

UNIVERSITE DE CAEN
LMNO
6 avril 2010

Physique des particules et invariance de jauge

C. LONGUEMARE

Quelques repères historiques

- | | | | |
|---------------------------------|------------------|------------|-------------|
| [1] électricité : | Coulomb - Ampère | 1827 | |
| | Faraday-Maxwell | 1861 | |
| [2] électron - photon : | JJ Thomson | 1897 | |
| | Planck | 1900 | |
| | | Rutherford | 1910 & 1919 |
| [3] proton - neutron - neutrino | Chadwick | 1932 | |
| | Pauli - Fermi | 1932 | |
| [4] positron - anti-proton | Anderson | 1936 | |
| | Segré | 1955 | |

Rayons cosmiques 500 TeV

Accélérateurs 5 TeV $TeV = 10^{12} eV$

Quantique et Relativiste

[1] quantique : $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV.s}$ $\hbar = 1$

[2] relativiste : $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ $c = 1$

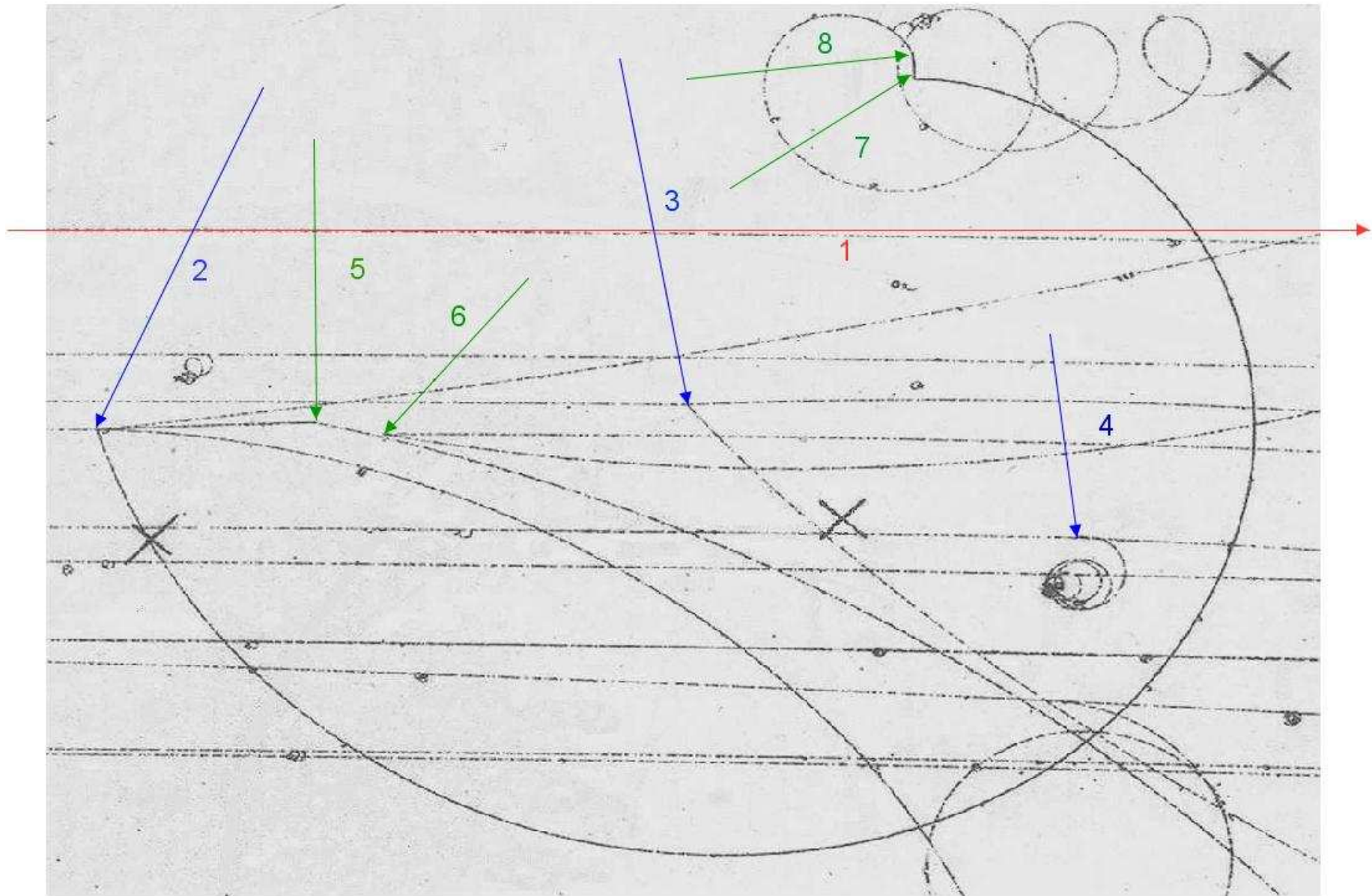
L'énergie d'une particule libre

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad \text{ou} \quad E^2 - p^2 = m^2$$

La limite non-relativiste, avec une interaction

$$E = \frac{p^2}{2m} + m + U$$

$K^- + p$ (15 GeV)



Particules et interactions

[1] les interactions :

	portée	couplage
Gravitation	∞	$\ll 10^{-20}$
Electromagnétiques	∞	10^{-2}
faibles	10^{-16} cm	10^{-2}
fortes	10^{-13} cm	1

[2] classification des particules (du modèle standard) :

	spin	EM et faible	forte
fermions	1/2	leptons et quarks	quarks
bosons	1	W, Z, γ	g
Higgs boson	0	H^0	

Electromagnétisme classique

Le mouvement classique :

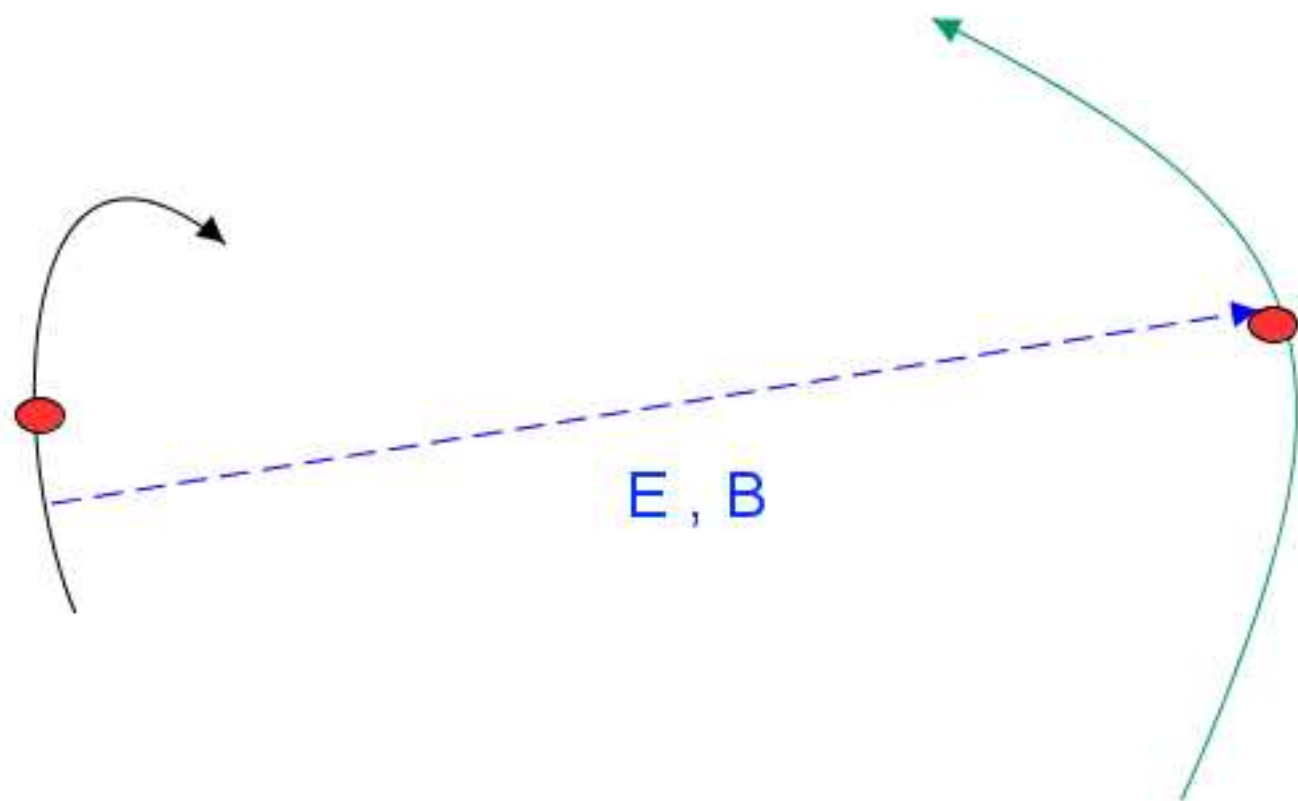
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

