

Université de Caen

LMNO

Le tenseur Energie-Impulsion

C. LONGUEMARE

28 octobre 2014

Résumé : Qu'est-ce que $T^{\mu\nu}$ dans l'équation d'Einstein ?

— Equation d'Einstein Référence [1] *

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr } R \right) - g_{\mu\nu} \Lambda = a T_{\mu\nu}$$

— Conséquences

$$\text{Tr } R = -a \text{Tr } T - 4\Lambda$$

$$R_{00} = a \left(T_{00} - \frac{g_{00}}{2} \text{Tr } T \right) - g_{00} \Lambda$$

— En principe, le programme est simple mais ...

$$T_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \text{ (courbure)} \rightarrow g_{\mu\nu} \text{ (eq diff)} \rightarrow \text{géodésique} \rightarrow T_{\mu\nu}$$

— Equation aux dimensions (physiques) soit à vérifier $R_{ij} \sim L^{-2}$

$$a = 8\pi\mathcal{G} c^{-4}$$

$$\mathcal{G} \sim LM^{-2} W \Rightarrow a \sim LW^{-1} \quad T_{00} \sim WL^{-3} \Rightarrow R_{00} \sim a T_{00} \sim L^{-2}$$

$$R \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2} g$$

cqfd

$$* . \quad a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \sim L W^{-1} = 2,0 \cdot 10^{-43} \text{ m } J^{-1}$$

Conventions

$c = \hbar = 1$ sauf ...

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$

$$\epsilon^{0123} = 1 \text{ et } \epsilon^{123} = 1$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $i = 1, 2, 3$

$$p^2 = m^2 c^4 \geq 0$$

$$c^2 \tau^2 = x_0^2 - x^2 \geq 0$$

unités électromagnétiques

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137,036} \sim 10^{-2}$$

Statique

$$\Delta V = -\rho \Rightarrow W_{EM} = q V = \frac{qq'}{4\pi r}$$

$$\vec{F}_{EM} = \frac{qq'}{4\pi r^2} \vec{u}$$

Gravitation

$$\Delta \phi = \rho \Rightarrow W_{Gr} = m \phi = -\mathcal{G} \frac{mm'}{4\pi r}$$

$$\vec{F}_{Gr} = -\mathcal{G} \frac{mm'}{4\pi r^2} \vec{u}$$

Plan

1. La conservation de l'énergie
2. La conservation de l'énergie-impulsion classique
3. Le théorème de Noether
Le tenseur énergie-impulsion en théorie des champs.
4. Les fluides acoustiques
5. Les ondes électromagnétiques classiques
6. La gravitation relativiste d'Einstein
 - propriétés générales de $T_{\mu\nu}$
 - cas d'un gaz de poussières à la pression p
 - cas d'un gaz relativiste
7. Différentes hypothèses en cosmologie

Conservation de l'énergie $\leftrightarrow$ invariance / temps

1. Un point matériel (m) dans un potentiel $U(x)$ $x \in R(3)$
2. l'espace de phase est $(x, \dot{x})$ ou (x, p)

— Le formalisme lagrangien et hamiltonien

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x)$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

— Dynamique : principe de moindre action

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt$$

— Conséquence

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(x, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \mathcal{L}(x, \dot{x}, t') = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$$

L'énergie-impulsion $\leftrightarrow$ invariance / espace-temps

1. deux points matériels (m) en interaction $U(x_1 - x_2)$
2. l'espace de phase est $(x_i, \dot{x}_i)$ ou (x_i, p_i) avec $i = 1, 2$
— Le formalisme lagrangien et hamiltonien

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - U(x_1 - x_2)$$

3. Théorème de Noether :

soit une "symétrie" continue, paramètre $\epsilon \sim 0$ telque $x(t, \epsilon)$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \epsilon} = \frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = Cte$$

4. Exemple : La translation dans $\mathbb{R}^3$, dans chaque direction spatiale

$$x(t, \epsilon) = x(t) + \epsilon \quad \frac{\partial x}{\partial \epsilon} = 1 \quad \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \sum m\dot{x} = Cte$$

constantes du mouvement

$$\mathcal{H}(x, p) = \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + U(x_1 - x_2) \quad \vec{P}(x, p) = \sum \vec{p}_i$$

