

UNIVERSITE DE CAEN
LMNO

12 mai 2010

Graphes de Feynman et applications
Une introduction

C. LONGUEMARE

Conventions

- Les indices d'espace-temps sont $\mu = 0, 1, 2, 3$; la métrique g est telle que $g_{\mu\nu} = 1, -1, -1, -1$.
- Les unités sont telles que $\hbar = 1$ et $c = 1$. De plus, en l'électromagnétisme, on choisira :

$$\epsilon_0 = 1 = \mu_0 \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137,0..}$$

- La charge électronique sera négative et notée $e = -|e|$
- L'impulsion d'une particule libre est notée $\vec{p}$ éventuellement p_μ ;
- L'énergie positive d'une particule est $\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$; l'énergie de l'état relativiste d'une particule est $E = p_0 = \pm\omega_p$
- La normalisation des états est choisie telle que (voir annexe 1) :

$$\phi_p^+(x)\phi_p(x) = 2\omega_p$$

- Les transformations de Fourier de l'espace physique x

$$f(x) = \int \exp(-iqx) f(q) \frac{1}{2\pi} dq \quad f(q) = \int \exp(iqx) f(x) dx \quad (1)$$

– L'équation de Dyson

Pour étudier une transition entre un état (initial) sans interaction $\psi(t = -\infty)$ et un autre état (final) $\psi(t = +\infty)$, on peut formellement isoler l'opérateur d'interaction dans l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

En effectuant un changement d'état $\psi(t)$, on peut écrire l'équation d'évolution (de Dyson)

$$\begin{aligned}\psi(t) &\rightarrow \tilde{\psi}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right) \psi(t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(t) &= \mathcal{H}_1(t) \times \tilde{\psi}(t)\end{aligned}\tag{2}$$

avec $\mathcal{H}_1(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right) \mathcal{H}_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right)$

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1(t) dt\right)$$

Remarque : L'opérateur d'ordonnancement $\mathcal{T}$ est nécessaire ici à cause de l'éventuelle non commutativité des opérateurs d'interaction à t .

– Généralisation relativiste :

Introduction de la densité de lagrangien et matrice $\mathcal{S}$

L'état initial comme l'état final sont "sans interaction" : les particules sont libres car éloignées les unes des autres à des distances macroscopiques ; il s'agit de déterminer une probabilité pour une transition qui résulte d'une interaction "microscopique" et quantique. Pour remplir ce programme, on introduit une densité d'interaction dans l'espace temps $\mathcal{H}_{int}(x) = -\mathcal{L}_{int}(x)$ dont il peut résulter la transition observée.

L'opérateur d'évolution pourra se mettre sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp \left(+ \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4x \right) \quad (3)$$

- **L'amplitude**

$$a + b \rightarrow f$$

- l'amplitude de transition

$$\langle f | \mathcal{S} | i \rangle = A_{fi}$$

soit

$$A_{f,i} = \delta_{f,i} - i T_{f,i}$$

- Si $i \neq f$ l'invariance par translation d'espace-temps impose

$$T_{f,i} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \mathcal{M}_{f,i}$$

$\mathcal{M}_{f,i}$ est l'amplitude de transition réduite.

- le nombre de transitions observées (dans les conditions de normalisation) est

$$N_{f,i} = |T_{f,i}|^2$$

– les sections efficaces

$$a + b \rightarrow f$$

- le flux total des particules incidentes est

$$\mathcal{F}_a = \mathcal{T} (2\omega_a v_a)$$

- le nombre de cibles fixes est

$$N_b = \mathcal{V} (2\omega_b)$$

- le nombre de transitions observées est

$$N_{f,i} = |T_{f,i}|^2 = \sigma_{fi} \mathcal{F}_a N_b$$

Dans le cadre des conventions , la section efficace et l'amplitude quantique sont liées par l'équation suivante :

$$\sigma_{\text{totale}} = \mathcal{F}^{-1} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \times |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \quad (4)$$

avec $\mathcal{F} = (2\omega_a v_a)(2\omega_b)$ avec $\omega_b = m_b$

– **Durées de vie**

Soit la désintégration

$$a \rightarrow f$$

De la même façon, la probabilité de transition par unité de temps est :

$$\lambda_{\text{totale}} = \mathcal{F}^{-1} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \times |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \quad (5)$$

