

Université de Caen

LMNO

Géométrie & Dynamique

C. LONGUEMARE

un essai pour comprendre
version 3.3

26 novembre 2013

Plan

1. Rappels de dynamique classique
 - Mouvement d'un référentiel (d'un solide)
 - La moindre action : lagrangien , équations de Lagrange-Euler, hamiltonien etc..
2. Dynamique d'un système de points
 - Dans un référentiel galiléen et non-galiléen
 - Action des forces intérieures (contraintes) et des forces d'inertie
 - Quelques exemples simplistes
3. Mouvement contraint sur une surface
 - Géométrie différentielle , notations
 - Action des forces de contraintes quelques exemples
 - Géométrisation de la gravitation classique
4. Extensions
 - Relativité générale
 - Les métriques de Schwarzschild et de Friedmann et al
 - La géométrie dans les théories de Jauge...
5. Appendices (avec les calculs)
 - Les équations de Friedmann
 - La métrique de Schwarzschild

Dynamique Lagrangienne

- Principe de moindre action $\mathcal{A}$

$$d\mathcal{A} = \mathcal{L}dt = -\mathcal{H}dt + p dx \quad \text{en MQ} \quad d\phi = \hbar^{-1} d\mathcal{A}$$

minimisation : équation de Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

- Mouvement non-relativiste libre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

- Mouvement relativiste libre

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow d\mathcal{A} = -mc ds$$

- Mouvement non-relativiste contraint par une énergie potentielle

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)$$

référentiels classiques

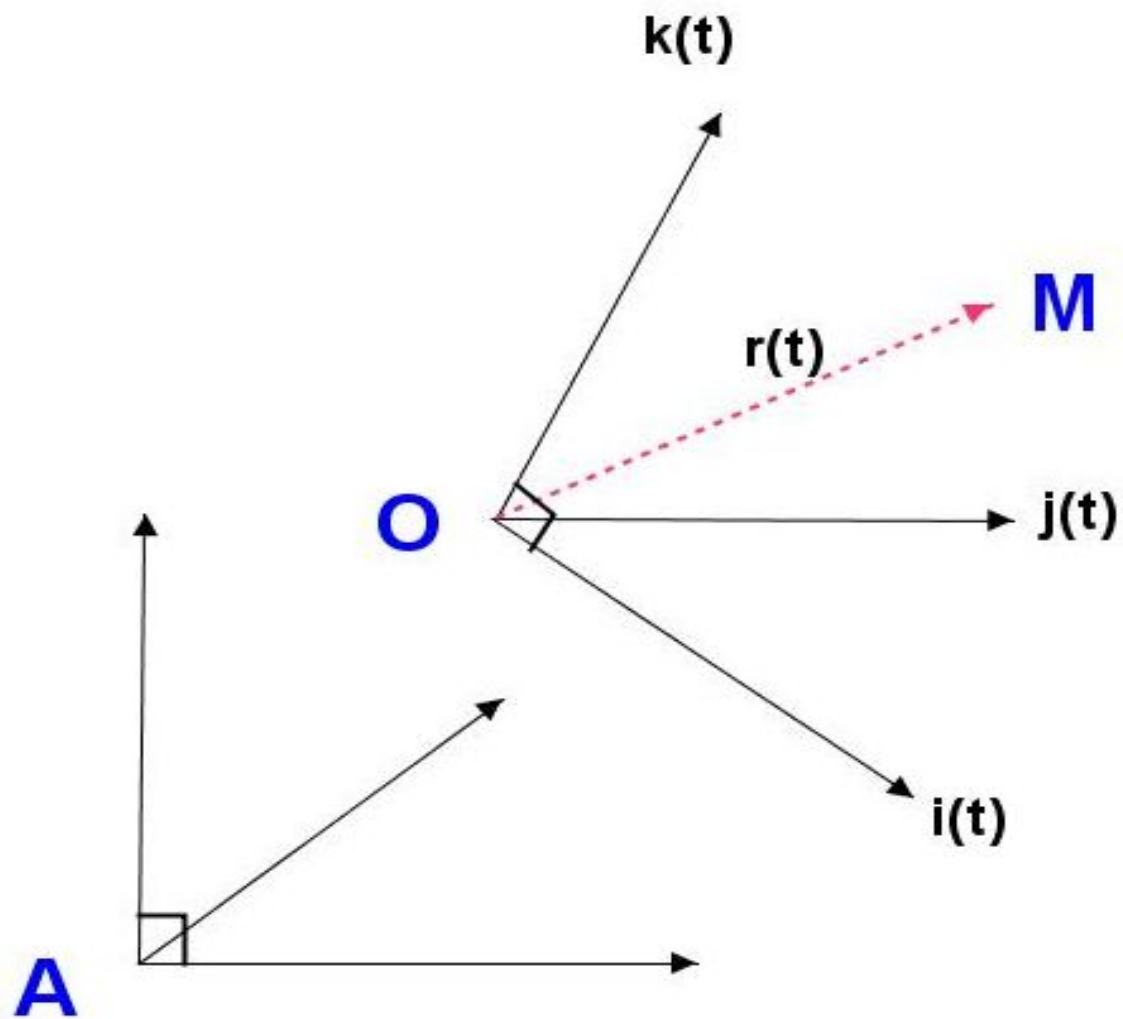


figure 1

Notations et constantes

K_A $\vec{v}_0$ $\vec{a}_0$ K_O $\vec{V}$ $\vec{A}$ $\vec{\Omega}$	système de référence galiléen vitesse d'un point M / K_A accélération du point M / K_A système de référence en mouvement vitesse de O / K_A accélération de O / K_A vitesse de rotation de K_O / K_A	origine A origine O	
$\vec{r}$ $\vec{v}$ $\vec{v}_e$ $\vec{a}$ $\vec{a}_e$ $\vec{a}_c$	position du point M / K_O vitesse relative du point M / K_O vitesse d'entraînement dans K_A accélération relative du point M / K_O accélération d'entraînement dans K_A accélération de Coriolis dans K_A		
$g_{\mu\nu}$ $\mathcal{G}$ Mpc c	métrique de la relativité restreinte cte de gravitation méga parsec vitesse de la lumière	$+$ $-$ $-$ $-$ $6,673 \cdot 10^{-11}$ $3,086 \cdot 10^{+19}$ $2,998 \cdot 10^8$	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ km m.s^{-1}

Dynamique et cinématique classique du point

— Mouvement du référentiel K_O par rapport à K_A

$\vec{V}(t)$ $\vec{A}(t)$ vitesse et accélération de O $\vec{\Omega}(t)$ vitesse de rotation de

$\Omega = 0$	$V = 0$	Repos
$\Omega = 0$	$V \neq 0$	Translation
$\neq 0$	$\vec{V} \cdot \vec{\Omega} = 0$	Rotation
$\neq 0$	$\vec{V} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$	mvt Hélicoïdal

— Composition des vitesses et des accélérations

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_e \quad \vec{a}_0 = \vec{a} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{v}_e = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_e = \vec{A} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

— Loi de Newton

$$m \vec{a}_0 = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = m (\vec{a} + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$$

Dynamique d'un système de points isolés

— Système de forces dans K_A

$$\begin{array}{l} \text{isolés } K_A \quad \vec{F}_i(ext) = \vec{0} \\ \text{le point } M_i \end{array}$$

$$\text{solitaires } K_O \quad \vec{F}_i(int) \quad \text{telque} \quad \sum_i F_i(int) = 0$$

— Moment cinétique par rapport à A d'un système de points libres dans K_A

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{ij} \vec{r}_{ij} \wedge \vec{F}_{ij}(int) = \vec{\mathcal{C}} = \vec{0}$$

— Energie cinétique d'un système de points dans K_A

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c = \mathcal{P} = \sum_M \vec{F} \cdot \vec{v}_0 = \sum_{ij} \vec{F}_{ij}(int) \cdot \vec{v}_{ij} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{C}} = -\frac{d}{dt} U(int)$$

— exemple : le danseur

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad \delta E = \frac{1}{2} (I_2 \omega_2^2 - I_1 \omega_1^2)$$

Dynamique dans un référentiel "presque" galiléen

— M_i au repos par rapport à K_O

$$\vec{F}_i(ext) = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a})_i = (\vec{v})_i = \vec{0}$$

$$\vec{F}_i(int) = m (\vec{a}_e + \vec{a}_c)_i$$

$$= m \left(\vec{g}rad(\vec{A}.\vec{r} - \frac{1}{2} |(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})|^2) + \vec{r}ot \left(\frac{r^2 \dot{\vec{\Omega}}}{2} \right) \right)_i$$

— Cas particuliers

- Translation accélérée

$$\mathcal{U} = -m \vec{A}.\vec{r}$$

- Rotation uniforme : $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$

si O est choisi sur l'axe de rotation :

$$\mathcal{U} = + \frac{m}{2} |(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})|^2$$