Conclusion : Systèmes conservatifs

1. Espace de phase pour n points

$$(x(t), \dot{x}(t))_i$$

2. Equations de Lagrange-Euler : $\mathcal{L}(x, \dot{x})$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial x}$$

3. Invariance par translation dans les directions $i = 0..3$ *

$$\vec{P} = C \vec{t} e$$

$$\mathcal{H} = C t e$$

4. Equations dynamiques de Hamilton : $\mathcal{H}(x, p)$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_p \end{pmatrix} \mathcal{H}$$

*. pour le temps il faut tenir compte la variation des bornes

En théorie des champs

- Le système est défini par des fonctions $u(x)$ et les variations associées à chacune des directions de l'espace temps.

$$(u(x), u_\mu(x)) \quad \text{avec } u_\mu = \partial_\mu u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x^\mu}$$

- Equation de Lagrange (expression du principe de moindre action)

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(u, u_\mu, x) d^4x \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$$

- Exemple : une onde scalaire $u(x)$ * libre, sans source !

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (u_i u^i + \beta^{-2} u_0 u^0) = \frac{1}{2} (-(u_i)^2 + \beta^{-2} (u_0)^2)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} \right) = -\partial_i (u_i) + \beta^{-2} \partial_0 u_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

soit l'équation de D'Alembert : (avec $x^0 = \beta t$)

$$\square u = 0 \quad \text{avec } \square = \nabla_\mu \nabla^\mu = -\Delta + \partial_0^2$$

- Avec une source $S(x)$: (interaction)

$$\mathcal{L}_{int} = S(x) u(x) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = S(x) \Rightarrow \square u = S(x)$$

*. La dimension physique de u est fixée par $\mathcal{L} = \text{densité d'énergie } \mathcal{L} \sim W.L^{-3}$.

Le théorème de Noether

- La dynamique du système $u(x)$ est invariante dans la symétrie ϵ

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ u(x(\epsilon), \epsilon) \end{pmatrix}$$

si l'action est stable par rapport à la transformation

$$\delta \int (\mathcal{L}(u, u_\mu, x) d^4x) \sim 0 \quad \text{au 1er ordre en } \epsilon$$

- Les variations :

$$\begin{pmatrix} \delta x^\mu \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu \\ M \end{pmatrix} \delta \epsilon$$

- Le courant conservé dans la "direction" $\delta \epsilon$:

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} (-M + u_\nu \Lambda^\nu) - \mathcal{L} \Lambda^\mu \quad \partial_\mu \Theta^\mu = 0$$

Θ^0 est conservé et Θ^i est le courant associé

Démonstration

- La dynamique du système $u(x)$ est invariante dans la symétrie si l'action est stable par rapport à la transformation $\delta\epsilon$

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) d^4x \sim \int \mathcal{L}'(x') d^4x'$$

- analyse des différentes variations

1. changement de variable δx :

$$\delta x^\mu = \Lambda^\mu \delta\epsilon \quad d^4x' = |J| d^4x = (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) d^4x$$

2. changement de fonction :

$$u'(x') = u(x) + M\delta\epsilon$$

$$\Rightarrow u'(x) - u(x) = \delta u(x) = (M - \Lambda^\nu u_\nu) \delta\epsilon$$

3. changement de l'action

$$\delta\mathcal{A} \sim \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\mu} \delta u_\mu + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu) \right) d^4x$$

4. Utilisant l'équation de Lagrange - Euler

$$\delta\mathcal{A} \sim \int \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\mu} \delta u + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d^4x$$

5. Soit $\forall \delta\epsilon \sim 0$:

$$\delta\mathcal{A} \sim 0 \Rightarrow \int \partial_\mu \Theta^\mu \delta\epsilon \, d^4x = 0 \Rightarrow \partial_\mu \Theta^\mu = 0$$

$$\text{avec } \Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} (M - \Lambda^\nu u_\nu) + \mathcal{L} \Lambda^\mu$$

Θ^0 est conservé dans symétrie ϵ

Θ^i est la densité de courant de Θ^0

— Pour les quatre translations, à ρ fixé $= 0, 1, 2, 3$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^\nu \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_\rho^\nu \delta\epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_\rho^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} g_\rho^\nu u_\nu - \mathcal{L} g_\rho^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} u_\rho - \mathcal{L} g_\rho^\mu$$