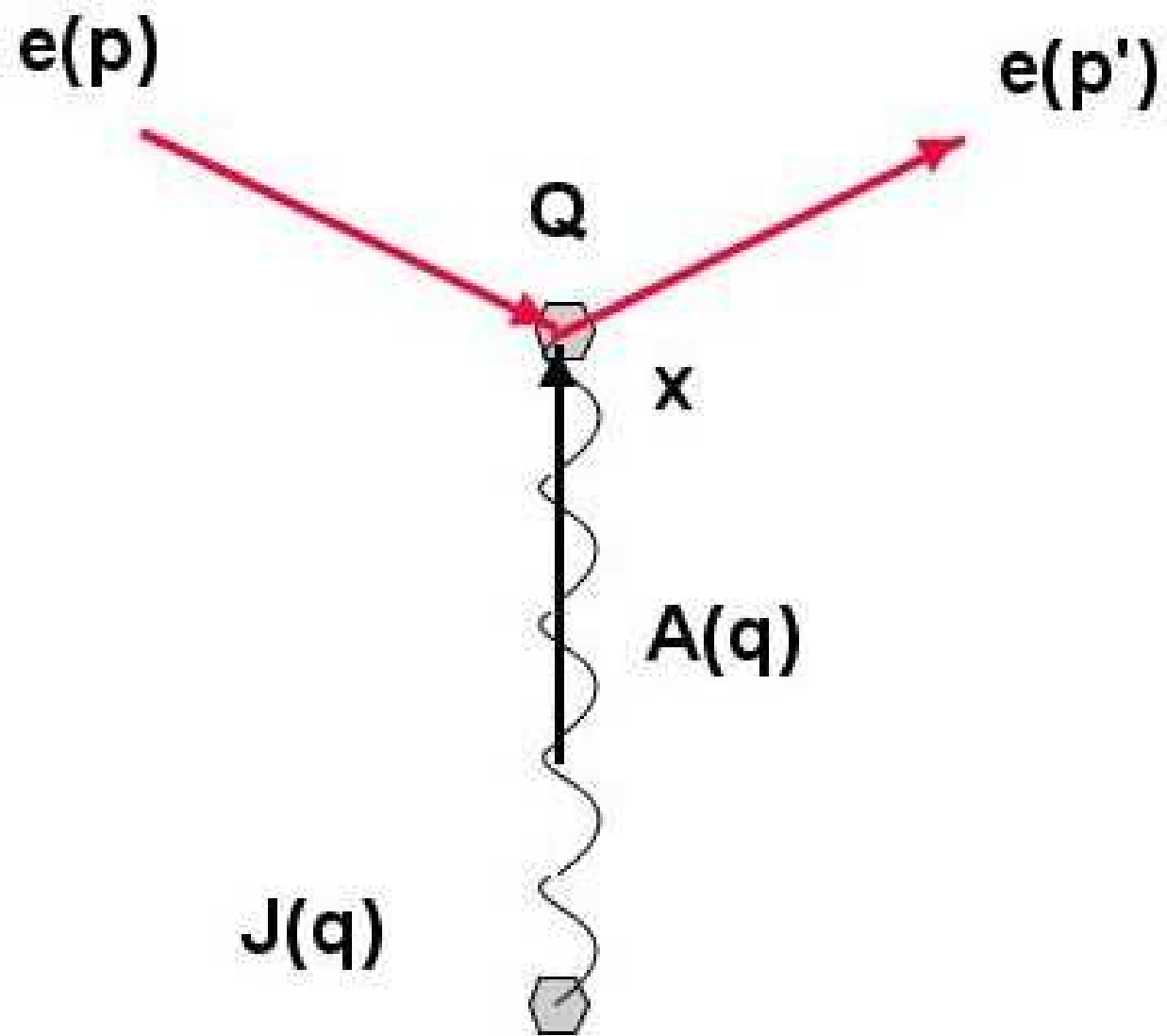
avec $\mathcal{F} = (2\omega_a)$

- **La somme sur les états finals** La mécanique quantique précise la densité d'états d'impulsion dans l'espace réciproque d'un espace physique de volume V

