Euler

$$\dot{p}_r/m = r \dot{\theta}^2 + mr \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 - \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta/m = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2$$

$$\dot{p}_\psi = 0 \text{ choix du référentiel tel que } \psi = cte \quad \dot{\psi} = 0$$

- Les constantes du mouvement

$$\psi = cte \quad p_\theta/m = l = r^2 \dot{\theta} \quad H/m = E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2r^2} + \phi(r)$$

- En passant à la variable $u = r^{-1}$ on construit l'équation sur u

$$\text{avec} \quad u' = \frac{du}{d\theta} \quad r\dot{\theta} = l u \quad \dot{r} = -l u'$$

$$E = l^2 \left(\frac{1}{2} (u'^2 + u^2) - \frac{Gm'}{l^2} u \right)$$

- Les solutions $u = A \cos \theta + B = p^{-1} (1 + e \cos \theta)$

$$B = p^{-1} = \frac{Gm'}{l^2}$$

$$A/B = e = \sqrt{1 + 2E \left(\frac{l}{Gm'} \right)^2}$$

- Les contraintes $\forall u \quad u'^2 \geq 0$

$$E \geq -\frac{(Gm')^2}{2 l^2} \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ possible si } E \geq 0$$

- Les demi-axes de l'ellipse (cas $E < 0$) $a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

- Approximation $e \ll 1 \quad r = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos \theta$

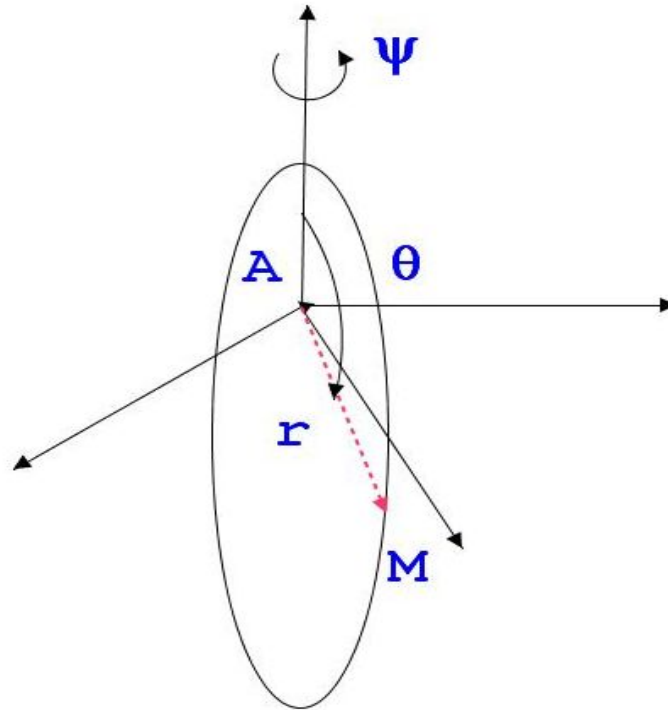


figure 2
Mouvement classique

- Les trajectoire sont des cercles si

$$E = -\frac{(Gm')^2}{2 l^2}$$

- pour mercure

$a = 57,9 \cdot 10^9 \text{ m}$	$e = 0,21$	$T = 0,241 \text{ y}$
---------------------------------	------------	-----------------------

- La métrique

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

L'intervalle de temps "propre" sur une trajectoire

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt \text{ soit } dt = \gamma d\tau$$

- Principe de moindre action $\mathcal{A}$ dans le vide

$$\mathcal{A} = -mc \int_1^2 ds \Rightarrow \mathcal{L} = -mc \frac{ds}{dt}$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = m \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m\gamma v$$

- La 4-vitesse sur une trajectoire

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) : p_\mu = m v_\mu$$

- La loi dynamique :

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu$$

Remarque : par construction $v^2 = 1$ et $p^2 = m^2$ se conserve au cours de l'accélération alors :

$$\mathcal{F}_\mu v^\mu = 0$$

Théorème de l'énergie cinétique : l'action de la force en terme d'énergie

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0 = \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{v}$$