D'après le théorème de Noether :

$$\partial_\mu \Theta_\rho^\mu = 0 \text{ et } \Theta_\rho^0 \text{ conservé}$$

Le tenseur énergie impulsion

— Le tenseur énergie - impulsion (non symétrique) :

$$\Theta_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\mu}} u_{\nu} - \mathcal{L} g_{\nu}^{\mu} \quad \Theta_{\nu}^0 \text{ est conservé } \nu = 0, 1, 2, 3 \quad [1]$$

$$\Theta_{\nu}^{\mu} \neq \Theta_{\mu}^{\nu} \text{ a priori non-symétrique}$$

— Théorème de Noether : conservation de Θ_{ν}^0

$$\partial_{\mu} \Theta_{\nu}^{\mu} = 0 = \partial_0 \Theta_{\nu}^0 + \partial_i \Theta_{\nu}^i$$

— Lois de conservation dans R^3 (énergie et impulsion)

$$Q_{\nu} = \int \Theta_{\nu}^0 d^3x \quad \frac{d}{dt} Q_{\nu} = -Flux(\Theta_{\nu}^i) \quad \nu = 0, 1, 2, 3$$

— Interprétation physique des termes du tenseur (réf 1 page 111) :

1. Θ_0^0 : densité d'énergie
2. Θ_i^0 : densité de quantité de mvt
3. Θ_0^i : courant d'énergie
4. Θ_j^i : tenseur de contraintes dans R^3

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} u^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad \Theta^{0\nu} \text{ conservé}$$

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Theta^{00} & \Theta^{0i} \\ \Theta^{i0} & \Theta^{ij} \end{pmatrix}$$

— Exemple : une onde scalaire $u(x)^*$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\sum u_i u^i + \beta^{-2} u_0 u^0) \quad \mathcal{H} = \Theta_0^0$$

$$\Theta_0^0 = \frac{1}{2} (\beta^{-2} u_0^2 + \sum u_i^2) \quad \Theta_0^i = u^i u_0$$

$$\Theta_i^0 = -\beta^{-2} u^0 u_i \quad \Theta_j^i = u^i u_j - \mathcal{L} g_j^i$$

$$\text{Tr} (\Theta) = \frac{3}{2} (u_i^2 - \beta^2 u_0^2)$$

*. le courant d'énergie est Θ_0^i tandis que Θ_i^0 est la densité de quantité de mouvement

Cas d'un fluide acoustique : $u(x) \equiv \phi(x)$

Approximation linéaire avec ϕ le potentiel des vitesses : ϕ dimension $L^2 t^{-1}$

- Ecart à l'équilibre : pression température densité vitesse

$$\tilde{p} = p(x) - p_0, \quad \tilde{T} = T(x) - T_0, \quad \tilde{\rho} = \rho(x) - \rho_0, \quad \vec{v}(x) \sim 0$$

- Equation d'Euler et thermodynamique (linéarité, réversibilité)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{grad} \tilde{p} \quad \tilde{\rho} = \chi_s \rho_0 \tilde{p} \quad \dot{\tilde{p}} = -\rho_0 \operatorname{div}(\vec{v})$$

- hypothèses : mvt irrotationnel, sans viscosité..., vitesse des ondes

$$\vec{v} = -\vec{grad} \phi \quad \tilde{p} = \rho_0 \dot{\phi} \Rightarrow \beta = \sqrt[3]{\chi_s \rho_0}$$

- Dynamique lagrangienne et tenseur E-P

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\rho_0 \vec{v}^2 - \chi_s \tilde{p}^2) \quad \Delta \phi - \beta^{-2} \partial_t^2 \phi = 0$$

$$\Theta_0^0 = \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\rho_0 \vec{v}^2 + \chi_s \tilde{p}^2) \quad \Theta_0^i = \tilde{p} v^i$$

$$\Theta_j^0 = \beta^{-2} \tilde{p} v_j \quad \Theta_j^i = \rho_0 v^i v_j - \mathcal{L} g_j^i$$