Exemple 1

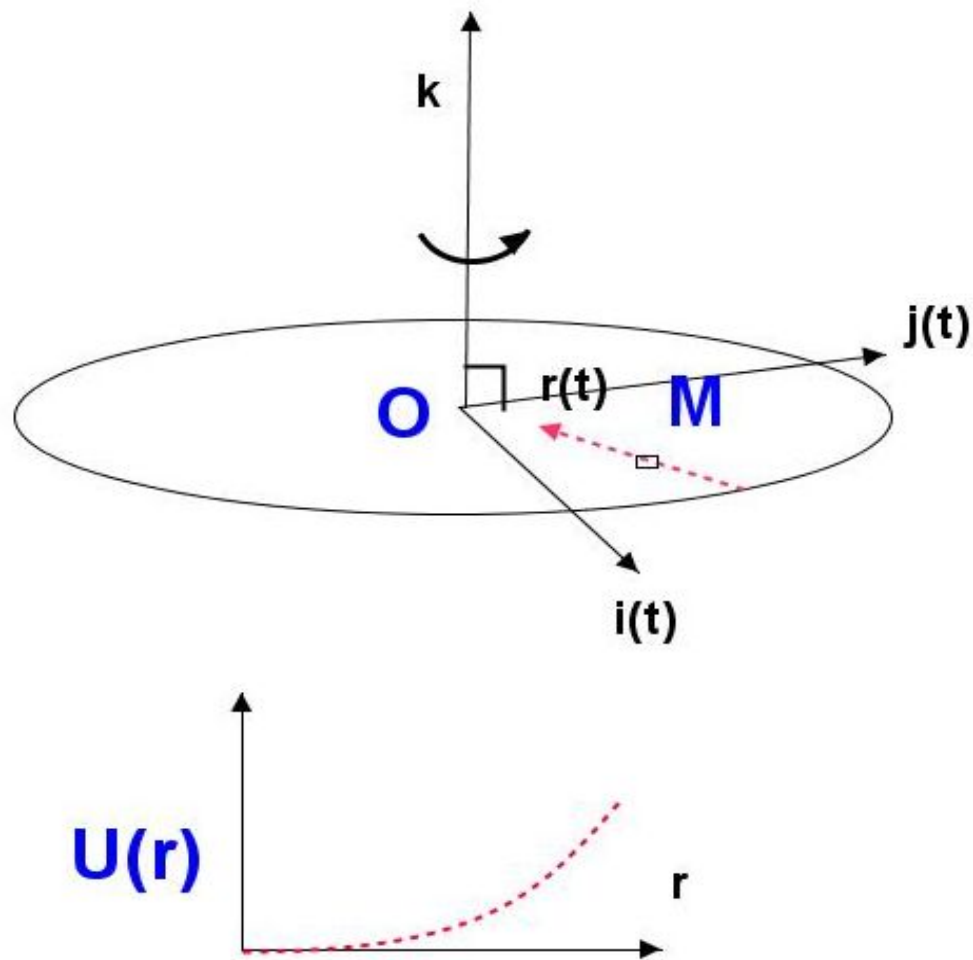


figure 2

Exemple 2

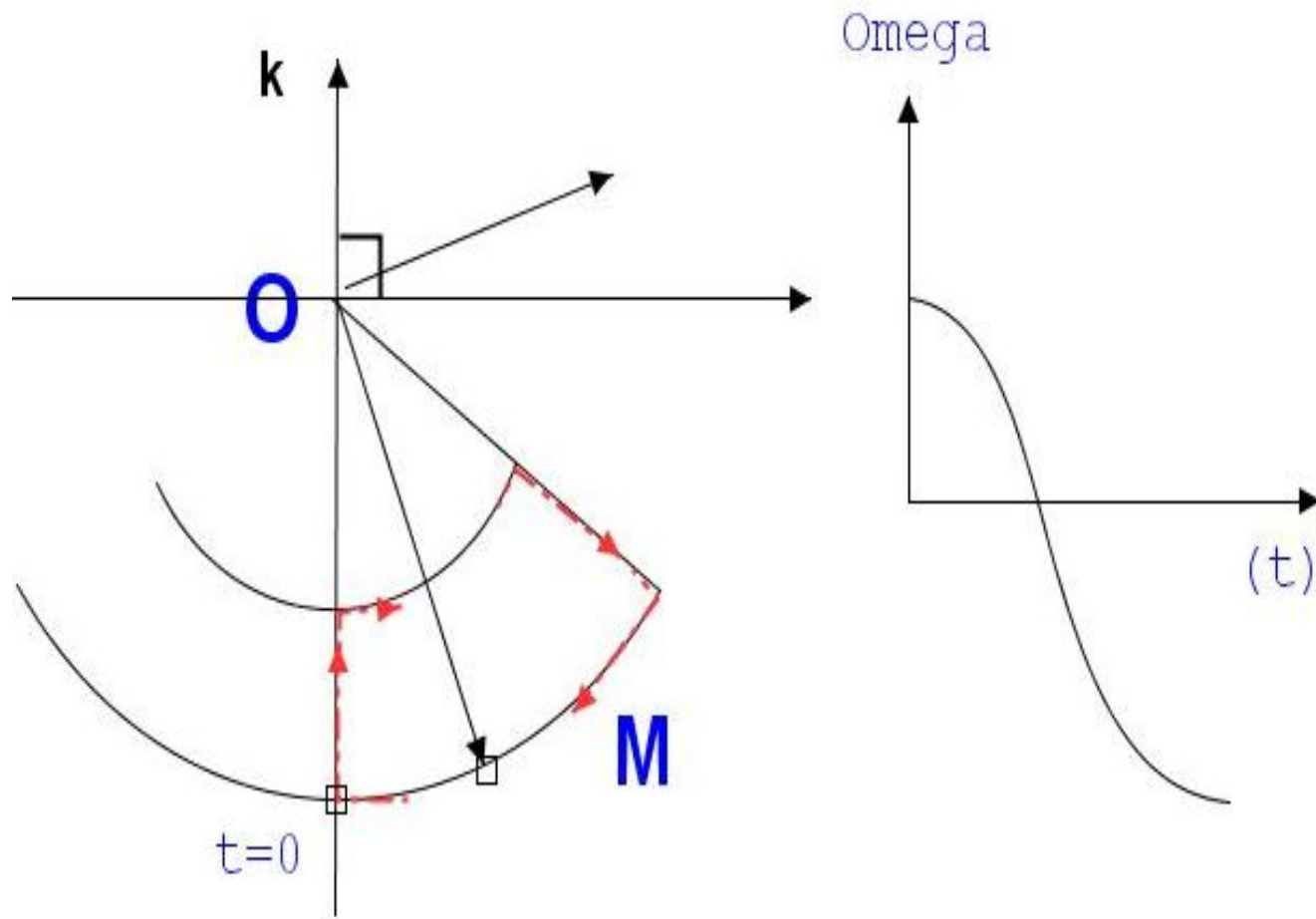


figure 3

- L'appartenance d'un point à un référentiel non galiléen implique l'existence de forces intérieures de cohésion (de contraintes , de liaison).

- Si le mouvement relatif génère une action de ces forces, la variation du mouvement du référentiel mobile dépend alors de "sa propre inertie".

Exemple : cas de la figure 2

$$I_1 = I + mR^2 \quad I_2 = I \quad I \gg mR^2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \times \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) \sim \omega_1$$

$$\delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \left(I\omega_2^2 - (I + mR^2)\omega_1^2 \right) \sim \frac{1}{2} m R^2 \omega_1^2$$

- Dans le cas 2 , il y a une "conspiration" entre l'action contre la force centrifuge qui travaille et l'action contre la force de Coriolis qui ne travaille pas mais qui maintient la valeur du moment cinétique.

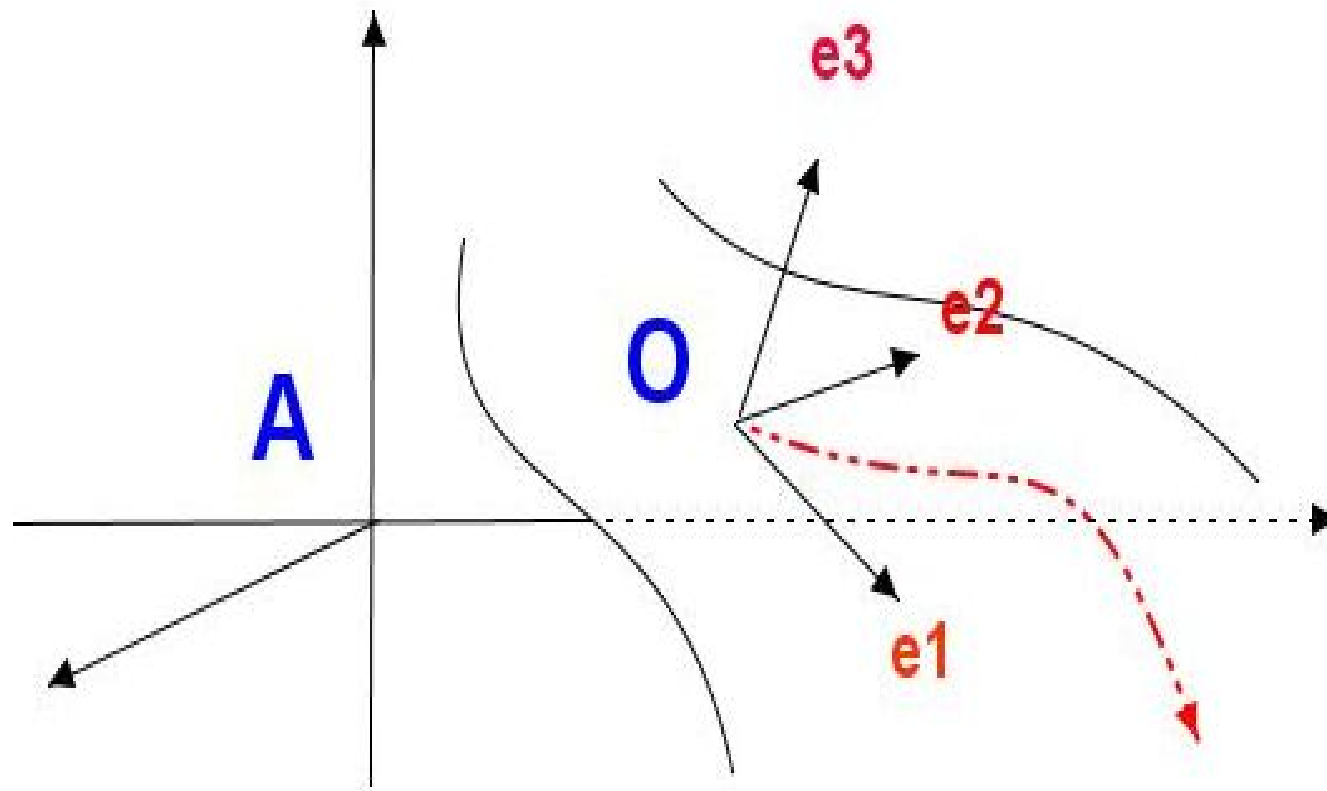


figure 4
Mouvement sur une surface

Géométrie différentielle

— Notations

$$ds = dM = e_i dq^i \quad (e_i, e_j) = g_{ij} \quad (e^i, e_j) = \delta_j^i \quad g^{ij} = (g)^{-1}$$