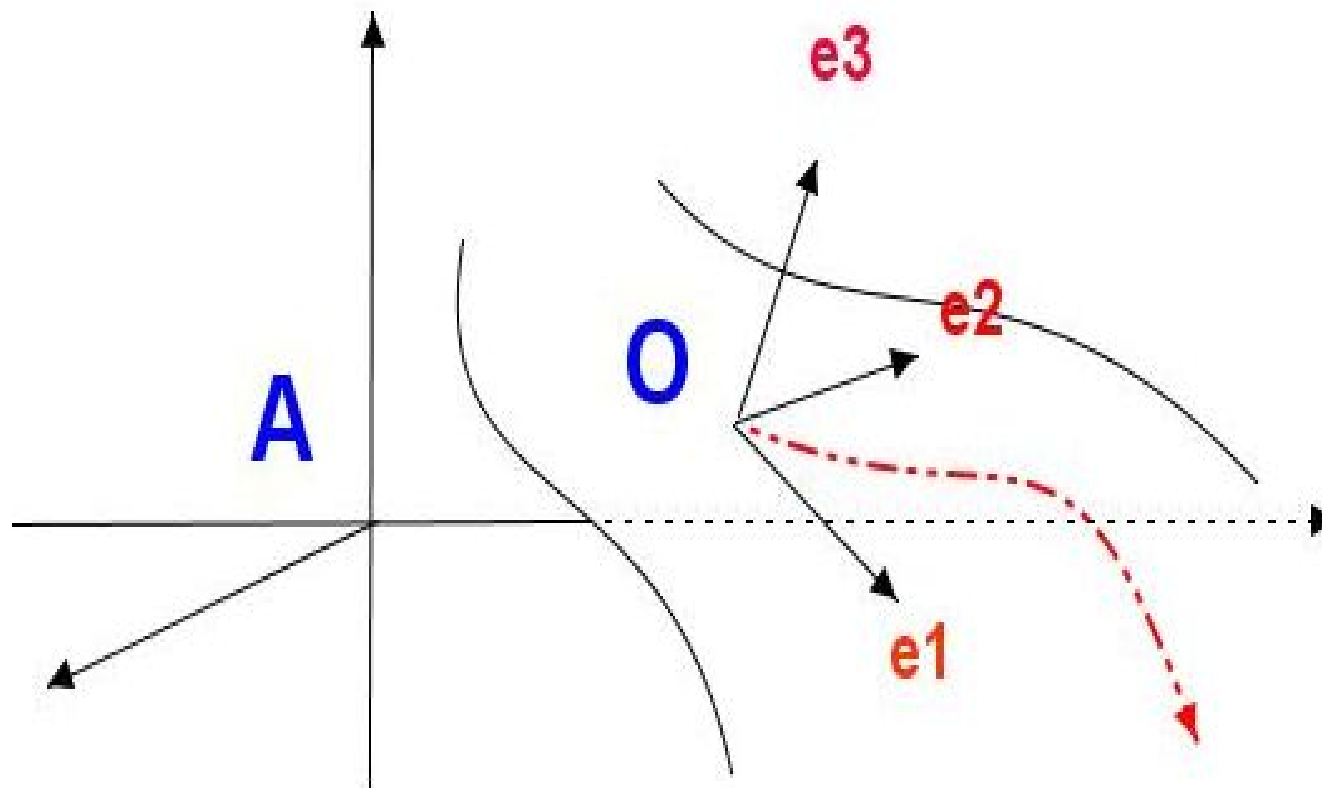


figure 3
Mouvement sur une surface

La gravitation générale

- Equation d'Einstein Référence [1]*

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - g_{\mu\nu} \Lambda = a T_{\mu\nu}$$

$$R = -a T - 4\Lambda \text{ avec } T \text{ ou } R = \mathbf{Tr}(T) \text{ (ou } R) \text{ et } \mathbf{Tr}(X) = g^{\mu\nu} X_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = a T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} (\frac{a}{2} T + \Lambda)$$