Interprétation

Physique de l'acoustique

- L'équation de conservation

$$\partial_0 \Theta_\nu^0 = -\partial_j \Theta_\nu^j$$

- en intégrant sur le volume fermé $\mathcal{V}$ de limite $\delta\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}^3$

$$Q_\nu = \int_{\mathcal{V}} \Theta_\nu^0 d^3x \quad \frac{d}{dt} Q_\nu = -\int_{\delta\mathcal{V}} \Theta_\nu^j ds_j \quad \text{théorème de Stokes}$$

- Les grandeurs conservées :

$$\Theta_0^0 = \frac{1}{2} (\rho_0 \vec{v}^2 + \chi_s \tilde{p}^2) \text{ est la densité d'énergie}$$

$$-\Theta_i^0 = \Theta^{0i} = \beta^{-2} \tilde{p} \vec{v} \text{ est la densité de quantité de mvt}$$

- les actions dynamiques

$$\Theta_0^j = \tilde{p} \vec{v} \text{ est le courant d'énergie} \sim \text{l'intensité incidente}$$

$$\Theta_i^j = \rho_0 v^i v_j - \mathcal{L} g_j^i \text{ est le tenseur des contraintes dans } \mathbb{R}^3$$

Tenseur Θ : matière non-relativiste

à partir de points matériels sans interaction

- Le Lagrangien

$$d\mathcal{A} = \mathcal{L} dt d^3x = \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right) n d^4x$$

n est la densité de points dans $\mathbb{R}^3$

- La densité du tenseur Θ_ν^μ ($\Theta_{\mu\nu}$ symétrique)

$$\Theta_\nu^\mu = m (v^\mu v_\nu) n \quad v^\mu = (c, v^i)$$

$$\Theta_0^0 = n mc^2 \quad \Theta_0^i = n mc v^i \quad \Theta_j^i = n m v^i v_j$$

En moyenne, localement (gaz parfait isotrope)

$$\Theta_i^j = - \left(\frac{1}{3} m \bar{v}^2 \right) n \delta_i^j = -p \delta_i^j$$

- Autres composantes

$$\Theta_0^i \propto \bar{v}^i = 0 \quad \Theta_j^0 \propto \bar{v}_j = 0$$

$$\Theta_0^0 = \epsilon = m (c^2 + \frac{1}{2} \bar{v}^2) n + \dots$$

- Trace de Θ ?

$$\Theta_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix} \quad \text{Tr } \Theta = \epsilon - 3p$$

- Généralisation relativiste : fluide en mouvement à la pression interne p^*

$$\Theta_{\nu}^{\mu} = (\epsilon + p) U^{\mu} U_{\nu} - p g_{\nu}^{\mu} \quad U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

$$\text{Tr } \Theta = \epsilon - 3p$$

Θ_{ν}^{μ} compatible avec l'approximation statique pour $U^{\mu} = (1, \vec{0})$ et $\epsilon = (mc^2) n$

Les ondes électromagnétiques en relativité restreinte

L'électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique 6 composantes ($\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$).

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Interprétation du tenseur $F_{\mu\nu}$

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk} \mathcal{B}^k \quad F^{i0} = \mathcal{E}^i$$

- Equations de J.C. Maxwell

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \quad [1] \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [2]$$

- Une particule chargée interagit avec un champ classique et la dynamique peut être extraite du principe de moindre action ($\mathcal{A}_{min}$).

$$d\mathcal{A} = -md\tau - q A_\mu dx^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot v^\nu)$$

$$\text{avec } p^\mu = m v^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds}$$

- La dynamique du champ EM (équations de Maxwell) obéit au principe de moindre action.

$$\mathcal{L} = \left(-\frac{1}{4} F^2 + \frac{m^2}{2} A^2 - J.A \right) \quad d\mathcal{A} = \mathcal{L} \, d^4x$$

$$\text{avec } F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad A^2 = A^\mu A_\mu \quad J.A = J^\mu A_\mu$$

Le champ E.M libre, sans masse

Le tenseur énergie-impulsion pour le champ électromagnétique classique *

$$u(x) = A^\rho(x) \quad \text{et} \quad J(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2$$

- Le tenseur énergie.impulsion Θ_ν^μ .