l'action classique :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

la force électromagnétique de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



Equations de Maxwell : rayonnement du champ E, B

$$D = \epsilon_0 E \quad \text{div}(D) = \rho$$

$$H = \mu_0^{-1} B \quad \text{rot}(H) = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$B \quad \text{div}(B) = 0 \quad B = \text{rot}(A + \text{grad}(\alpha))$$

$$E \quad \text{rot}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\text{grad}(V - \frac{\partial \alpha}{\partial t})$$

remarques

$$[1] \quad c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$$

[2] les charges sont électriques ; pour passer aux charges magnétiques ?

$$E \rightarrow B \quad B \rightarrow -E$$

Equations relativistes avec $g_{\mu\nu} = 1, -1, -1, -1$

Le potentiel électromagnétique est un champ défini dans R^4

$$A_\mu (x)$$

Le tenseur associé $\sim$ champ de force

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \leftrightarrow \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$\partial^\mu (\tilde{F}_{\mu\nu}) = 0 \quad [a]$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = (\epsilon_0)^{-1} \mathcal{J}_\nu \quad [b]$$

$$m \frac{dV_\mu}{d\tau} = (F_{\mu\nu} \cdot \mathcal{J}^\nu) = q (F_{\mu\nu} \cdot V^\nu) \quad [c]$$

L'invariance de jauge classique : $F_{\mu\nu}$ est invariant

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

Le lagrangien $\mathcal{L}_{EM}$ et le principe de moindre action

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} d^4x$$

En principe : l'action $\mathcal{A}$ est minimum sur la "trajectoire" entre un état initial et final physiquement acceptables.

La particule libre $\mathcal{L}_0 dt = -m\sqrt{1-v^2} dt = -p_\mu dx^\mu$

Le champ libre $\mathcal{L}'_0 d^4x = \{-\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu\} d^4x$

L'interaction $\mathcal{L}_{int} dt = -q A_\mu v^\mu dt = -q A_\mu dx^\mu$

Les équations de Lagrange - Euler avec $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\Rightarrow \text{Eqs de Maxwell si } m^2 = 0$$

Ce lagrangien est invariant de jauge

1 Le photon est de masse nulle

$$m = 0$$

2 Prescription pour construire l'interaction

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + q A_\mu$$

3 La transformation de jauge : $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$

– $F_{\mu\nu}$ est invariant

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

– L'action est stable

$$\delta \mathcal{A} = -q \int \partial_\mu \alpha \, dx^\mu = -q [\alpha]_i^f = \text{Stable}$$