- En principe, le programme est simple mais ...

$$T_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \text{ (courbure)} \rightarrow \text{la métrique (diff 2ième ordre)} \rightarrow \text{géodésique } (t, \vec{x})$$

- Equation aux dimensions (physiques) soit à vérifier $R_{ij} \sim L^{-2}$

$$\mathcal{G} \sim \frac{L}{M^2} W \Rightarrow a \sim \frac{L}{W} \quad T_{00} \sim \frac{W}{L^3} \Rightarrow R_{00} \sim a T_{00} \sim \frac{1}{L^2} \quad \text{cqfd}$$

$$*. \quad a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} = 2,0 \cdot 10^{-43} \text{ m } J^{-1}$$

La métrique à symétrie sphérique

- La métrique : $ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2)$
Les coordonnées sont :

$$q^0 = ct; q^1 = r; q^2 = \theta; q^3 = \psi$$

$$g_{00} = e^\nu \quad g_{11} = -e^\lambda \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

avec $\lambda(r, t)$ et $\nu(r, t)$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0}$	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1}$	0	0
(01)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1}$	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$-\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	$+\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}$	0	0
(12)	0	0	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0
(13)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$
(22)	0	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0	0
(23)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$
(33)	0	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$	$-\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$	0

la symétrie sphérique

$$g_{00} = e^\nu \quad g_{11} = -e^\lambda \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	$\frac{\dot{\nu}}{2c}$	$\frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}$	0	0
(01)	$\frac{\nu'}{2}$	$\frac{\dot{\lambda}}{2c}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$\frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{(-\nu+\lambda)}$	$\frac{\lambda'}{2}$	0	0
(12)	0	0	r^{-1}	0
(13)	0	0	0	r^{-1}
(22)	0	$-r e^{-\lambda}$	0	0
(23)	0	0	0	$\cot \theta$
(33)	0	$-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$	$-\sin \theta \cos \theta$	0

avec si $f(r, t)$ $\dot{f} = c \partial_0 f$ et $f' = \partial_1 f$

- Equations d'Einstein , dans le vide autour d'une source sphérique :

$$T_{\mu\nu} = 0 = R_{\mu\nu}$$

Elles conduisent à (seulement) 3 équations sur $\nu(r, t)$ et $\lambda(r, t)$ (appendice 1)

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (\nu + \lambda)' = 0$$

$$e^{-\lambda}(\lambda' - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = r^{-1} (r(1 - e^{-\lambda}))' = 0$$

- Intégration des équations : $\lambda + \nu = f(t)$ et $(1 - e^{-\lambda}) = \frac{C}{r}$

on prend $\nu \rightarrow \nu + f(t) \Rightarrow \nu = -\lambda$ (choix de t) et

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = g_{00} = 1 - \frac{C}{r} \text{ quand } r \rightarrow \infty \quad g_{00} \rightarrow 1 - 2 \frac{Gm'}{r c^2}$$

La métrique Schwarzschild (1916) , les trous noirs de rayon r_s

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r}) c^2 dt^2 - (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)$$

Une singularité ! pour $r = r_s = \frac{2G m'}{c^2}$

soit pour $\frac{c^2}{2} = \frac{G m'}{r_s}$ (ou la vitesse de libération = c)

pour le soleil $M = M_{\odot}$ on a $r_s = 3 \text{ km}$

- L'action (la moindre action)

$$\mathcal{A} = -mc \int ds = -mc \int_1^2 \frac{ds}{dt} dt \Rightarrow \mathcal{L} = -mc \frac{ds}{dt}$$