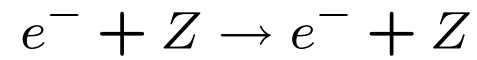
$$\sum_f (\text{états d'impulsion}) = \Pi_f \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'_p} |f| \quad (6)$$

A deux particules dans le référentiel du centre de masse : $i \rightarrow c + d$

$$\int (2\pi)^4 \delta^4(P_{CM} - (p_c + p_d)) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2\omega_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2\omega_d} = (2\pi)^{-2} \frac{p_0}{4E_0} \int d\Omega$$

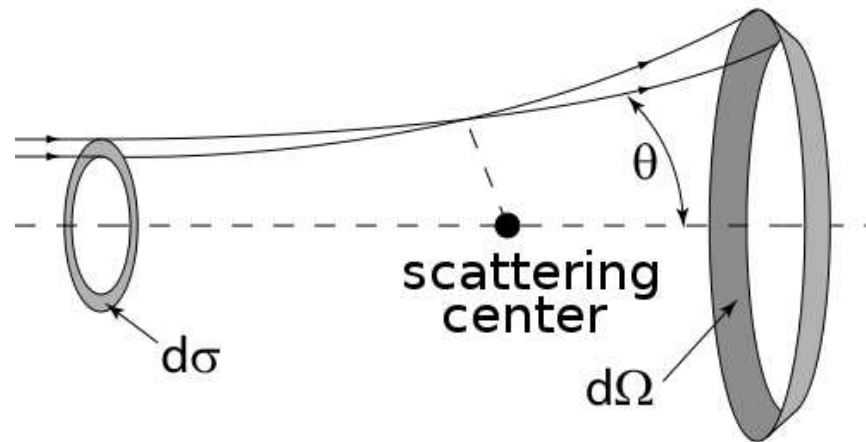


Diffusion Rutherford



La section efficace différentielle classique :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{avec } E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$



Démonstration en physique classique

Rappelons la formule de Rutherford :

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2bE_0}{\kappa} \quad \text{avec } \kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (7)$$

où b est la paramètre d'impact et θ l'angle de diffusion

Remarque : La démonstration la plus "physique" de cette formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{p}} dt = [\vec{p}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) dt$$

En effet :

$$\text{la loi des aires :} \quad dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad \text{avec } L = mv_0 b$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{mr^2}{L} \right) \vec{f}(t) d\theta = \frac{\kappa}{v_0 b} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u} d\theta$$

$$\text{avec } \Delta \vec{p} = m v_0 (\cos(\theta_0) + 1, \sin(\theta_0)) \text{ et } \vec{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

On en déduit sans difficulté la formule 7 ci-dessus

Démonstration en physique quantique

Soit à calculer la section efficace de diffusion d'un électron sur une charge $Z | e |$ ponctuelle située à l'origine du référentiel du laboratoire.

Les étapes de la démonstration

- Le lagrangien libre de l'électron

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)((p.\gamma) - m)\psi(x)$$

- L'équation libre de Dirac

$$((p.\gamma) - m)\psi(x) = 0$$

- L'interaction de l'électron avec un champ extérieur A_μ (principe d'interaction minimale)

$$((p.\gamma) - e(A.\gamma) - m)\psi(x) = 0$$

- La forme hamiltonienne de cette équation

$$i\partial_0\psi(x) = [-i\partial_j\gamma^0\gamma^j + e\gamma^0(A.\gamma) + \gamma^0m]\psi(x)$$

donc pour l'interaction :

$$H_{int}(x) = e A_\mu(x) \gamma^0 \gamma^\mu \quad (8)$$

- L'amplitude de transition au premier ordre (figure ci-dessus)