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad v^2 = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

— Dynamique du point M de masse m

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 - U \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = m g_{ij} \dot{q}^j \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} + \frac{m}{2} \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} \dot{q}^l \dot{q}^j$$

$$g_{ik} \ddot{q}^k = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^l \dot{q}^j - m^{-1} \frac{\partial U}{\partial q^i}$$

$$\Gamma_{lj}^k = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} \right)$$

$$\ddot{q}^k = -\Gamma_{lj}^k \dot{q}^l \dot{q}^j - m^{-1} F^k$$

connexion affine et Γ_{lj}^k est le symbole de Christoffel qui vérifie : $\dot{e}_l = \Gamma_{lj}^k \dot{q}^j e_k$

Formulaire de Géométrie différentielle

— L'intervalle d'espace et le tenseur métrique

$$dM = e_i dq^i \Rightarrow ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

— Le symbole de Christoffel Γ_{lj}^k

$$de_\ell = \Gamma_{lj}^k dq^j e_k \quad \text{ou} \quad \dot{e}_\ell = \Gamma_{lj}^k \dot{q}^j e_k$$

$$\Gamma_{lj}^k = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\ell} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} \right) = \Gamma_{jl}^k$$

— La dérivation covariante ∇_{js}^ℓ

$$\nabla_{js}^\ell = g^\ell_s \partial_j + \Gamma_{js}^\ell$$

— Le tenseur de Riemann R_{ijk}^ℓ

$$R_{ijk}^\ell = \partial_j \Gamma_{ik}^\ell - \partial_k \Gamma_{ij}^\ell + \Gamma_{js}^\ell \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^\ell \Gamma_{ij}^s = \nabla_{js}^\ell \Gamma_{ik}^s - \nabla_{ks}^\ell \Gamma_{ij}^s$$

— Le tenseur de Ricci

$$R_{ik} = R_{ilk}^\ell = \partial_\ell \Gamma_{ik}^\ell - \partial_k \Gamma_{il}^\ell + \Gamma_{ls}^\ell \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^\ell \Gamma_{il}^s$$

$$R_{ik} = \nabla_{ls}^\ell \Gamma_{ik}^s - \nabla_{ks}^\ell \Gamma_{il}^s$$

Mouvement sur une surface

Choix des paramètres

- L'axe $\vec{e}_3$ est normal à la surface
 - le point doit "rester" dans le plan tangent (q_1, q_2) avec $\dot{q}_3 = 0$
 - Les équations du mouvement dans le plan tangent ($k \in 1, 2$) ne dépendent que de la force extérieure tangentielle $F^k \neq 0 \quad k \in 1, 2$ (frottements ou autres)

$$i, j, k \in 1, 2 \quad \ddot{q}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j + m^{-1} F^k$$

- La réaction (force extérieure) qui agit dans le cas du mouvement "libre" sur la surface est proportionnelle à la masse d'inertie m ,

$$k = 3 \quad i, j \in 1, 2 \quad \ddot{q}^3 = 0 \Rightarrow F^3 = m \Gamma_{ij}^3 \dot{q}^i \dot{q}^j$$

- The equivalence principle is dealing with the equivalence of gravitational and inertial mass, and to Albert Einstein's observation that the gravitational force as experienced locally while standing on a massive body (such as the Earth) is actually the same as the pseudo-force experienced by an observer in a non-inertial (accelerated) frame of reference. *

*. http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_principle

Mouvement sur un paraboloïde d'axe Oz

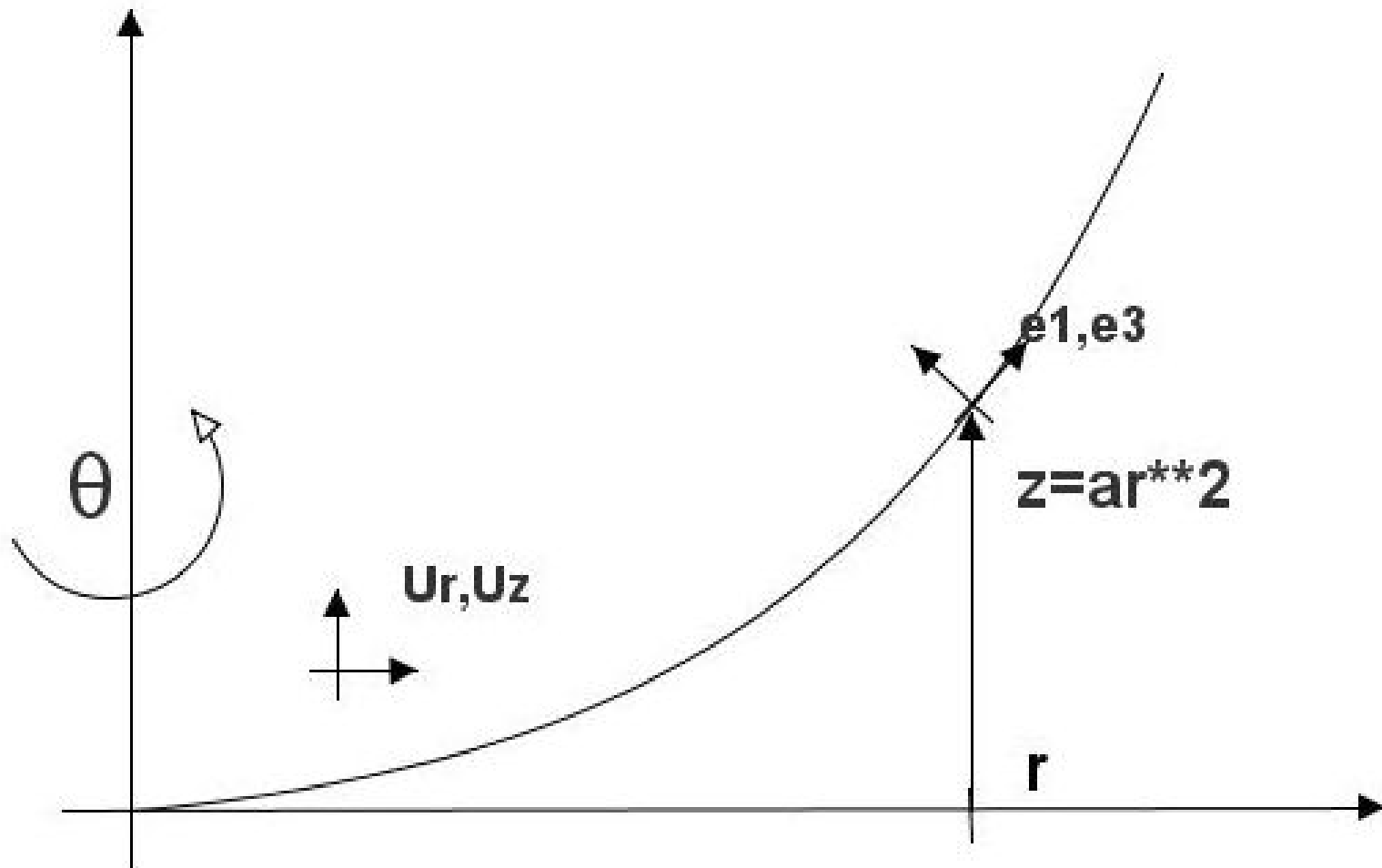


figure 5

— $M : r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = (r \cos(\theta), r \cos(\theta), z = ar^2)$

$i = 1, 2 \quad q^i = r, \theta$

— $dM = e_1 dr + e_2 d\theta$

— Connexions affines

(ij)	(11)	(12)=(21)	(22)
k=1	$a(r)$	0	$b(r)$
k=2	0	r^{-1}	0

$a(r) = \frac{4a^2r}{1+(2ar)^2} \quad b(r) =$

$\frac{-r}{1+(2ar)^2}$

— Equation en θ (conservation $L_z = m r^2 \dot{\theta}$)

$$\ddot{\theta} = -(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2)\dot{r}\dot{\theta} = -2 r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}$$

— Equation en r (conservation $E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + U^*$)

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\Gamma_{11}^1\dot{r}^2 - \Gamma_{22}^2\dot{\theta}^2 + m^{-1} g^{11}\left(-\frac{\partial U}{\partial r}\right) \\ &= -a\dot{r}^2 - b\dot{\theta}^2 - m^{-1} (1 + (2ar)^2)^{-1}\frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned}$$

*. exemple $U = mgz = mgar^2$

Détermination de la réaction par la mécanique

— Le cas du parabololoïde en coordonnées cylindriques avec $m = 1$

$$\vec{e}_3 = r^{-1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ / la base } \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2ar \\ 0 & r & 0 \\ 2ar & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} = \vec{R} = N_z \vec{e}_3 &= F^3 \vec{e}_3 & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -2ar N_z \\ & & r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ & & \ddot{z} &= 2a(r\ddot{r} + \dot{r}^2) = N_z \end{aligned}$$

$$F^3 = N_z = 2a (1 + 4a^2 r^2)^{-1} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Détermination de la réaction par la géométrie différentielle

— Application de la formule générale

$$F^3 = \Gamma_{ij}^3 \dot{q}^i \dot{q}^j \quad i, j \in 1, 2$$

— les connexions affines Γ_{ij}^3

$$\dot{e}_i = \Gamma_{ij}^3 \dot{q}^j e_3 + \dots \quad \text{avec} \quad i, j = 1, 2$$

$\Gamma_{11}^3 = \frac{2a}{1+(2ar)^2}$	$\Gamma_{12}^3 = 0$	$\Gamma_{22}^3 = \frac{2ar^2}{1+(2ar)^2}$
--	---------------------	---

— Application à F^3

$$\vec{R} = F^3 \vec{e}_3$$

$$F^3 = N_z = \Gamma_{11}^3 \dot{r}^2 + \Gamma_{22}^3 \dot{\theta}^2 = \frac{2a}{(1+4a^2r^2)} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Trajectoire géodésique : mouvement libre sur la surface !