- Le lagrangien

$$\mathcal{L} = -mc^2 \left(\left(1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2} \right) - c^{-2} \left(\frac{\dot{r}^2}{1 + 2\frac{\phi(r)}{c^2}} + r^2 \dot{\Omega}^2 \right) \right)^{1/2} = -mc^2 \mathcal{F}$$

avec

$$\dot{\Omega}^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\psi}^2 \text{ dimension de } \sim t^{-2}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Omega}^2$$

$$\phi(r) = -\frac{Gm'}{r} \text{ dimension de } \sim v^2$$

$$\alpha(r) = \frac{2\phi}{c^2} \text{ sans dimension } \leq 0$$

$$\mathcal{F} = \left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \dot{r}^2 \right) \right)^{1/2} = \left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{1 + \alpha} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} (r \dot{\Omega})^2 \right) \right)^{1/2}$$

Quantités de mouvement, variables conjuguées, selon Lagrange

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$$

– Quantités de mouvement et variables conjuguées

$$p_r = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{r}} = \frac{m^2 c^4}{\mathcal{L}} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}} + \frac{2\alpha}{1+\alpha} \dot{r} \right) = \frac{m}{\mathcal{F}} \left(\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) \dot{r} \right) = \frac{m}{\mathcal{F}} \frac{1}{1+\alpha} \dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m^2 c^4}{2\mathcal{L}} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{m}{\mathcal{F}} (r^2 \dot{\theta})$$

$$p_\psi = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\psi}} = \frac{m^2 c^4}{2\mathcal{L}} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{m}{\mathcal{F}} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi})$$

– Equations dynamiques de Lagrange Euler

$$\dot{p}_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\psi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

La rotation du référentiel permet le choix $\psi = cte \Rightarrow \dot{\psi} = 0 = p_\psi$

L'hamiltonien

- L'hamiltonien (intégrale première du mouvement)

$$\mathcal{H} = \sum p\dot{q} - \mathcal{L}$$

Construction du hamiltonien

$$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} = \frac{m}{\mathcal{F}} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \dot{r}^2 \right)$$

$$-\mathcal{L} = -\frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{L}} = \frac{m}{\mathcal{F}} \left(c^2(1+\alpha) - v^2 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \dot{r}^2 \right)$$

$$\mathcal{H} = mc^2 (1+\alpha) \mathcal{F}^{-1} \quad \mathcal{F} = \left(1+\alpha - \frac{1}{c^2} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \dot{r}^2 \right) \right)^{1/2}$$

$$p_\theta/m = (r^2 \dot{\theta}) \mathcal{F}^{-1} = l \quad \dot{r} = r' \dot{\theta} = -u' l \mathcal{F} \quad \text{avec } u = r^{-1}$$

$$\mathcal{H}/m = c^2 (1+\alpha) \mathcal{F}^{-1} = E$$

- Développement à l'ordre 0 par rapport à c^{-2}

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\mathcal{F}} (1+\alpha) = mc^2 (1+\alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + m\phi(r) + \frac{mv^2}{2}$$

- Développement à l'ordre c^{-2}
rappel :

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + n(n-1)\frac{\epsilon^2}{2} + \dots$$

pour $n = -1/2$

$$(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - (1/2)\epsilon + (3/8)\epsilon^2 + \dots$$

$$\mathcal{H} = mc^2 (1 + \alpha) \left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2}(v^2 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\dot{r}^2) \right)^{-1/2}$$

$$\epsilon = \left(\alpha - \frac{v^2}{c^2} \right) + \alpha \frac{\dot{r}^2}{c^2} = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\mathcal{H} = mc^2 (1 + \alpha) \left(1 - (1/2)\epsilon + (3/8)\epsilon^2 \right)$$

$$\mathcal{H} = mc^2 \left(1 - (1/2)(\epsilon_1 + \epsilon_2) + (3/8)\epsilon_1^2 + \alpha(1 - (1/2)\epsilon_1) \right)$$

$$\mathcal{H} = mc^2 \left(1 - (1/2)\epsilon_1 + \alpha - (1/2)\epsilon_2 + (3/8)\epsilon_1^2 - (1/2)\alpha\epsilon_1 \right)$$

$$\mathcal{H} = \left(mc^2 + m\frac{v^2}{2} + m\phi \right) + \mathcal{H}_{RG}$$

$$\mathcal{H}_{RG} = mc^2 \left(-(1/2)\epsilon_2 + (3/8)\epsilon_1^2 - (1/2)\frac{2\phi}{c^2}\epsilon_1 \right)$$

$$\mathcal{H}_{RG} = mc^2 c^{-4} \left(-\phi\dot{r}^2 - (1/2)\phi^2 - (1/2)\phi v^2 + (3/8)v^4 \right)$$

$$\mathcal{H} = mc^2 + m\frac{v^2}{2} \left(1 + (3/8)\frac{v^2}{c^2} \right) + m\phi \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{\phi}{2c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