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^\rho} A_\nu^\rho - \mathcal{L} g_\nu^\mu \quad \Theta_\nu^0 \text{ est conservé}$$

$$\Theta_\nu^\mu = -F_{\rho\nu} F^{\rho\mu} + \frac{1}{4} F^2 g_\nu^\mu = \Theta_\mu^\nu \quad \text{composante symétrique}$$

- Explicitement en fonction de $\mathcal{E}^2$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^2) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2)$$

$$\Theta_0^0 = \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \quad \Theta_i^0 = -(\mathcal{E} \wedge \mathcal{B})^i$$

$$\Theta_{0i} = \Theta_{i0} \quad \Theta_i^j = -\mathcal{E}_i \mathcal{E}^j - \mathcal{B}_i \mathcal{B}^j - \frac{1}{2} g_i^j (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)$$

- Propriété du tenseur EM

$$\text{Tr } \Theta = 0 \quad \epsilon - 3p = 0$$

*. référence 1 page 111-112

La cosmologie

- La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (appendice 1) *

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \lambda(t)^2 d\Sigma^2$$

$$d\Sigma^2 = A(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \text{où} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

$$\text{avec } A(r) = (1 - k r^2)^{-1}$$

this metric ranges over a 3-dimensional space of uniform curvature, that is, elliptical, Euclidian, or hyperbolic space.

dΣ does not depend on t, all of the time dependence is in the function λ(t), known as the "scale factor".

- hypothèse d'isotropie espace $\mathbb{R}^3$ à courbure $-6k$

$$d\Sigma^2 = A(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

- hypothèse euclidienne : espace $\mathbb{R}^3$ à courbure nulle : $k = 0$

$$d\Sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- Les coordonnées sont :

ct	r	θ	ϕ	
$g_{00} = 1$				$g_{11} = -\lambda(t)^2 A(r)$
$g_{22} = -\lambda(t)^2 r^2$				$g_{33} = -\lambda(t)^2 r^2 \sin^2(\theta)$

*. [http :/en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric](http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric)

Le tenseur de Ricci *

$$R_{\mu\nu} = \partial_\ell \Gamma^\ell_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\ell_{\mu\ell} + \Gamma^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{\mu\nu} - \Gamma^\ell_{\nu s} \Gamma^s_{\mu\ell} = \nabla^\ell_{\ell s} \Gamma^s_{\mu\nu} - \nabla^\ell_{\nu s} \Gamma^s_{\mu\ell}$$

— Calcul de R_{00}

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) \quad g_{00} = 1 \quad (1)$$

— Calcul des R_{ii}

$$R_{11} = \frac{A\lambda^2}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + 2\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \quad g_{11} = -\lambda^2 A(r)$$

$$R_{22} = \frac{r^2 \lambda^2}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + 2\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \quad g_{22} = -\lambda^2 r^2$$

$$R_{33} = \frac{r^2 \lambda^2}{c^2} \sin^2 \theta \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + 2\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{2kc^2}{\lambda^2} \right) \quad g_{33} = -\lambda^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

— Conséquences

$$\mathbf{Tr} R = R^0_0 + \sum_{i=1..3} R^i_i = -\frac{6}{c^2} \left(\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{kc^2}{\lambda^2} \right)$$

$$R^0_0 - \frac{1}{2} \mathbf{Tr} R = +\frac{3}{c^2} \left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{kc^2}{\lambda^2} \right) \quad R^0_0 = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right)$$

*. <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/slides-GD.pdf> pages 40-42

La physique de l'équation d'Einstein

— Equations d'Einstein * (réf 1 page 363, réf 2 page 199 ...)

$$\left(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} \text{Tr } R\right) = a T_{\mu}^{\nu} + g_{\mu}^{\nu} \Lambda$$

$$\Rightarrow -\text{Tr } R = a \text{Tr } T + 4 \Lambda$$

conséquences :

$$R_0^0 = \frac{a}{2} (T_0^0 - \sum T_i^i) - \Lambda = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right)$$

$$R_0^0 - \frac{1}{2} \text{Tr } R = a T_0^0 + \Lambda = +\frac{3}{c^2} \left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \frac{kc^2}{\lambda^2}\right)$$

— Univers homogène de matière statique :

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon(t) = \rho(t)c^2$$

— Equations de Friedmann † : fonctions $\lambda(t)$ et $\rho(t)$ et paramètres Λ, k .