$$\begin{aligned} A_{f,i} &= -i \int \psi'^{\dagger}(x) (H_{int}(x)) \psi(x) d^4x \\ &= -i \int \exp(i(p' - p)x) A_\mu(x) d^4x \times u(p')^{\dagger} (e \gamma^0 \gamma^\mu) u(p) \\ &= -i A_\mu(q) \times \bar{u}(p') (e \gamma^\mu) u(p) \end{aligned}$$

avec

$$q = p' - p \quad \text{et} \quad A_\mu(q) = \int \exp(iqx) A_\mu(x) d^4x$$

- Le champ de photons virtuels rayonnés par la source $J(x)$ (relations de Maxwell avec $\epsilon_0 = 1$)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu(x)$$

par transformation de Fourier , on obtient l'équation suivante sur le champ $A_\mu(q)$

$$(-iq)^2 A_\nu - (-iq)_\nu (-iq)^\mu A_\mu(q) = J_\nu(q)$$

Equation que l'on peut écrire formellement

$$A^\mu(q) = [-q^2 g_{\mu\nu} + q_\nu q^\mu]^{-1} J_\nu(q)$$

- Dans le cas d'une charge électrique ponctuelle, la conservation du courant impose qu'elle soit statique

$$J^0(q) = 2\pi\delta(q^0)Q \quad \vec{J}(x) = \vec{0}$$

La transformée de Fourier du courant conduit à

$$A^0(q) = \frac{1}{\vec{q}^2} J^0(q) = 2\pi\delta(q^0)\frac{Q}{\vec{q}^2}$$

avec $|\vec{q}|^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$

Remarque Le retour à l'espace ordinaire conduit à (par transformation de Fourier inverse)

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|\vec{x}|}$$

- L'amplitude de transition A_{fi}

$$A_{f,i} = -iA_0(q) \times \bar{u}(p')^+ (e \gamma^0) u(p)$$

$$= -i 2\pi\delta(q^0) \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$$

Dans ce cas l'amplitude de transition (réduite) est :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$$

- Finalement, en prenant correctement en compte les normalisations , on calcule la section efficace quantique au premier ordre coulombien en sommant le spin final et en moyennant sur le spin initial si l'électron incident est non-polarisé :

$$\sigma = \mathcal{F}^{-1} \int 2\pi\delta(q^0) \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\omega'} \quad (9)$$

avec $\mathcal{F} = 2\omega v = 2p$.

- L'intégration sur dp' est simple à cause de la conservation de l'énergie ($q^0 = 0$)

$$\sigma = \mathcal{F}^{-1} \int 2\pi \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \frac{p}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2\omega} d\Omega'$$

$$d\sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{Qe}{\vec{q}^2}\right)^2 \sum_{spin} |\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)|^2 d\Omega'$$

- Enfin la somme sur les spins : Nous utilisons une formule connue des ondes planes de spineurs :

$$\begin{aligned}\sum_{spin} (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p))^* (\bar{u}(p') \gamma^\nu u(p)) &= \text{trace}[u(p') \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu] \\ &= 4(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - ((p' \cdot p) - m^2) g^{\mu\nu})\end{aligned}$$

$$\sum_{spin} | \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) |^2 = 4[\omega^2 + p^2 \cos(\theta) + m^2]$$

- Enfin on obtient la section différentielle de Mott :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha \omega}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 (1 - v^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (10)$$

A la limite non-relativiste on retrouve la section de Rutherford
 $\omega \sim m$ et $v \sim 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \left(\frac{Z\alpha}{4E_0} \right)^2 \quad (11)$$

A la limite ultra-relativiste $m \sim 0$, $v \sim 1$ et $\omega \sim p$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left(\frac{Z\alpha}{2\omega} \right)^2 \quad (12)$$

La section efficace a la dimension de E^{-2} ce qui est correct dans le système d'unité employé ici, $\hbar c E^{-1}$ est une longueur qui décroît avec l'énergie .