- L'équation de la géodésique sur la surface telle que $e_3 \perp$ à la surface

$$i, j, k \in (1, 2) \quad \ddot{q}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j$$

- Elle minimise l'action de Lagrange sur la surface

$$\mathcal{A} = \int_a^b \mathcal{L} dt \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} \sim v^2 = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

- La distance parcourue D entre a et b est

$$D = \int_a^b v dt \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}$$

dans wikipedia on trouve (d'après Cauchy-Schwartz *)

$$D^2 \leq (b - a) \mathcal{A} \quad \mathcal{A}_{min} \Rightarrow D_{min} ?$$

voir appendice 3

*. $\forall \lambda \quad \int_a^b (f(x) + \lambda)^2 dx \geq 0 \Rightarrow (\int_a^b f(x) dx)^2 \leq (\int_a^b 1 dx) \int_a^b (f(x))^2 dx$

Géométrisation de la gravitation classique (version 1)

hypothèse : Soit un champ coulombien ponctuel $\phi(r)$

— Equations classiques avec $m = 1$ (métrique euclidienne)

$$\ddot{x}^i = -\partial^i(\phi) \quad \vec{x} = (x^i) \quad \text{avec } i = 1, 3$$

$$\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G} \rho(r) \quad \rho(r) = M \delta(\vec{r}) \quad \phi(r) = -\frac{\mathcal{G} M}{r}$$

— Géodésique dans l'espace-temps plongé dans $(\lambda, x^0, \vec{x})$ (métrique + - - -)

$$\ddot{q}^\mu = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{q}^\nu \dot{q}^\sigma \quad q^\mu \equiv x^\mu \quad \mu, \nu, \sigma = 0, ..3$$

— Réduction à la "surface" $\lambda = t$

$$c^2 \Gamma_{00}^i = -\partial^i\phi = +\partial_i(\phi) \quad \Gamma_{00}^0 = \Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{ij}^k = 0$$

$$c^2 R_{0j0}^i = -c^2 R_{00j}^i = -\partial_j \partial^i \phi \quad \text{les autres } R_{kjl}^i = 0$$

$$c^2 R_{00} = \Delta\phi = 4\pi\mathcal{G} \rho(r) \quad c^2 \rho(r) \sim T_{00}$$

$$\text{Equation d'Einstein :} \quad R_{00} = \frac{4\pi\mathcal{G}}{c^4} T_{00}$$

Géométrisation de la gravitation classique (version 2)

- Le lagrangien d'un point dans un champ de gravitation

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{m}{2}v^2 - m\phi(\vec{x})$$

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt$$

- On en déduit l'intervalle d'espace temps (temps propre)

$$\mathcal{L} dt = -mc ds \quad \rightarrow \quad ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right) dt$$

puis ds^2 avec les termes dominants

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi)dt^2 - d\vec{x}^2 + \dots$$

- Les symboles de Christoffel

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad g_{ii} = -1 \quad g_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ik} \partial_k g_{00} = -\frac{1}{c^2} \partial^i \phi$$

- remarque : $\frac{\phi}{c^2}$ est sans dimension

$$c^2 R_{00} = \Delta\phi = 4\pi\mathcal{G} \rho(r)$$

La gravitation générale

— Equation d'Einstein Référence [1] *

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - g_{\mu\nu} \Lambda = a T_{\mu\nu}$$

$$R = -a T - 4\Lambda \text{ avec } T \text{ ou } R = \mathbf{Tr} (T) (\text{ou } R) \text{ et } \mathbf{Tr} (X) = g^{\mu\nu} X_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = a T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (a T + 2 \Lambda)$$

— En principe, le programme est simple mais ... :

$$T_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \text{ (courbure)} \rightarrow \text{la métrique (diff 2ième ordre)} \rightarrow \text{géodésique } (t, \vec{x})$$

$$\text{Exemple : } T_{00} \neq 0, \quad \Lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall i, j \in 1, ..3 \quad T_{ij} = T_{0j} = 0$$

$$R = -a (g^{00} T_{00}) - 4 \Lambda$$

$$R_{00} = \frac{a}{2} (T_{00}) - g_{00} \Lambda$$

$$R_{ij} = -g_{ij} \left(\frac{a}{2} (g^{00} T_{00}) + \Lambda \right)$$

— Equation aux dimensions (physiques) : soit à vérifier $R_{ij} \sim L^{-2}$

$$\mathcal{G} \sim \frac{L}{M^2} W \Rightarrow a \sim \frac{L}{W} \quad T_{00} \sim \frac{W}{L^3} \Rightarrow R_{00} \sim a T_{00} \sim \frac{1}{L^2} \quad \text{cqfd}$$

*. $a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} = 2,0 \cdot 10^{-43} \text{ m } J^{-1}$

Cas des métriques scalaires

$$2g_{kk'}\Gamma_{lj}^{k'} = \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} \right) = (\partial_l g_{kj} + \partial_j g_{kl} - \partial_k g_{lj})$$

$2g_{kk'}\Gamma_{(lj)}^{k'}$	0	1	2	3
(00)	$\frac{\partial g_{00}}{\partial q^0}$	$\frac{-\partial g_{00}}{\partial q^1}$	$\frac{-\partial g_{00}}{\partial q^2}$	$\frac{-\partial g_{00}}{\partial q^3}$
(01)	$\frac{\partial g_{00}}{\partial q^1}$	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	0	0
(02)	$\frac{\partial g_{00}}{\partial q^2}$	0	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^0}$	0
(03)	$\frac{\partial g_{00}}{\partial q^3}$	0	0	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^0}$
(11)	$\frac{-\partial g_{11}}{\partial q^0}$	$\frac{+\partial g_{11}}{\partial q^1}$	$\frac{-\partial g_{11}}{\partial q^2}$	$\frac{-\partial g_{11}}{\partial q^3}$
(12)	0	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0
(13)	0	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$	0	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$
(22)	$\frac{-\partial g_{22}}{\partial q^0}$	$\frac{-\partial g_{22}}{\partial q^1}$	$\frac{+\partial g_{22}}{\partial q^2}$	$\frac{-\partial g_{22}}{\partial q^3}$
(23)	0	0	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$
(33)	$\frac{-\partial g_{33}}{\partial q^0}$	$\frac{-\partial g_{33}}{\partial q^1}$	$\frac{-\partial g_{33}}{\partial q^2}$	$\frac{+\partial g_{33}}{\partial q^3}$

métrique scalaire

signes ? si $l = j \neq k$ signe $-$ si $l = j = k$ signe $+$ si $l \neq j$ signe $+$

La métrique à symétrie sphérique

— La métrique : $ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^\lambda dr^2 - (r)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$
Les coordonnées sont :

$$q^0 = ct; q^1 = r; q^2 = \theta; q^3 = \phi$$

$$g_{00} = e^\nu \quad g_{11} = -e^\lambda \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

avec $\lambda(r, t)$ et $\nu(r, t)$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0}$	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1}$	0	0
(01)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1}$	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$-\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	$+\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}$	0	0
(12)	0	0	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0
(13)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$
(22)	0	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0	0
(23)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$
(33)	0	$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$	$-\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$	0

la symétrie sphérique

La symétrie sphérique (suite)

$$g_{00} = e^\nu \quad g_{11} = -e^\lambda \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	$\frac{\dot{\nu}}{2c}$	$\frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}$	0	0
(01)	$\frac{\nu'}{2}$	$\frac{\dot{\lambda}}{2c}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$\frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{(-\nu+\lambda)}$	$\frac{\lambda'}{2}$	0	0
(12)	0	0	r^{-1}	0
(13)	0	0	0	r^{-1}
(22)	0	$-r e^{-\lambda}$	0	0
(23)	0	0	0	$\cot \theta$
(33)	0	$-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$	$-\sin \theta \cos \theta$	0

avec si $f(r, t)$ $\dot{f} = c \partial_0 f$ et $f' = \partial_1 f$

— Equations d'Einstein , dans le vide autour d'une source sphérique :

$$T_{\mu\nu} = 0 = R_{\mu\nu}$$

on ne trouve que 3 équations indépendantes sur $\nu(r,t)$ et $\lambda(r,t)$ (appendice 2)

$$\frac{\partial}{\partial r}(\nu + \lambda) = 0$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

$$e^{-\lambda}(\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 0$$

— Intégration des équations : $\lambda + \nu = f(t)$ et $(1 - e^{-\lambda}) = \frac{C}{r}$

on prend $\nu \rightarrow \nu + f(t) \Rightarrow \nu = -\lambda$ (choix de t) et

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = g_{00} = 1 - \frac{C}{r} \rightarrow 1 - 2 \frac{GM}{r c^2} \text{ quand } r \rightarrow \infty$$

La métrique Schwarzschild (1916) , les trous noirs de rayon r_s

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

voir appendice 2 Une singularité ! pour $r = r_s = \frac{2\mathcal{G} M}{c^2}$

soit pour $\frac{c^2}{2} = \frac{\mathcal{G} M}{r_s}$ (vitesse de libération = c) pour le soleil $M = M_{\odot}$ on a $r_s = 3 \text{ km}$

La métrique de Friedmann Lemaître Robertson Walker

— La métrique *

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \lambda(t)^2 d\Sigma^2$$

Σ ranges over a 3-dimensional space of uniform curvature, that is, elliptical space, Euclidean space, or hyperbolic space. It is normally written as a function of three spatial coordinates, but there are several conventions for doing so.

$d\Sigma$ does not depend on t ? all of the time dependence is in the function $\lambda(t)$, known as the "scale factor".