$$3\left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda}\right)^2 + \frac{k}{\lambda^2}\right) = (a \rho c^2 + \Lambda)$$

$$-3\left(\frac{\ddot{\lambda}}{c^2\lambda}\right) = \left(\frac{a}{2} \rho c^2 - \Lambda\right)$$

*. $a = \frac{8\pi \mathcal{G}}{c^4} \sim t^2 L^{-1} M^{-1}$

†. [http :/en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric](http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker_metric)

Quelques résultats numériques *

- constante de Hubble : les mesures les plus récentes, en 2008, donnent

$$h_0 = 80,0 \pm 2,7 \text{ (km/s)/Mpc} \quad h_0^{-1} = 12,2 \cdot 10^9 \text{ a}$$

$$\text{Mpc} = \text{Mégaparsec} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ km}$$

- La densité d'énergie critique[†] : $\epsilon_0 = \rho_0 c^2$

1. univers plat $k = 0$
2. en expansion h_0
3. de matière non-relativiste
4. avec $\Lambda = 0$

$$\epsilon_0 = \frac{3c^2}{8\pi G} h_0^2 = 6,74 \text{ GeV/m}^3 \sim 7,2 \text{ (nucléons) /m}^3$$

*. <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/slides-GD.pdf> page 31

[†]. $m_p = 0,938 \text{ GeV}/c^2$ (proton) $\text{GeV} = \text{Giga électron-volt} = 1,602 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

Quelques situations particulières

En fonction de $h(t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ (comme Hubble)

— L'univers stationnaire : $\lambda = 1$

$$\ddot{\lambda} = \dot{\lambda} = 0 \quad h = 0 \quad 2k = ac^2 \rho \quad \Lambda = k$$

— L'univers plat et composé de matière statique* : $\ddot{\lambda} \leq 0 \quad \lambda \sim t^{2/3}$

$$\Lambda = 0 \quad k = 0 \quad -\dot{h}(t) = \frac{ac^2}{2} \rho c^2 \quad h(t) \sim \frac{2}{3} t^{-1} \quad \rho \lambda^3 = Cte$$

— L'univers inflationnaire sans matière : $\ddot{\lambda} \geq 0 \quad \lambda \sim \exp(h_0 t)$

$$\rho = 0 \quad k = 0 \quad \Lambda > 0 \quad \dot{h}(t) = 0 \quad h(t) = \pm h_0 \quad h_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c^2$$

*. <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/slides-GD.pdf> page 31

Retour sur le tenseur Energie-Impulsion

- Univers homogène de matière en mouvement "brownien" à la pression p^* :

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon(t) & 0 \\ 0 & -p(t) \end{pmatrix} \quad \text{Tr } T = \epsilon - 3p$$

- Equations d'état de la matière qui contribue au tenseur T_{ν}^{μ}

$$\text{hypothèse !} \quad p(\epsilon) = w \epsilon \quad \text{avec} \quad w = cte$$

- Equations de Friedmann sur $\epsilon(t)$ $p(t)$ paramètres Λ k

$$R_0^0 = \frac{a}{2} (\epsilon + 3p) - \Lambda = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) \quad [F1]$$

$$R_0^0 - \frac{1}{2} \text{Tr } R = a \epsilon + \Lambda = \frac{3}{c^2} \left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + \frac{kc^2}{\lambda^2} \right) \quad [F2]$$

- La constante cosmologique $\Lambda \sim$ une pression négative

$$p_{\Lambda} = -\frac{2\Lambda}{3a}$$

- Conséquence indépendante de Λ ! (eq [F1]+eq [F2] et dérivée [F2])

$$\dot{\epsilon} = -3(\epsilon + p) \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

Différents modèles :

— Différents univers homogènes réf 12 page 39

$$p = w \epsilon \quad \text{équation d'état}$$

$$\dot{\epsilon} = -3(\epsilon + p) \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \qquad \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -3(1 + w) \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$\epsilon \sim \lambda^{-3(1+w)}$$

hypothèse	w	ϵ scaling with λ
radiation	1/3	λ^{-4}
matter	0	λ^{-3}
dark energy	-1	λ^0