La formulation quantique

L'onde électromagnétique $\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow$ photon $e = h\nu$

relation de Planck

La particule ponctuelle $p = mv \rightarrow$ onde $\lambda = \frac{h}{p}$

relation de de Broglie

Les fonctions d'ondes

$$\psi(x) \sim \langle x | \psi \rangle \in C \quad prob = |\psi(x)|^2$$

photons et vecteurs : $A_\mu(x)$ $W_\mu(x)$...

fermions : spineur $\psi_i(x)$

scalaires : $B(x)$

Les opérateurs

quantité de mouvement : $p = -i\frac{\partial}{\partial x}$ soit $p_\mu = i\partial_\mu$

Les états propres avec valeur propre p

$$\psi(x) \sim \exp(ip \cdot x) \quad \text{soit} \quad \sim \exp(-i p^\mu x_\mu)$$

QED : l' électromagnétisme quantique

L'électron est représenté par un champ de spineurs (spin $1/2 \times 2$) de Dirac tel que

$\psi(x)$ est la fonction d'onde quantique

associée à une densité de courant de charges électroniques ($q = e$)

$$\mathcal{J}_\mu = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Le champ électromagnétique est classique

$$A_\mu(x) \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{i}{e} [i \partial_\mu - e A_\mu, i \partial_\nu - e A_\nu]$$

La densité de lagrangien dans l'espace temps est :

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(\gamma^\mu i \partial_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu \mathcal{J}_\mu$$

QED : l'interaction

L'interaction électron-photon est construite en utilisant le principe d'interaction minimal (**minimal coupling**)

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - e A_\mu$$

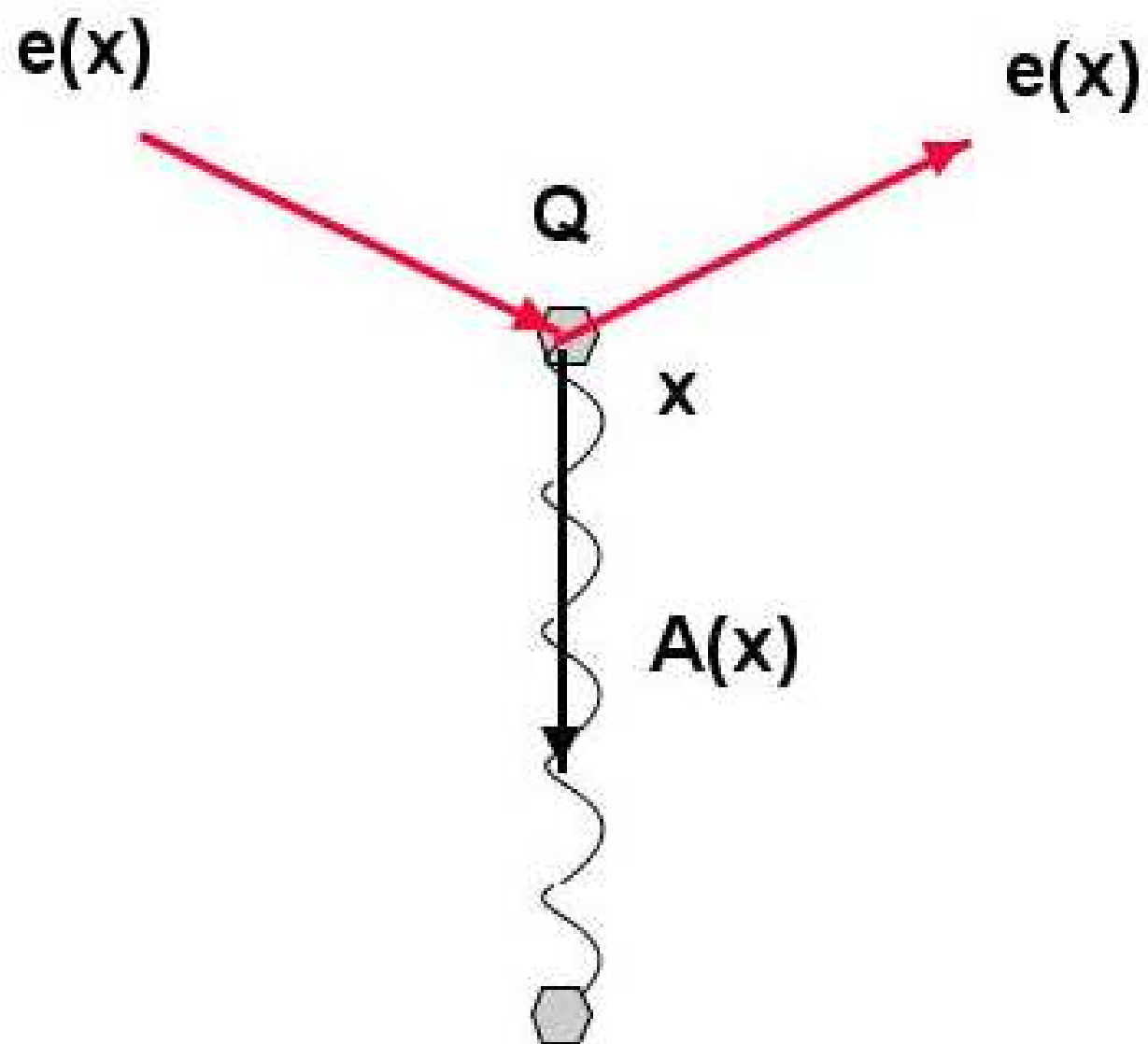
$$\text{ou} \quad \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie A_\mu$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