– Le lagrangien complet

$$\mathcal{L} = -mc^2 \mathcal{F} = -mc^2 \left(\left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \dot{r}^2 \right) \right)^{1/2} \right)$$

– Développement à l'ordre 0

$$\mathcal{L}_0 = -mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -mc^2 - m\phi(r) + \frac{mv^2}{2}$$

– Développement à l'ordre c^{-2}

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + n(n-1)\frac{\epsilon^2}{2} + \dots$$

$$\mathcal{L} = -mc^2 \left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \dot{r}^2 \right) \right)^{1/2} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{RG}$$

$$\epsilon = \left(\alpha - \frac{v^2}{c^2} \right) + \alpha \frac{\dot{r}^2}{c^2} = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\mathcal{L} = -mc^2 \left(1 + (1/2)(\epsilon_1 + \epsilon_2) - (1/8)\epsilon_1^2 \right)$$

$$\mathcal{L}_{RG} = mc^2 \left(-(1/2)\epsilon_2 + (1/8)\epsilon_1^2 \right)$$

$$\mathcal{L}_{RG} = mc^2 \left(-(1/2)\alpha \frac{\dot{r}^2}{c^2} + (1/8)\left(\alpha - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \right)$$

$$\mathcal{L} = -mc^2 + m\frac{v^2}{2}\left(1 + \frac{v^2}{4c^2}\right) - m\phi\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{\phi}{2c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

Le facteur $\mathcal{F}$

- Le facteur $\mathcal{F}$ complet

introduisons $u = r^{-1}$ avec $\dot{\theta} = u^2 l \mathcal{F}$ et $\dot{r} = -u' l \mathcal{F}$

$$\mathcal{F}^2 = \left(1 + \alpha - \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\dot{r}}{c} \right)^2 - (r\dot{\theta})^2 \right)$$

$$\mathcal{F}^2 = \left(1 + \alpha - \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{l\mathcal{F}}{c} \right)^2 u'^2 - \left(\frac{l\mathcal{F}}{c} \right)^2 u^2 \right)$$

$$\mathcal{F}^2 = (1 + \alpha) \left(1 + \left(\frac{l}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{1+\alpha} u'^2 + u^2 \right) \right)^{-1}$$

- Développement à l'ordre 0

$$c^2 \mathcal{F} \sim c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad v^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{l}{r} \right)^2 = (l\mathcal{F})^2 (u'^2 + u^2)$$

- Rappels

$$\mathcal{L}/m = -c^2 \mathcal{F} \sim -c^2 - \phi + \frac{v^2}{2}$$

$$\mathcal{H}/m = c^2(1 + \alpha)\mathcal{F}^{-1} \sim +c^2 + \phi + \frac{v^2}{2}$$

- En conclusion

$$(\mathcal{H}/m) = E = c^2 \left((1 + \alpha) \left(1 + \left(\frac{l}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha} u'^2 + u^2 \right) \right) \right)^{1/2}$$

Conclusions

-

- α "mesure" de la correction de gravité générale (GR) et $\frac{v^2}{c^2}$ celle de relativité restreinte (RR)

$$\text{pour Mercure} \quad \alpha = \frac{2\phi}{c^2} = -51,2 \cdot 10^{-9} \quad \frac{v^2}{c^2} = 25,3 \cdot 10^{-9} \sim -\frac{\alpha}{2}$$