— hypothèse d'isotropie

$$d\Sigma^2 = A(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

— hypothèse euclidienne

$$d\Sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

voir appendice 1

*. [http ://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker_metric](http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker_metric)

Cas de la métrique de FLRW

$$2g_{kk'}\Gamma_{lj}^{k'} = \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} \right)$$

$2g_{kk'}\Gamma_{(lj)}^{k'}$	0	1	2	3
(00)	0	0	0	0
(01)	0	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	0	0
(02)	0	0	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^0}$	0
(03)	0	0	0	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^0}$
(11)	$-\frac{\partial g_{11}}{\partial q^0}$	$+\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}$	$-\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$	$-\frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$
(12)	0	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	0
(13)	0	$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$	0	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$
(22)	$-\frac{\partial g_{22}}{\partial q^0}$	$-\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$	$+\frac{\partial g_{22}}{\partial q^2}$	$-\frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$
(23)	0	0	$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$	$\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$
(33)	$-\frac{\partial g_{33}}{\partial q^0}$	$-\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$	$-\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$	$+\frac{\partial g_{33}}{\partial q^3}$

La métrique de Friedmann & al dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien

— Avec $g_{00} = 1$ et $g_{ii} = -\lambda(t)^2 \quad \forall i = 1, \dots, 3$

il ne reste que : $\frac{\partial g_{11}}{\partial q^0} = \frac{\partial g_{22}}{\partial q^0} = \frac{\partial g_{33}}{\partial q^0} = -\frac{2\lambda(t)\dot{\lambda}(t)}{c}$

$\Gamma_{(l_j)}^{k'}$	0	1	2	3
(00)	0	0	0	0
(01)	0	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0	0
(02)	0	0	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0
(03)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$
(11)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{11}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	0	0	0
(12)	0	0	0	0
(13)	0	0	0	0
(22)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{22}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	0	0	0
(23)	0	0	0	0
(33)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{33}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	0	0	0

— Les composantes non-nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ sont les suivantes :

$$R_{00} = \sum_{\ell \neq 0} \partial_\ell \Gamma_{00}^\ell - \partial_0 \Gamma_{0\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{00}^s - \Gamma_{0s}^\ell \Gamma_{0\ell}^s = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) + \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 \right)$$

$$R_{ii} = \sum_{\ell \neq i} \partial_\ell \Gamma_{ii}^\ell - \partial_i \Gamma_{i\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{ii}^s - \Gamma_{is}^\ell \Gamma_{i\ell}^s = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} (\lambda \dot{\lambda}) + (\dot{\lambda})^2 \right) \quad \forall i = 1..3$$

Prédictions de la gravitation générale (modèle d'Einstein-de Sitter)

— Equations d'Einstein avec : $T_{00} = \rho(t) c^2$ $T_{ij} = 0$ $\Lambda = 0$ $a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}$

$$R_{00} = \frac{a}{2} \rho(t) c^4 = -3 \frac{\ddot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}$$
$$\sum_{i>0} R_i^i = -\frac{3a}{2} \rho(t) c^4 = -3 \left(\frac{\ddot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + 2 \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \right)^2 \right)$$

— Changement de fonction avec $h(t)$, comme Hubble : $h = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$.

$$-3 (\dot{h} + h^2) = \frac{a}{2} \rho(t) c^4 = +\frac{3}{2} h^2 = -\dot{h}$$

— Solution des équations (2ième ordre , équations de Friedmann)

$$2\dot{h} + 3h^2 = 0 \quad h^{-1} = \frac{3}{2} t + 0 \quad \rho(t) = \frac{3}{8\pi\mathcal{G}} h^2$$

— Conséquences

$$h^{-1} = \frac{3}{2} t \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 h \Rightarrow \rho \lambda^3 = cte \quad \lambda(t) \propto (t)^{2/3}$$

— **Le Big bang** : la singularité à $t = 0$!

$$t \rightarrow 0 \quad h \sim t^{-1} \rightarrow \infty \quad \rho \sim t^{-2} \rightarrow \infty \quad \lambda \sim t^{2/3} \rightarrow 0$$

Quelques résultats numériques

— constante de Hubble : les mesures les plus récentes, en 2008, donnent *

$$h_0 = 80,0 \pm 2,7 \text{ (km/s)/Mpc} \quad h_0^{-1} = 12,2 \cdot 10^9 \text{ a}$$

— dans le modèle présenté : univers plat, homogène , en expansion

— La densité d'énergie est déterminée et dite densité critique[†] :

$$\rho_0 c^2 = \frac{3c^2}{8\pi G} h_0^2 = 6,74 \text{ GeV}/m^3 \sim 7,2 \text{ (nucléons) } /m^3$$

— L'"âge" de l'univers est

$$t_0 = \frac{2}{3} h_0^{-1} = 8,0 \cdot 10^9 \text{ a}$$

*. $Mpc = \text{Mégaparsec} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ km}$

†. $m_p = 0,938 \text{ GeV}/c^2$ (proton) $GeV = \text{Giga électron-volt} = 1,602 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

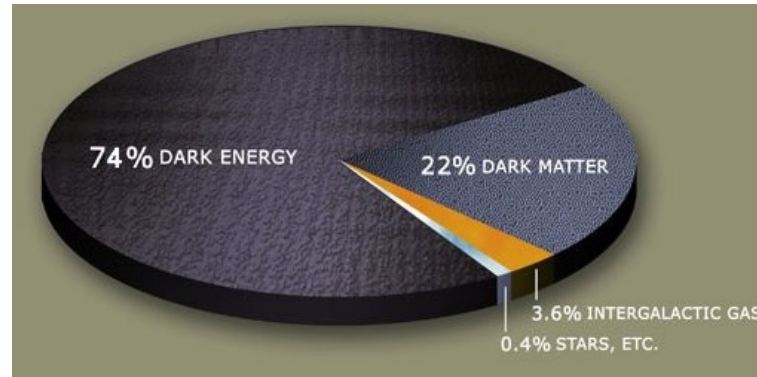


figure 6 (réf wikipedia) ‡

Estimated relative distribution for components of the energy density of the Universe :

- Dark energy dominates the total energy (74%)
- while dark matter (22%) constitutes most of the mass.
- Of the remaining baryonic matter (4%), only one tenth is compact.

On 21 March 2013, the European-led research team behind the Planck cosmology probe released new data refining these values to 4.9% ordinary matter, 26.8% dark matter and 68.3% dark energy.

‡. http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann_equations

Quantum gravity et théories de jauge

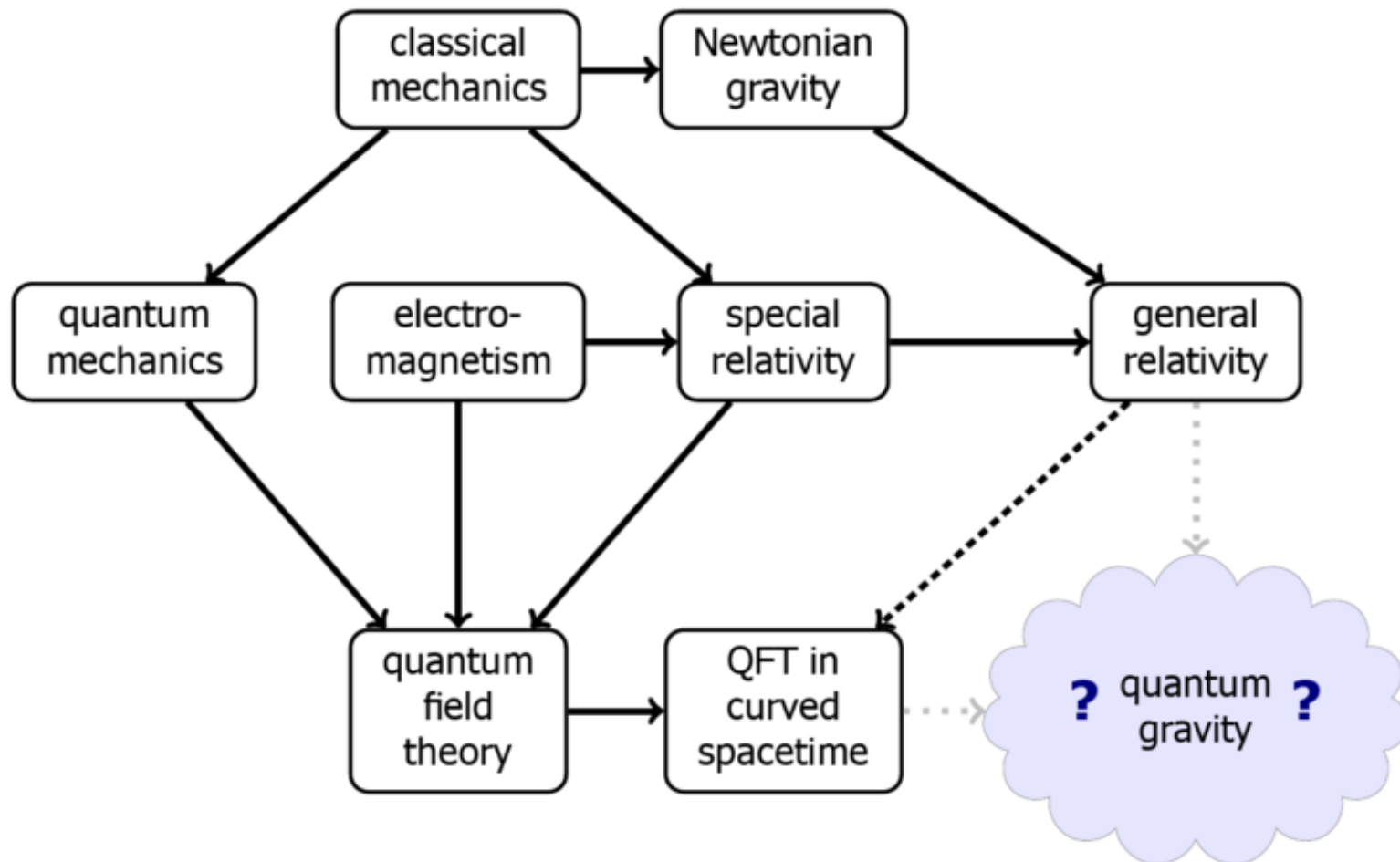


figure 6 *

*. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Quantum_gravity.png

Conclusion

quelques pistes pour poursuivre l'étude

- Les tests de la relativité générale
- Les modèles cosmologiques réalistes
- La limite classique
- Les marées en relativité générale
- Electromagnétisme et gravitation classiques
- La gravitation quantique

références

géométrisation de la gravitation classique	[3] page 289, [4] page 126, [1] page 326,
la gravitation générale	[1] page 363, [3] page 405, [4] page 125,
wikipedia	http ://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_ field_ e
La métrique à symétrie sphérique	[1] page 374, [4] page 135
La métrique de Friedmann & al	[4] page 220, [1] pages 442-444