- Le lagrangien complet avec **un champ relativiste** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ (photons) :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial - eA)^\mu - m \} \psi \quad (1)$$



L'invariance de jauge locale U(1) de QED

La transformation de jauge agit sur les champs laissant la dynamique invariante.

$$\psi(x) \rightarrow \exp(-ie\alpha(x)) \psi(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

1. La transformation de phase **locale** sur ψ engendre un groupe de transformations unitaires continu commutatif agissant sur les champs de particules chargées.

$$U = \exp(-ie \alpha(x))$$

Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = e$

2. L'existence de cette symétrie est associée à la conservation de la charge électrique.

Généralisation à SU(2) : Yang-Mills

Un fermion est représenté par un champ à plusieurs états (internes) tel que

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ exemple } \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

La transformation SU(2) locale agit sur les états internes.

$$\psi(x) \rightarrow \exp(-ig T_j \alpha_j(x)) \psi(x) \quad (2)$$

1. La transformation engendre un groupe unitaire continu non-commutatif.
2. Les générateurs du groupe de Lie sont les T_j avec $j = 1, 2, 3$.

$$T_j = \frac{1}{2} \sigma_j$$

3. g est la constante de couplage.

Yang-Mills : l'interaction

L'interaction fermion-boson est construite en utilisant le principe d'interaction minimal : **dérivation covariante**

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig T_j W_{j\mu}(x) \quad (3)$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