Remarque : Retour aux unités macroscopiques pour faire une application numérique dans le cas de l'expérience de Rutherford

$$\alpha + Au \rightarrow \alpha + Au$$

à environ $E_0 \sim 10 \text{ MeV}$.

$$\hbar c = 197, 10^{-13} \text{ MeV.cm}$$

$$Z = 2 \times 79 \quad \alpha = 1/137,0$$

$$d\sigma = \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} d\Omega \times 0,32 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \sim \text{barn}$$

- Il est bien connu que la section efficace de Rutherford diverge à $\theta = 0$; ceci est dû à la portée infinie du potentiel coulombien. En réalité, le potentiel du noyau atomique est écranté par les électrons de l'atome à une distance d de l'ordre de l'Angström ; donc, pour des valeurs de $|\vec{q}| = 2p \sin(\theta/2)$ inférieures à $\hbar d^{-1}$, la diffusion ne se produit plus et $d\sigma = 0$ en conséquence :

$$\sin(\theta/2) > \frac{\hbar c}{d\sqrt{2Mc^2E_0}} \sim 10^{-5} \quad \text{avec} \quad d \sim 10^{-10} \text{ m}$$

Le paramètre "naturel" d'intégration de la section efficace est $|\vec{q}| = 2p \sin(\theta/2)$ qui varie sur l'intervalle $[\frac{\hbar}{d}, 2p]$

- Quand l'énergie est assez grande , la structure nucléaire "apparaît" pour les grandes valeurs de $|\vec{q}|$, la diffusion Rutherford est dite anormale.

Règles de Feynman

La théorie quantique des champs

Les règles de Feynman permettent d'écrire l'amplitude de transition $T_{f,i}$ pour un chemin donné sous forme de graphe ; la contribution des vertex (points d'interaction) se déduit du lagrangien d'interaction.

Pour QED on a :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -Q A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi (x)$$



particule	état initial	propagateur	état final
intégration		$i \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$	
fermion	$u(p)$	$((p \cdot \gamma) - m)^{-1}$	$\bar{u}(p)$
antifermion	$\bar{v}(p)$		$v(p)$
boson scalaire	1	$(p^2 - m^2)^{-1}$	1
boson vectoriel	ϵ_μ	$(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)^{-1}$	ϵ_μ^*
photon (jauge de Lorentz)	ϵ_μ	$g_{\mu\nu} (-p^2)^{-1}$	ϵ_μ^*

Règles de Feynman issues du lagrangien libre des particules

interaction quantique (QED)	$-iQ\gamma^\mu$
conservation de p	$(2\pi)^4\delta^4(p_{in} - p_{out})$
autres facteurs (nième ordre)	$\frac{1}{n!}$
potentiel classique	$V(q) = \int V(x) \exp(ikx) d^4x$

Règles issues de $\mathcal{L}_{int}$ pour les vertex

application à la diffusion Rutherford

(voir figure)

$$A_{f,i} = \int \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)u(p)\frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} (J^\nu(q))(2\pi^4)\delta^4(p' - p - q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

Avec

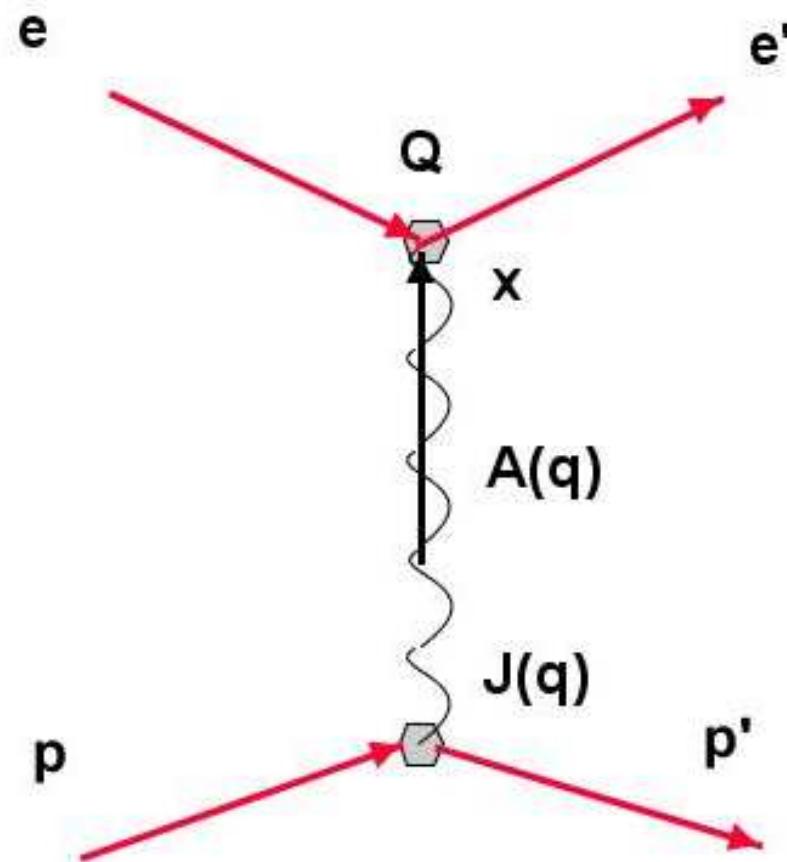
$$J^j(q) = 0 \text{ et } J^0(q) = 2\pi\delta(q^0)Q$$