- le facteur $\mathcal{F}$ est déterminant

$$\mathcal{F} = \left(\left(1 + \alpha - \frac{1}{c^2} \left(v^2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \dot{r}^2 \right) \right) \right)^{1/2}$$

- le lagrangien

$$\mathcal{L} = -mc^2 \mathcal{F}$$

- le "moment cinétique" p_θ

$$p_\theta/m = \mathcal{F}^{-1}(r^2 \dot{\theta}) = l \quad r \dot{\theta} = \frac{l}{r} \mathcal{F} = \pm \sqrt{v^2 - \dot{r}^2}$$

- l'énergie E

$$\mathcal{H}/m = c^2 \mathcal{F}^{-1} (1 + \alpha) = E$$

- En fonction des paramètres E et l les lois de conservation déterminent $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$, donc :
la donnée initiale de la position et de la vitesse détermine la trajectoire

- Il reste à étudier ces équations dans des cas particuliers

références

- 0 L. Landau & E. Lifchitz , *Mécanique* , Ed MIR 1969
- 1 L. Landau & E. Lifchitz , *Théorie des champs* , Ed MIR 1970
- 2 R. Feynman , *Leçons sur la gravitation* , Ed Odile Jacob 2001
- 3 C. Misner & al , *Gravitation* , Ed W.H. Freeman & Co 1973
- 4 C.D. Walecka , *Introduction to general relativity* , Ed World Scientific 2007
- 5 D. Bleeker , *Gauge theory and variational principles* , Ed MIR 1969
- 6 C. Nash & al , *Topology and geometry for physicists* , Ed Dover 2011
- 7 K.L. Wardle , *Differential geometry* , Ed Dover 2008
- 8 D.F. Lawden , *Introduction to tensor calculus , relativity and cosmology* , Ed Dover 2002
- 9 - , <http://scienceworld.wolfram.com/physics/> , www
- 10 - , http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations/ , www

Appendice 1 : La métrique à symétrie sphérique de Schwarzschild

– soit $g_{00} = e^\nu$ $g_{11} = -e^\lambda$ $g_{22} = -r^2$ $g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$

$\Gamma^k_{(lj)}$	0	1	2	3
(00)	$\frac{\dot{\nu}}{2c}$	$\frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}$	0	0
(01)	$\frac{\nu'}{2}$	$\frac{\lambda}{2c}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$\frac{\lambda}{2c} e^{(-\nu+\lambda)}$	$\frac{\lambda'}{2}$	0	0
(12)	0	0	r^{-1}	0
(13)	0	0	0	r^{-1}
(22)	0	$-r e^{-\lambda}$	0	0
(23)	0	0	0	$\cot \theta$
(33)	0	$-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$	$-\sin \theta \cos \theta$	0

– avec si $f(r, t)$ $\dot{f} = c \partial_0 f$ et $f' = \partial_1 f$

- Le tenseur de Ricci

$$R_{ik} = R^\ell_{ilk} = \partial_\ell \Gamma^\ell_{ik} - \partial_k \Gamma^\ell_{i\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{i\ell} \Gamma^\ell_{ks}$$

- Les composantes non identiquement nulles du tenseur de Ricci sont les suivantes :

$$R_{01} = \sum_l \partial_\ell \Gamma^\ell_{01} - \partial_1 \Gamma^\ell_{0\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{01} - \Gamma^\ell_{0s} \Gamma^s_{1\ell}$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} \partial_\ell \Gamma^\ell_{ii} - \partial_i \Gamma^\ell_{i\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{ii} - \Gamma^\ell_{is} \Gamma^s_{i\ell} \quad i = 0, 1, 2$$