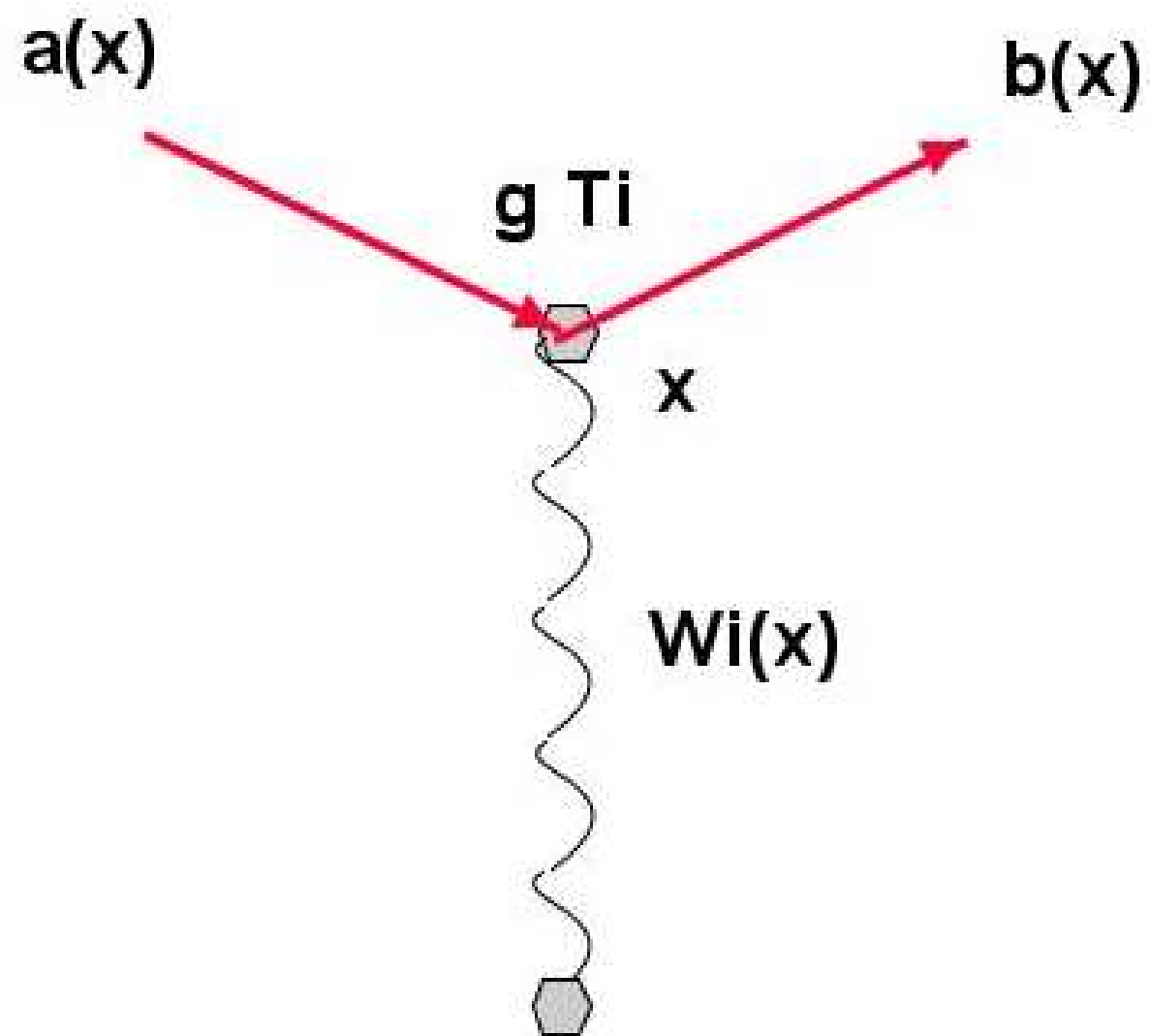
$$\mathcal{L}_{int}(x) = -g W_j^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu T_j \psi(x)$$