$$Q = -Ze$$

$$\mathcal{M}_{f,i} = \left(\frac{Qe}{\bar{q}^2}\right)_{q=p'-p} \bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$$

Pour calculer la section efficace on reprend l'équation 9

electron proton scattering



Diffusion électromagnétique d'un électron sur un proton

$$e^- + p \rightarrow e'^- + p'$$

- Le courant électromagnétique du proton (neutron) Le proton est un fermion de spin 1/2 , il peut être décrit par un spineur de Dirac ; son quadri-vecteur courant est de la forme :

$$J_\mu(q) = \bar{u}'(p)(-iQ \times [\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M}q_\nu F_2(q^2)])u(p) \quad (13)$$

- L'amplitude de transition (voir figure)

$$A_{f,i} = \bar{u}(e')(-ie\gamma^\mu)u(e) \frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} J^\nu(q) |_{q=p'_e-p_e=p-p'}$$

- Dans le laboratoire, la section efficace est donnée par la formule de Rosenbluth .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{Lab} = \left(\frac{\alpha}{2\omega \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \left(K_1(q^2) \cos^2(\theta/2) - K_2(q^2) \sin^2(\theta/2) \right) \quad (14)$$

avec

$$q^2 = (p - p')^2 = (p'_e - p_e)^2 = -4\omega\omega' \sin^2(\theta/2) = -2M(\omega - \omega')$$

$$K_1 = F_1^2 + \frac{q^2}{4M^2} F_2^2$$

$$K_2 = \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2$$

$K_1(q^2)$ et $K_2(q^2)$ contiennent les informations sur la structure électromagnétique du proton.

Si le proton est ponctuel (particule de Dirac) :