Remarque : $\forall i \quad \Gamma^\ell_{0i} \neq 0 \Rightarrow \ell = 0, 1$

- Calcul de R_{01}

$$R_{01} = \partial_0 \Gamma^0_{01} - \partial_1 \Gamma^0_{00} + (\Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{01})_{s=0,1} - (\Gamma^\ell_{0s} \Gamma^s_{1\ell})_{\ell=0,1}$$

$$R_{01} = 0 + (\Gamma^\ell_{\ell 0} \Gamma^0_{01})_{\ell=0,1} + (\Gamma^\ell_{\ell 1} \Gamma^1_{01})_{\ell=0,1..} - (\Gamma^0_{0s} \Gamma^s_{10})_{s=0,1} - (\Gamma^1_{0s} \Gamma^s_{11})_{s=0,1..}$$

$$R_{01} = 0 + (\Gamma^\ell_{\ell 1} \Gamma^1_{01})_{\ell=0,1..} - (\Gamma^1_{0s} \Gamma^s_{11})_{s=0,1}$$

$$R_{01} = \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + 2r^{-1} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2c} - \left(\frac{\nu' \dot{\lambda}}{4c} + \frac{\dot{\lambda} \lambda'}{4c} \right) = r^{-1} \frac{\dot{\lambda}}{c}$$

Dans le vide $R_{01} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0$

- Calcul de R_{00}

$$R_{00} = \sum_{l \neq 0} \partial_\ell \Gamma^\ell_{00} - \partial_0 \Gamma^\ell_{0\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{00} - \Gamma^\ell_{0s} \Gamma^s_{0\ell}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma^1_{00} - \partial_0 \Gamma^1_{01} + (\Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{00})_{s=0,1} - (\Gamma^\ell_{0s} \Gamma^s_{0\ell})_{\ell=1}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{\ell 0}^\ell \Gamma_{00}^0)_{\ell=1} + (\Gamma_{\ell 1}^\ell \Gamma_{00}^1)_{\ell \neq 0} - (\Gamma_{0s}^1 \Gamma_{01}^s)_{s=0,1}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{10}^1 \Gamma_{00}^0) + (\Gamma_{\ell 1}^\ell \Gamma_{00}^1)_{\ell=1,2,3} - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1) - (\Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0)$$

$$R_{00} = (\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda})' - \frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + (\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2}) + (\frac{\lambda'}{2} + 2r^{-1}) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - (\frac{\dot{\lambda}}{2c})^2 - (\frac{\nu'}{2})^2 e^{\nu-\lambda}$$

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} (\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'(\nu' - \lambda')}{4} + r^{-1} \nu') - \frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + (\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2}) - (\frac{\dot{\lambda}}{2c})^2$$

– Calcul de R_{11}

$$R_{11} = \sum_{\ell \neq 1} \partial_\ell \Gamma_{11}^\ell - \partial_1 \Gamma_{1\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{11}^s - \Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s$$

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - (\partial_1 \Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell=0,2,3} + (\Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{11}^s)_{s=0,1} - (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s)_{\ell \neq 1}$$

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - (\partial_1 \Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell \neq 1} + (\Gamma_{\ell 0}^\ell \Gamma_{11}^0)_{\ell=0} + (\Gamma_{\ell 1}^\ell \Gamma_{11}^1)_{\ell \neq 1} - (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s)_{\ell \neq 1}$$

$$(\Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell \neq 1} = \frac{\nu'}{2} + 2r^{-1} \quad (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s)_{\ell \neq 1} = (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1) + (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s)_{\ell=s=0,2,3}$$

$$R_{11} = \partial_0 (\frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{(\lambda-\nu)}) - (\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1})' + (\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} e^{(\lambda-\nu)}) + (\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1}) \frac{\lambda'}{2} -$$

$$- ((\frac{\nu'}{2})^2 + 2(r^{-1})^2 + (\frac{\dot{\lambda}}{2c})^2 e^{(\lambda-\nu)})$$

$$R_{11} = (\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} e^{(\lambda-\nu)}) - \frac{\nu''}{2} - (\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} e^{(\lambda-\nu)}) + (\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1}) \frac{\lambda'}{2} - ((\frac{\nu'}{2})^2 - (\frac{\dot{\lambda}}{2c})^2 e^{(\lambda-\nu)})$$

$$R_{11} = e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} + \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2 \right) - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + r^{-1}\lambda' - \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2$$

conclusion :

$$R_{11}e^{\nu-\lambda} + R_{00} = r^{-1}(\nu' + \lambda')e^{(\nu-\lambda)}$$

Dans le vide $R_{00} = R_{11} = 0 \Rightarrow \nu' + \lambda' = 0$ **et** $-\nu'' - \nu'^2 - 2r^{-1}\nu' = 0$