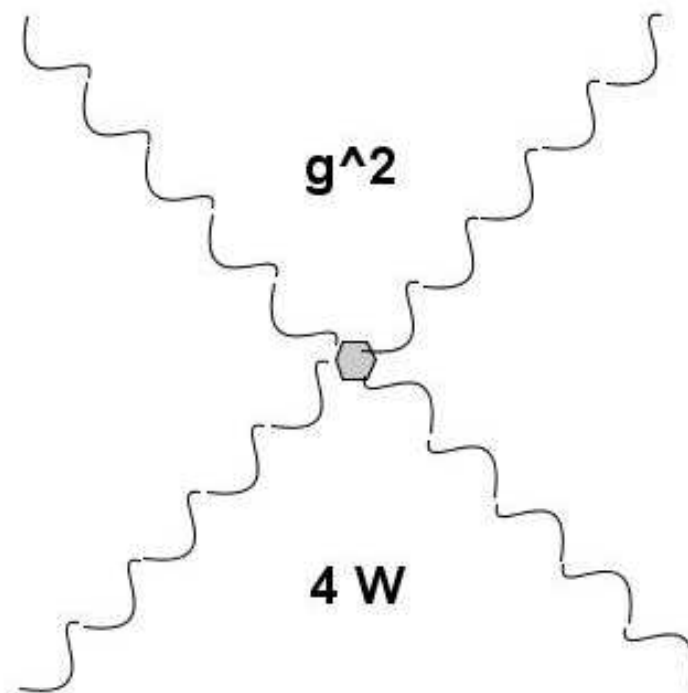
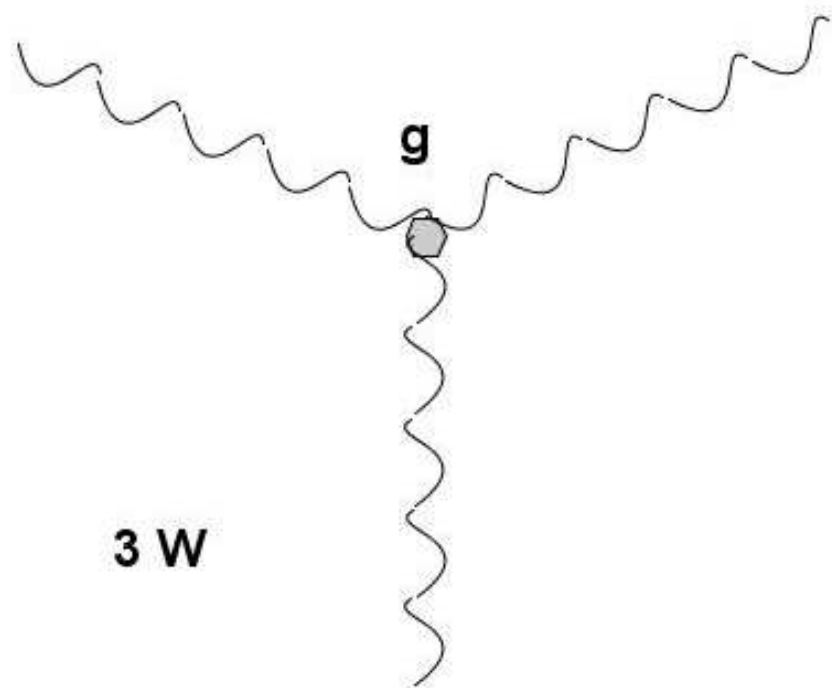
Le Lagrangien total des fermions et des bosons

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} \left(G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu a} \right) + \bar{\psi} \left(\left(i\partial^\mu - g T_j W_j^\mu \right) \gamma_\mu - m \right) \psi$$

g est l'unique constante de couplage

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g} [i\mathcal{D}_\mu, i\mathcal{D}_\nu] \sim \partial W + g W.W$$





L'unification électrofaible

1. La symétrie $SU(2)*U(1)$.
2. Les constantes de couplage g et $g' \sim 10^{-2}$
3. La masse des W $M_W \sim 10^2 \text{ GeV}$ et le Higgs ? ?.
4. La violation de parité : $\psi_L \neq \psi_R$

L'interaction forte

1. La symétrie $SU(3)$ cachée.
2. La constante de couplage α .
3. Le confinement

Conclusion

1. La grande unification , exemple SU(5) .

$$\psi = \begin{pmatrix} q_c \\ l \end{pmatrix}$$

2. Les aspects quantiques .
3. Les générations ou saveurs .
4. Les neutrinos massifs