- 0 L. Landau & E. Lifchitz , *Mécanique* , Ed MIR 1969
- 1 L. Landau & E. Lifchitz , *Théorie des champs* , Ed MIR 1970
- 2 R. Feynman , *Leçons sur la gravitation* , Ed Odile Jacob 2001
- 3 C. Misner & al , *Gravitation* , Ed W.H. Freeman & Co 1973
- 4 C.D. Walecka , *Introduction to general relativity* , Ed World Scientific 2007
- 5 D. Bleeker , *Gauge theory and variational principles* , Ed MIR 1969
- 6 C. Nash & al , *Topology and geometry for physicists* , Ed Dover 2011
- 7 K.L. Wardle , *Differential geometry* , Ed Dover 2008
- 8 D.F. Lawden , *Introduction to tensor calculus , relativity and cosmology* , Ed Dover 2002
- 9 - , [http ://scienceworld.wolfram.com/physics/](http://scienceworld.wolfram.com/physics/) , www
- 10 - , [http ://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations /](http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations/) , www

Appendice 1 : : Les équations de Friedmann

- La métrique de Robertson Walker (réf 1 page 442 et suivantes)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \lambda(t)^2 d\Sigma^2$$

- hypothèse d'isotropie dans $\mathbb{R}^3$:

$$d\Sigma^2 = A(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \text{où} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

$$\text{avec } A(r) = (1 - k r^2)^{-1}$$

$$R \text{ (courbure dans } \mathbb{R}^3 \text{)} = -6k$$

- Les coordonnées sont :

$$q^0 = ct; q^1 = r; q^2 = \theta; q^3 = \phi$$

$$g_{00} = 1; g_{11} = -\lambda(t)^2 A(r); g_{22} = -\lambda(t)^2 r^2; g_{33} = -\lambda(t)^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

Calcul des symboles de Christoffel

$$2\Gamma_{lj}^k = g^{kk'} (\partial_l g_{k'j} + \partial_j g_{k'l} - \partial_{k'} g_{lj})$$

$$g_{00} = 1; g_{11} = -\lambda(t)^2 A(r); g_{22} = -\lambda(t)^2 r^2; g_{33} = -\lambda(t)^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

$$k \neq j \quad \Gamma_{jj}^k = -\frac{1}{2g_{kk}} \partial_k g_{jj} \quad \Gamma_{kk}^k = +\frac{1}{2g_{kk}} \partial_k g_{kk} \quad \Gamma_{kj}^k = +\frac{1}{2g_{kk}} \partial_j g_{jk}$$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	0	0	0	0
(01)	0	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0	0
(02)	0	0	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0
(03)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^0} = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$
(11)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{11}}{\partial q^0} = -\frac{g_{11}}{g_{00}} \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} = \frac{A'}{2A}$	0	0
(12)	0	0	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} = \frac{1}{r}$	0
(13)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1} = \frac{1}{r}$
(22)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{22}}{\partial q^0} = -\frac{g_{22}}{g_{00}} \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{-\partial g_{22}}{\partial q^1} = -\frac{g_{22}}{g_{11}} \frac{1}{r}$	0	0
(23)	0	0	0	$\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2} = \frac{\cot(\theta)}{1}$
(33)	$\frac{1}{2g_{00}} \frac{-\partial g_{33}}{\partial q^0} = -\frac{g_{33}}{g_{00}} \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$\frac{1}{2g_{11}} \frac{-\partial g_{33}}{\partial q^1} = -\frac{g_{33}}{g_{11}} \frac{1}{r}$	$\frac{1}{2g_{22}} \frac{-\partial g_{33}}{\partial q^2} = -\frac{g_{33}}{g_{22}} \frac{\cot(\theta)}{1}$	0

$$|(2g_{ii})^{-1} \partial_0 g_{ii}| = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda} \quad |(2g_{ii})^{-1} \partial_1 g_{ii}| = (2A)^{-1} A' \text{ ou } r^{-1} \quad |(2g_{33})^{-1} \partial_2 g_{33}| = \cot(\theta)$$

Calcul des symboles de Christoffel (suite)

$$q^0 = ct \quad q^1 = r \quad q^2 = \theta \quad q^3 = \phi$$

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = -\lambda(t)^2 A(r) \quad g_{22} = -\lambda(t)^2 r^2 \quad g_{33} = -\lambda(t)^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	0	0	0	0
(01)	0	$\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0	0
(02)	0	0	$\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	0
(03)	0	0	0	$\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$
(11)	$A \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	$\frac{A'}{2A}$	0	0
(12)	0	0	$\frac{1}{r}$	0
(13)	0	0	0	$\frac{1}{r}$
(22)	$r^2 \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	$-rA^{-1}$	0	0
(23)	0	0	0	$\cot(\theta)$
(33)	$r^2 \sin^2(\theta) \frac{\dot{\lambda}\lambda}{c}$	$-rA^{-1} \sin^2(\theta)$	$-\sin(\theta) \cos(\theta)$	0

Le tenseur de Ricci

$$R_{ik} = \partial_\ell \Gamma_{ik}^\ell - \partial_k \Gamma_{i\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^\ell \Gamma_{i\ell}^s = \nabla_{\ell s}^\ell \Gamma_{ik}^s - \nabla_{ks}^\ell \Gamma_{i\ell}^s$$

- Les composantes non-nulles du tenseur de Ricci R_{ik} $i, k \in 0, \dots, 3$
- pour $i=k=0$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\ell \Gamma_{00}^\ell - \partial_0 \Gamma_{0\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{00}^s - \Gamma_{0s}^\ell \Gamma_{0\ell}^s \\ &= -\sum_{\ell=1..3} (\partial_0 \Gamma_{0\ell}^\ell - \Gamma_{0\ell}^\ell \Gamma_{0\ell}^\ell) = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) + \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 \right) = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

- pour $i=k=1$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\ell \Gamma_{11}^\ell - \partial_1 \Gamma_{1\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{11}^s - \Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1\ell}^s \\ &= \partial_\ell \Gamma_{11}^\ell - \partial_1 (\Gamma_{1\ell}^\ell) + (\Gamma_{\ell 0}^\ell) \Gamma_{11}^0 + (\Gamma_{\ell 1}^\ell) \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 - (\Gamma_{1\ell}^\ell \Gamma_{1\ell}^\ell) \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 (\Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell=2,3} + (\Gamma_{\ell 0}^\ell)_{\ell=2,3} \Gamma_{11}^0 + (\Gamma_{\ell 1}^\ell)_{\ell=2,3} \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 - (\Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell=2,3}^2 \end{aligned}$$

$\Gamma_{11}^0 = \frac{A}{c} \lambda \dot{\lambda}$	$(\Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell=2,3} = \frac{2}{r}$	$(\Gamma_{\ell 0}^\ell)_{\ell=2,3} = \frac{2\dot{\lambda}}{c\lambda}$
$\Gamma_{11}^1 = \frac{A'}{2A}$	$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$(\Gamma_{1\ell}^\ell)_{\ell=2,3}^2 = \frac{2}{r^2}$

- Calcul de R_{11}

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{A}{c^2} \frac{d}{dt} (\lambda \dot{\lambda}) + \frac{2A}{c^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{A'}{A} \frac{1}{r} - \frac{A}{c^2} \dot{\lambda}^2 = \frac{A}{c^2} (\lambda \ddot{\lambda}) + \frac{2A}{c^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{A'}{A} \frac{1}{r} \\ &= \frac{A\lambda^2}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + 2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

$$R_{ik} = \partial_\ell \Gamma_{ik}^\ell - \partial_k \Gamma_{il}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^\ell \Gamma_{il}^s = \nabla_{\ell s}^\ell \Gamma_{ik}^s - \nabla_{ks}^\ell \Gamma_{il}^s$$

— pour i=k=2

$$\begin{aligned} R_{22} &= \sum_{\ell \neq 2} \partial_\ell \Gamma_{22}^\ell - \partial_2 \Gamma_{2\ell}^\ell + \Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{22}^s - \Gamma_{2s}^\ell \Gamma_{2\ell}^s \\ &= \sum_{\ell \neq 2} (\partial_\ell \Gamma_{22}^\ell - \partial_2 \Gamma_{2\ell}^\ell) + (\Gamma_{\ell s}^\ell \Gamma_{22}^s)_{s=0..3} - (\Gamma_{2s}^\ell \Gamma_{2\ell}^s)_{s=0..3} \\ &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + 0 + ((\Gamma_{\ell 0}^\ell)_{\ell=1,3} \Gamma_{22}^0) + ((\Gamma_{\ell 1}^\ell)_{\ell=1,3} \Gamma_{22}^1) \\ &\quad - (\Gamma_{22}^\ell \Gamma_{2\ell}^2)_{\ell=0,1} - (\Gamma_{23}^3)^2 \end{aligned}$$

$\Gamma_{22}^0 = \frac{r^2}{c} \lambda \dot{\lambda}$	$\Gamma_{32}^3 = \cot \theta$	$\Gamma_{11}^1 = \frac{A'}{2A}$	$\Gamma_{13}^3 = r^{-1}$
$\Gamma_{22}^1 = -rA^{-1}$	$(\Gamma_{\ell 0}^\ell)_{\ell=1,3} = \frac{2\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$\Gamma_{12}^2 = r^{-1}$