— Evolution en fonction du temps dans l'hypothèse $\lambda \sim t^\beta$ réf 10 page 64

$$\frac{a}{2} \epsilon (1 + 3w) - \Lambda = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right)$$

hypothèse	$\lambda \sim t^\beta$	$\ddot{\lambda}$
radiation	$t^{1/2}$	—
matter	$t^{2/3}$	—
dark energy	$\exp h_0 t$	+

$$h_0 = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$$

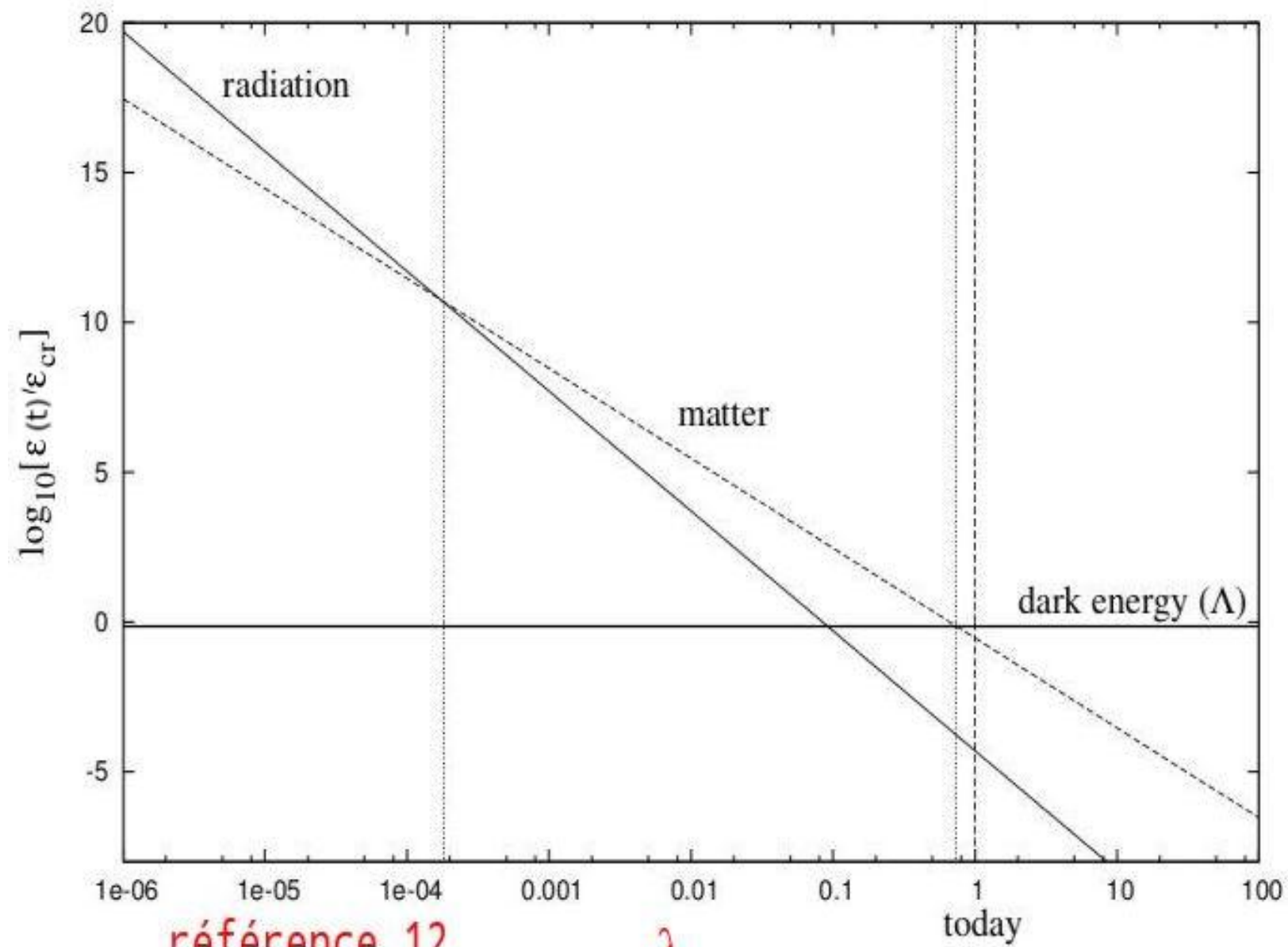


figure 1

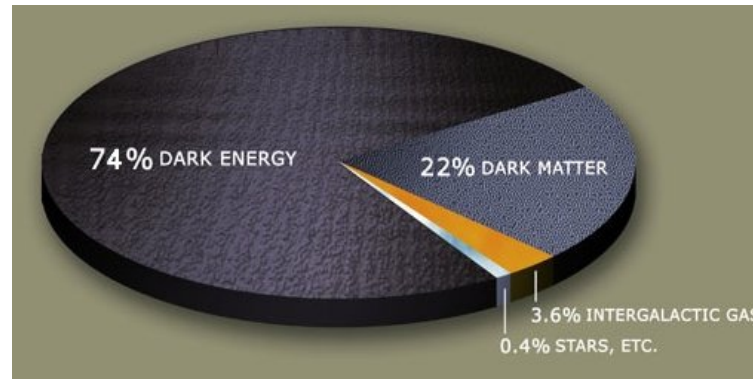


figure 2 (réf wikipedia) *

Estimated relative distribution for components of the energy density of the Universe :

- Dark energy dominates the total energy (74%)
- While dark matter (22%) constitutes most of the mass.
- Of the remaining baryonic matter (4%), only one tenth is compact.

On 21 March 2013, the European-led research team behind the Planck cosmology probe released new data refining these values to 4.9% ordinary matter, 26.8% dark matter and 68.3% dark energy.

*. http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann_equations

Conclusion

Retour sur l'équation d'Einstein

- Comparaison de la gravitation relativiste avec l'électromagnétisme
 - Le courant électromagnétique = source du champ E-M
interaction vectorielle
 - Le tenseur énergie-impulsion = source du champ de gravitation
interaction tensorielle
- Les ondes gravitationnelles et la quantification

à suivre

références

- 1 L. Landau & E. Lifchitz , *Théorie des champs* , Ed MIR , 1970
- 2 R. Feynman , *Leçons sur la gravitation* , Ed Odile Jacob,2001
- 3 C. Missner & al , *Gravitation* , Ed W.H. Freeman & Co, 1973
- 4 J. Rich , *Principes de la cosmologie* , Ed Ecole Polytechnique, 2002
- 5 C.D. Walecka , *Introduction to general relativity* , Ed World Scientific, 2007