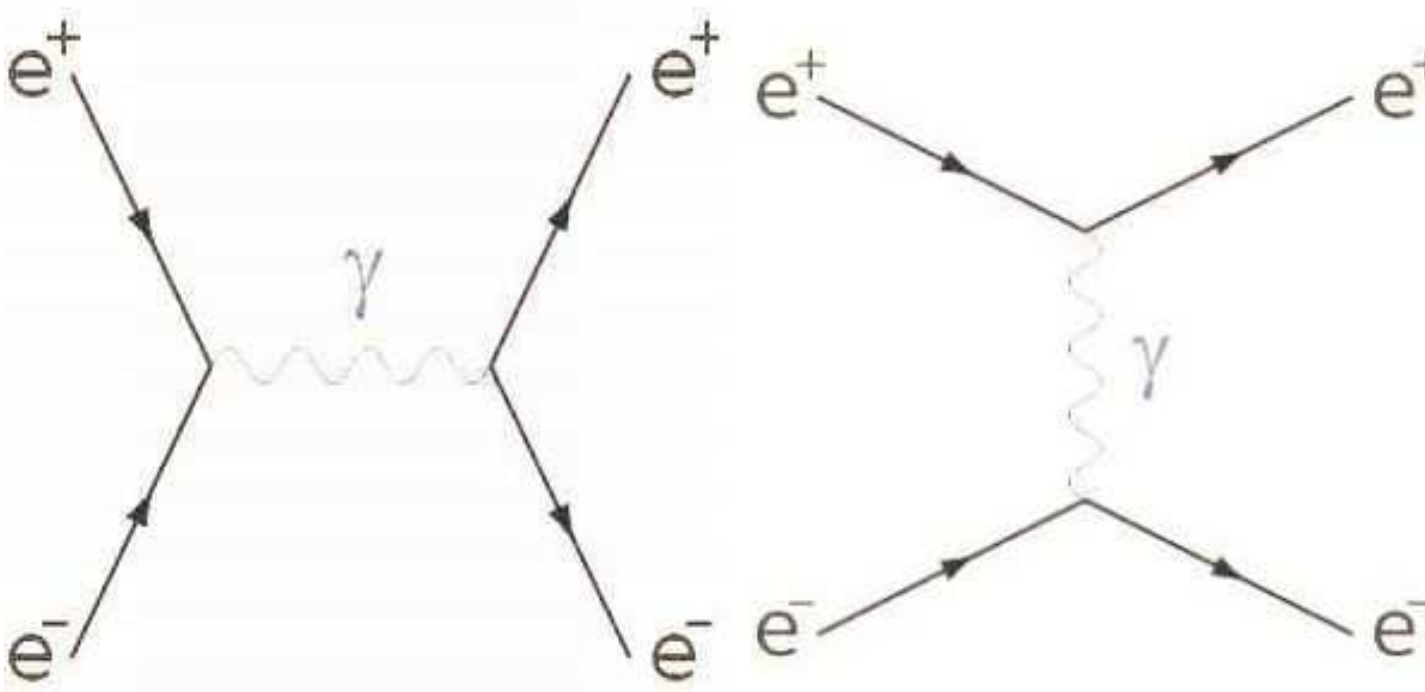
$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 0$$

Bhabha scattering

$$e^{-} + e^{+} \rightarrow e^{-} + e^{+}$$

Un processus (au deuxième ordre de QED) avec deux chemins donc deux amplitudes qui interfèrent



Conclusions

- La matrice S est un opérateur qui agit dans l'espace de Fock des systèmes de particules physiques observables, ces états d'impulsion (p) sont délocalisés dans l'espace temps.
- Hypothèse dynamique : L'opérateur S peut être construit à partir d'un opérateur d'interaction local $\mathcal{L}_{int}(x)$ qui s'exprime en fonction des champs de particules $\phi(x)...$; ces champs sont des opérateurs qui créent (annihilent) les particules (antiparticules) en x .
- Cette construction permet d'associer aux termes du développement de S des graphes dans l'espace-temps qui définissent autant de chemins entre l'état initial et l'état final
- Les règles de Feynman permettent de calculer les amplitudes de transition associées à chaque chemin acceptable qui conduira à la transition observée. Le module carré de la somme des amplitudes ($A \in C$) définira la probabilité.

La normalisation des états des particules physiques ?

- La sommation sur tous les états d'impulsion d'une particule impose d'intégrer dans tout l'espace p

$$\int d^4p \text{ avec } p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

- Pour une particule physique initiale ou finale, on doit se restreindre à la "couche de masse" et aux énergies positives

$$\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0)d^4p$$

ce qui donne, en intégrant sur p_0

$$\frac{d^3p}{2\omega_p}$$

- La normalisation est liée aux propriétés de commutation (anticommutation) des opérateurs de création et d'annihilation des états physiques des particules et aux **conventions** choisies, ici :

$$\langle p' | p \rangle = \langle 0 | [a_{p'}, a_p^+] | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^3(p - p')$$

En utilisant la fermeture des états $|x\rangle$

$$\int \langle x | p' \rangle^* \langle x | p \rangle d^3x = \int 2\omega_p \exp(-i(p - p')x) d^3x$$

on justifie

$$|\langle x | p \rangle|^2 = 2\omega_p \quad \text{avec} \quad \int d^3x = v$$