— Calcul de R_{22} avec $A^{-1} = 1 - k r^2$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{r^2}{c^2} (\ddot{\lambda} \lambda + (\dot{\lambda})^2) + (-rA^{-1})' - \cot'(\theta) \\ &\quad + 2 \frac{r^2}{c^2} (\dot{\lambda})^2 - rA^{-1} \left(\frac{A'}{2A} + r^{-1} \right) - \frac{r^2}{c^2} (\dot{\lambda})^2 + A^{-1} - \cot^2(\theta) \\ R_{22} &= \frac{r^2}{c^2} (\lambda \ddot{\lambda} + 2(\dot{\lambda})^2) - \frac{r}{2} (A^{-1})' - A^{-1} + 1 \\ R_{22} &= \frac{r^2}{c^2} \lambda^2 \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + 2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

$$R_{ik} = \partial_\ell \Gamma^\ell_{ik} - \partial_k \Gamma^\ell_{i\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^\ell_{ks} \Gamma^s_{i\ell} = \nabla^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{ik} - \nabla^\ell_{ks} \Gamma^s_{i\ell}$$

— pour i=k=3

$$\begin{aligned} R_{33} &= \sum_{\ell \neq 3} \partial_\ell \Gamma^\ell_{33} - \partial_3 \Gamma^\ell_{3\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{33} - \Gamma^\ell_{3s} \Gamma^s_{3\ell} \\ &= \sum_{\ell \neq 3} (\partial_\ell \Gamma^\ell_{33} - \partial_3 \Gamma^\ell_{3\ell}) + (\Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{33})_{s=0..3} - (\Gamma^\ell_{3s} \Gamma^s_{3\ell})_{s=0..3} \\ &= \sum_{\ell \neq 3} \partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} - 0 + ((\Gamma^\ell_{\ell 0})_{\ell=1,2} \Gamma^0_{33}) + ((\Gamma^\ell_{\ell 1})_{\ell=1,2} \Gamma^1_{33}) \\ &\quad + 0 - (\Gamma^\ell_{33} \Gamma^3_{3\ell})_{\ell=0,1,2} - 0 \end{aligned}$$

$\Gamma^0_{33} = r^2 \sin^2(\theta) (\frac{\dot{\lambda}}{c})$	$\Gamma^1_{33} = -r A^{-1} \sin^2(\theta)$	$\Gamma^2_{33} = -\sin(\theta) \cos(\theta)$	$\Gamma^3_{32} = \cot(\theta)$
$\Gamma^3_{30} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda c}$	$(\Gamma^\ell_{\ell 0})_{\ell=1,2} = \frac{2\dot{\lambda}}{c\lambda}$	$(\Gamma^\ell_{\ell 1})_{\ell=1,2} = \frac{A'}{2A} + r^{-1}$	$\Gamma^3_{13} = r^{-1}$

— Calcul de R_{33} avec $A^{-1} = 1 - k r^2$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{r^2}{c^2} \sin^2(\theta) (\ddot{\lambda} \lambda + (\dot{\lambda})^2) + \sin^2 \theta (-r A^{-1})' - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &\quad + 2 \frac{r^2}{c^2} (\dot{\lambda})^2 \sin^2 \theta - r A^{-1} \sin^2 \theta (\frac{A'}{2A} + r^{-1}) - \frac{r^2}{c^2} \sin^2 \theta (\dot{\lambda})^2 + A^{-1} \sin^2 \theta \\ R_{33} &= \frac{r^2}{c^2} \sin^2 \theta (\lambda \ddot{\lambda} + 2(\dot{\lambda})^2) - \frac{r}{2} \sin^2 \theta (A^{-1})' - A^{-1} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \\ R_{33} &= \frac{r^2}{c^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \left((\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}) + 2(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda})^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Les équations

— Hypothèses :

$$T_{00}(t) = \rho(t) c^2 \text{ (densité d'énergie)} \quad T_{ij} = T_{0j} = 0 \quad a = \frac{8\pi G}{c^4} \\ -6k = \text{(courbure dans } \mathbb{R}^3 \text{)} \quad \Lambda \neq 0 = \text{cte cosmologique}$$

— Equations d'Einstein

$$R_{00} = \frac{a}{2} T_{00} - \Lambda = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \\ \sum_{i=1..3} g^{ii} R_{ii} = -3\left(-\frac{a}{2} T_{00} + \Lambda\right) = -\frac{3}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right) + 2\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \frac{2}{\lambda^2} k c^2 \right) \\ R = -\frac{6}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right) + \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \frac{k c^2}{\lambda^2} \right) = -(a T_{00} + 4\Lambda)$$

— Equations de Friedmann *

sur les fonctions $\lambda(t)$, facteur d'échelle et $T_{00}(t)$.

$$\left(\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}\right)^2 + \frac{k}{\lambda^2} = \left(\frac{1}{3}\right)(a T_{00} + \Lambda)$$

$$\left(\frac{\ddot{\lambda}}{c^2\lambda}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{a}{2} T_{00} + \Lambda\right)$$

$$\text{ou bien en éliminant } T_{00} : 2 \frac{\ddot{\lambda}}{c^2\lambda} + \left(\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}\right)^2 + \frac{k}{\lambda^2} = \Lambda$$

*. [http ://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric](http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric)

— En fonction de $h(t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ (comme Hubble)

$$h^2(t) + \frac{kc^2}{\lambda^2} = \frac{c^2}{3}(a T_{00} + \Lambda) \quad \dot{h}(t) + h^2(t) = \frac{c^2}{3}\left(-\frac{a}{2} T_{00} + \Lambda\right)$$

— En éliminant T_{00} ou Λ on obtient †

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) + \frac{3}{2}h^2(t) + \frac{1}{2}\frac{kc^2}{\lambda^2(t)} &= +\frac{c^2}{2} \Lambda \\ -\dot{h}(t) + \frac{kc^2}{\lambda^2(t)} &= \frac{ac^2}{2} T_{00} \\ R &= -3 \left(\frac{h^2(t)}{c^2} + \frac{k}{\lambda^2} + \Lambda \right) = -(a T_{00} + 4\Lambda) \end{aligned}$$

— Cas de l'univers stationnaire :

$$\ddot{\lambda} = \dot{\lambda} = 0 \quad aT_{00} = \frac{2k}{\lambda^2} \quad R = -\frac{6k}{\lambda^2} \quad \Lambda = \frac{k}{\lambda^2} \quad \lambda \sim 1$$

— Cas de l'univers plat composé de matière noire statique :

$$\Lambda = k = 0 \quad -\dot{h}(t) = \frac{ac^2}{2} T_{00} \quad h^{-1}(t) \sim \frac{3}{2}t \quad \lambda \sim t^{2/3}$$

— Cas de l'univers inflationnaire :

$$aT_{00} = 0 \quad k = 0 \quad \Lambda > 0 \quad \dot{h}(t) = 0 \quad 3 h^2(t) = c^2 \Lambda \Rightarrow \lambda \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right)$$

†. Le cas étudié dans le texte était avec $k = 0$, $\Lambda = 0$ et $T_{00} = \rho c^2$

Appendice 2 : La métrique de Schwarzschild

— soit $g_{00} = e^\nu$ $g_{11} = -e^\lambda$ $g_{22} = -r^2$ $g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$

$\Gamma_{(lj)}^k$	0	1	2	3
(00)	$\frac{\dot{\nu}}{2c}$	$\frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}$	0	0
(01)	$\frac{\nu'}{2}$	$\frac{\dot{\lambda}}{2c}$	0	0
(02)	0	0	0	0
(03)	0	0	0	0
(11)	$\frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{(-\nu+\lambda)}$	$\frac{\lambda'}{2}$	0	0
(12)	0	0	r^{-1}	0
(13)	0	0	0	r^{-1}
(22)	0	$-r e^{-\lambda}$	0	0
(23)	0	0	0	$\cot \theta$
(33)	0	$-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$	$-\sin \theta \cos \theta$	0

— avec si $f(r, t)$ $\dot{f} = c \partial_0 f$ et $f' = \partial_1 f$

— Le tenseur de Ricci

$$R_{ik} = R_{ilk}^{\ell} = \partial_{\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} - \partial_k \Gamma_{i\ell}^{\ell} + \Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{i\ell}^s \Gamma_{ks}^{\ell}$$

— Les composantes non identiquement nulles du tenseur de Ricci sont les suivantes :

$$R_{01} = \sum_l \partial_l \Gamma_{01}^{\ell} - \partial_1 \Gamma_{0\ell}^{\ell} + \Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{01}^s - \Gamma_{0s}^{\ell} \Gamma_{1\ell}^s$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} \partial_l \Gamma_{ii}^{\ell} - \partial_i \Gamma_{i\ell}^{\ell} + \Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{ii}^s - \Gamma_{is}^{\ell} \Gamma_{i\ell}^s \quad i = 0, 1, 2$$

Remarque : $\forall i \quad \Gamma_{0i}^{\ell} \neq 0 \Rightarrow \ell = 0, 1$

— Calcul de R_{01}

$$R_{01} = \partial_0 \Gamma_{01}^0 - \partial_1 \Gamma_{00}^0 + (\Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{01}^s)_{s=0,1} - (\Gamma_{0s}^{\ell} \Gamma_{1\ell}^s)_{\ell=0,1}$$

$$R_{01} = 0 + (\Gamma_{\ell 0}^{\ell} \Gamma_{01}^0)_{\ell=0,1} + (\Gamma_{\ell 1}^{\ell} \Gamma_{01}^1)_{\ell=0,1..} - (\Gamma_{0s}^0 \Gamma_{10}^s)_{s=0,1} - (\Gamma_{0s}^1 \Gamma_{11}^s)_{s=0,1..}$$

$$R_{01} = 0 + (\Gamma_{\ell 1}^{\ell} \Gamma_{01}^1)_{\ell=0,1..} - (\Gamma_{0s}^1 \Gamma_{11}^s)_{s=0,1}$$

$$R_{01} = \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + 2r^{-1} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2c} - \left(\frac{\nu' \dot{\lambda}}{4c} + \frac{\dot{\lambda} \lambda'}{4c} \right) = r^{-1} \frac{\dot{\lambda}}{c}$$