- 6 P. Dirac , *General theory of relativity* , Ed Princeton, 1975
- 7 P. Peter & al , *Cosmologie primordiale* , Ed Belin, 2005
- 8 R. Omnès , *Théorie du champ électromagnétique* , Poly Orsay, 1967
- 9 L. Ryder , *Introduction to general relativity* , Cambridge U Press,2009
- 10 L. Bergstrom & al , *Cosmology and particle astrophysics* , Wiley & Sons, 1999
- 11 Scott Dodelson, *Modern Cosmology* , Academic Press, London, 2003
- 12 Balsa Terzic, [http ://www.nicadd.niu.edu/ bterzic/PHYS652/](http://www.nicadd.niu.edu/bterzic/PHYS652/) , Northern Illinois Univ, 2008

Appendice 1 : : La métrique de FLRW

- La métrique de Robertson Walker (réf 1 page 442)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \lambda(t)^2 d\Sigma^2$$

- hypothèse d'isotropie dans $\mathbb{R}^3$:

$$d\Sigma^2 = A(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \text{où} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

$$\text{avec } A(r) = (1 - k r^2)^{-1}$$

- Les coordonnées sont :

$$\begin{array}{llll} q^0 = ct & q^1 = r & q^2 = \theta & q^3 = \phi \\ g_{00} = 1 & & g_{11} = -\lambda(t)^2 A(r) & \\ g_{22} = -\lambda(t)^2 r^2 & & g_{33} = -\lambda(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) & \end{array}$$

- Forme de la métrique (réf 1 page 442 et suivantes)
Soit une hyper-sphère à 3D dans $\mathbb{R}^4$

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

sur la sphère de rayon a

$$dx_4 = -\frac{x_1 dx_1 + \dots}{x_4}$$

- En remplaçant dans dl^2 et en passant en sphériques

$$dl^2 = \left(r^2 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 = (1 - k r^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$k = a^{-2}$$

- dans l'espace-temps

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \lambda(t)^2 d\Sigma^2 \quad d\Sigma^2 \equiv dl^2$$