– Calcul de R_{22}

$$R_{22} = \sum_{l \neq 2} \partial_l \Gamma_{22}^\ell - \partial_2 \Gamma_{2l}^\ell + \Gamma_{ls}^\ell \Gamma_{22}^s - \Gamma_{2s}^\ell \Gamma_{2l}^s$$

$$R_{22} = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + (\Gamma_{l1}^\ell \Gamma_{22}^1)_{l \neq 2} - (\Gamma_{2s}^\ell \Gamma_{2l}^s)_{l \neq 2}$$

$$(\Gamma_{1l}^\ell)_{l \neq 2} = \frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \quad (\Gamma_{2s}^\ell \Gamma_{2l}^s)_{l \neq 2} = \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{l1}^\ell)_{l \neq 2} - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3)$$

$$R_{22} = (-re^{-\lambda})' + (1 + \cot^2(\theta)) + (-re^{-\lambda})\left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1}\right) - (-e^{-\lambda} + \cot^2(\theta))$$

$$R_{22} = 1 - re^{-\lambda}\left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + r^{-1}\right)$$

Dans le vide $R_{22} = 0 \Rightarrow 1 + e^{-\lambda}(r\lambda' - 1) = 1 - (re^{-\lambda})' = 0$

– Vérification de R_{33}

$$R_{33} = \sum_{\ell \neq 3} \partial_{\ell} \Gamma^{\ell}_{33} - \partial_3 \Gamma^{\ell}_{3\ell} + \Gamma^{\ell}_{\ell s} \Gamma^s_{33} - \Gamma^{\ell}_{3s} \Gamma^s_{3\ell}$$

remarquons : $\partial_3 = 0$ $\Gamma^{\ell}_{33} \Rightarrow \ell = 1, 2$ $\Gamma^{\ell}_{3s})_{\ell \neq 3} \Rightarrow s = 3$

$$R_{33} = (\partial_{\ell} \Gamma^{\ell}_{33})_{\ell=1,2} - 0 + \sum_{\ell \neq 3} (\Gamma^{\ell}_{\ell s} \Gamma^s_{33})_{s=1,2} - (\Gamma^{\ell}_{3s} \Gamma^s_{3\ell})_{s \neq 3}$$

$$(\Gamma^{\ell}_{1\ell})_{\ell \neq 3} = \frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \quad (\Gamma^{\ell}_{2\ell})_{\ell \neq 3} = 0 \quad (\Gamma^{\ell}_{3s} \Gamma^s_{3\ell})_{\ell \neq 3} = \Gamma^1_{33} \Gamma^3_{3,1} + \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23}$$

$$R_{33} = \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33} (\Gamma^{\ell}_{\ell 1})_{\ell \neq 3} + 0 - (\Gamma^1_{33} \Gamma^3_{3,1} + \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23})$$

$$R_{33} = (-r \sin^2(\theta) e^{-\lambda})' + (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) + (-r \sin^2(\theta) e^{-\lambda}) \left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \right) - (-\sin^2(\theta) e^{-\lambda} - \cos^2(\theta))$$

$$R_{33} = \sin^2(\theta) \left(1 - r e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + r^{-1} \right) \right) = \sin^2(\theta) R_{22}$$

la solution

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \nu' = -\lambda' \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{C}{r} \quad \nu'' + \nu'^2 + 2r^{-1} \nu' = 0$$

– La métrique de Schwarzschild est de la forme (si $\nu + \lambda = f(t) = 0$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \text{ si } f(t) = 0$$

$$C = r_s \text{ est le rayon de Schwarzschild} = \frac{2G M}{c^2}$$