Dans le vide $R_{01} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0$

— Calcul de R_{00}

$$R_{00} = \sum_{l \neq 0} \partial_l \Gamma_{00}^{\ell} - \partial_0 \Gamma_{0\ell}^{\ell} + \Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{00}^s - \Gamma_{0s}^{\ell} \Gamma_{0\ell}^s$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{\ell s}^{\ell} \Gamma_{00}^s)_{s=0,1} - (\Gamma_{0s}^{\ell} \Gamma_{0\ell}^s)_{\ell=1}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{\ell 0}^{\ell} \Gamma_{00}^0)_{\ell=1} + (\Gamma_{\ell 1}^{\ell} \Gamma_{00}^1)_{\ell \neq 0} - (\Gamma_{0s}^1 \Gamma_{01}^s)_{s=0,1}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{10}^1 \Gamma_{00}^0) + (\Gamma_{\ell 1}^\ell \Gamma_{00}^1)_{\ell=1,2,3} - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1) - (\Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0)$$

$$R_{00} = \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}\right)' - \frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + \left(\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2}\right) + \left(\frac{\lambda'}{2} + 2r^{-1}\right)\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2 - \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 e^{\nu-\lambda}$$

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'(\nu' - \lambda')}{4} + r^{-1}\nu'\right) - \frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + \left(\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2}\right) - \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2$$

— Calcul de R_{11}

$$R_{11} = \sum_{l \neq 1} \partial_l \Gamma_{11}^\ell - \partial_1 \Gamma_{1l}^\ell + \Gamma_{ls}^\ell \Gamma_{11}^s - \Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1l}^s$$

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - (\partial_1 \Gamma_{1l}^\ell)_{l=0,2,3} + (\Gamma_{ls}^\ell \Gamma_{11}^s)_{s=0,1} - (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1l}^s)_{l \neq 1}$$

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - (\partial_1 \Gamma_{1l}^\ell)_{l \neq 1} + (\Gamma_{\ell 0}^\ell \Gamma_{11}^0)_{\ell=0} + (\Gamma_{\ell 1}^\ell \Gamma_{11}^1)_{\ell \neq 1} - (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1l}^s)_{l \neq 1}$$

$$(\Gamma_{1l}^\ell)_{l \neq 1} = \frac{\nu'}{2} + 2r^{-1} \quad (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1l}^s)_{l \neq 1} = (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1) + (\Gamma_{1s}^\ell \Gamma_{1l}^s)_{l=s=0,2,3}$$

$$R_{11} = \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{(\lambda-\nu)}\right) - \left(\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1}\right)' + \left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} e^{(\lambda-\nu)}\right) + \left(\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1}\right)\frac{\lambda'}{2} -$$

$$- \left(\left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 + 2(r^{-1})^2 + \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2 e^{(\lambda-\nu)}\right)$$

$$R_{11} = \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} e^{(\lambda-\nu)}\right) - \frac{\nu''}{2} - \left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} e^{(\lambda-\nu)}\right) + \left(\frac{\nu'}{2} + 2r^{-1}\right)\frac{\lambda'}{2} - \left(\left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 - \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2 e^{(\lambda-\nu)}\right)$$

$$R_{11} = e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4c^2} + \left(\frac{\dot{\lambda}}{2c}\right)^2\right) - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + r^{-1}\lambda' - \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2$$

conclusion :

$$R_{11}e^{\nu-\lambda} + R_{00} = r^{-1}(\nu' + \lambda')e^{(\nu-\lambda)}$$

Dans le vide $R_{00} = R_{11} = 0 \Rightarrow \nu' + \lambda' = 0$ **et** $-\nu'' - \nu'^2 - 2r^{-1}\nu' = 0$

— Calcul de R_{22}

$$R_{22} = \sum_{l \neq 2} \partial_l \Gamma_{22}^l - \partial_2 \Gamma_{2l}^l + \Gamma_{ls}^l \Gamma_{22}^s - \Gamma_{2s}^l \Gamma_{2l}^s$$

$$R_{22} = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + (\Gamma_{l1}^l \Gamma_{22}^1)_{l \neq 2} - (\Gamma_{2s}^l \Gamma_{2l}^s)_{l \neq 2}$$

$$(\Gamma_{1l}^l)_{l \neq 2} = \frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \quad (\Gamma_{2s}^l \Gamma_{2l}^s)_{l \neq 2} = \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{l1}^l)_{l \neq 2} - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3)$$

$$R_{22} = (-re^{-\lambda})' + (1 + \cot^2(\theta)) + (-re^{-\lambda})\left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1}\right) - (-e^{-\lambda} + \cot^2(\theta))$$

$$R_{22} = 1 - re^{-\lambda}\left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + r^{-1}\right)$$

Dans le vide $R_{22} = 0 \Rightarrow 1 + e^{-\lambda}(r\lambda' - 1) = 1 - (re^{-\lambda})' = 0$

— Calcul de R_{33}

$$R_{33} = \sum_{l \neq 3} \partial_l \Gamma_{33}^l - \partial_3 \Gamma_{3l}^l + \Gamma_{ls}^l \Gamma_{33}^s - \Gamma_{3s}^l \Gamma_{3l}^s$$

remarquons : $\partial_3 = 0$ $\Gamma_{33}^l \Rightarrow l = 1, 2$ $(\Gamma_{3s}^l)_{l \neq 3} \Rightarrow s = 3$

$$R_{33} = (\partial_l \Gamma_{33}^l)_{l=1,2} - 0 + \sum_{l \neq 3} (\Gamma_{ls}^l \Gamma_{33}^s)_{s=1,2} - (\Gamma_{3s}^l \Gamma_{3l}^s)_{s \neq 0}$$

$$(\Gamma_{1l}^l)_{l \neq 3} = \frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \quad (\Gamma_{2l}^l)_{l \neq 3} = 0 \quad (\Gamma_{3s}^l \Gamma_{3l}^s)_{l \neq 3} = \Gamma_{33}^1 \Gamma_{3,1}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{33} = \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{\ell 1}^\ell)_{\ell \neq 3} + 0 - (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{3,1}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3)$$

$$R_{33} = (-r \sin^2(\theta) e^{-\lambda})' + (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) + (-r \sin^2(\theta) e^{-\lambda}) \left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} + r^{-1} \right) - (-\sin^2(\theta) e^{-\lambda} - \cos^2(\theta))$$

$$R_{33} = \sin^2(\theta) \left(1 - r e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + r^{-1} \right) \right) = \sin^2(\theta) R_{22}$$

la solution en λ satisfait donc à

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \nu' = -\lambda' \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{C}{r} \quad \nu'' + \nu'^2 + 2r^{-1}\nu' = 0$$

— La métrique de Schwarzschild est de la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

(si on fait le choix $\nu + \lambda = f(t) = 0$)

$C = r_s$ est le rayon de Schwarzschild $= \frac{2G}{c^2} M$

Annexe 3 : Equation des géodésiques

— Hypothèses :celles de la géométrie différentielle de Riemann

1. $\exists$ une métrique symétrique définie en tout point M de la variété q_μ

$$g_{\mu\nu}(q)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(q) dq^\mu dq^\nu \geq 0$$

$$dM = e_\mu dq^\mu$$

2. Le symbole de Christoffel $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$

$$de_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho dq^\nu e_\rho \quad \text{ou} \quad \dot{e}_\rho = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{q}^\nu e_\mu$$

$$\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial q^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\sigma} \right) = \Gamma_{\nu\rho}^\mu$$

noté également

$$\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma})$$

et obéissant à l'équation

$$2 g_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\nu}^\mu = (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma})$$

3. soit un segment de courbe (paramètre τ) limité par les points M_1 et M_2
on définit l'action $\mathcal{A}$ et la "longueur" $\mathcal{D}$ de l'élément de trajectoire

$$\mathcal{A} = \int_1^2 g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu d\tau \quad \text{avec } \dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{d\tau^2}$$

$$\mathcal{D} = \int_1^2 \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} d\tau$$

on recherche par les méthodes variationnelles les courbes extrémales pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$?

4. si τ est l'abscisse curviligne sur la courbe :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 1$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}_{min} \equiv \mathcal{D}_{min}$$

5. A cause du théorème de Cauchy-Schwartz, en général, on a :

$$\mathcal{D}^2 \leq (\tau_2 - \tau_1) \times \mathcal{A}$$

Equation d'Euler-Lagrange

- Equation d'Euler-Lagrange sur une fonction $f(x, \dot{x}, \tau)$: changement de notation $q \equiv x$

$$\mathcal{A} = \int f \, d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- La dérivation par τ :

$$\frac{d}{d\tau} = \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Introduisons

$$\mathcal{U} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

- Application à l'"action" $\mathcal{A}$
 - Alors

$$f = \mathcal{U}^2 = g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

- L'équation d'Euler - Lagrange dans ce cas :

$$2 g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2 g_{\mu\nu,\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = g_{\rho\nu,\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

- soit

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu = -\frac{1}{2} (-g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = -g_{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (1)$$

— Application à la "distance" $\mathcal{D}$ (réf*)

— Alors

$$f = \mathcal{U} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

— La dérivation de $\mathcal{U}$:

$$d\mathcal{U}^2 = 2 \mathcal{U} d\mathcal{U}$$

— L'équation d'Euler - Lagrange sur $\mathcal{D}$ devient dans ce cas :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{d}{d\tau} \left((2 \mathcal{U})^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - (2 \mathcal{U})^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x}$$

— soit

$$(2 \mathcal{U}) \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right) = - \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U})}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x} \right)$$

— L'équation de la géodésique s'écrira donc

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U}^2)}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right)$$

soit

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U})}{d\tau} \dot{x}^\mu$$

— ou encore plus explicitement si $\tau \equiv s$ (car $\mathcal{U}^2 = 1$) :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (2)$$

*. [http : en.wikipedia.org/wiki/Geodesics](http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics) ou [http : en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity](http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity)