

Université de Caen

LMNO

Quantification du champ EM

C. LONGUEMARE

26 mai 2015

Plan

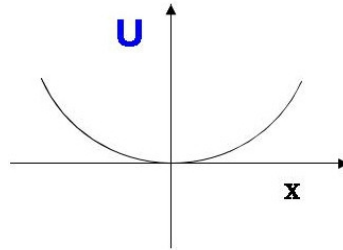
1. L'oscillateur classique et quantique
2. Le champ EM classique et quantification
3. Application à l'effet Casimir (condensateur plan)
4. Introduction aux photons dans QED

Notations et unités

ϵ_0 μ_0 c $\hbar$ α	$(c^2\mu_0)^{-1}$ $4\pi \cdot 10^{-7}$ $299\,792\text{ km/s}$ $1,055 \cdot 10^{-34}\text{ J.s}$ $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\hbar c)^{-1}$	permittivité du vide perméabilité du vide n vitesse de la lumière constante de Planck-bar constante de structure fine
ν^{-1} λ k ω $\mathcal{L}$ $\mathcal{H}$ $\mathcal{E}$ $\mathcal{B}$	$2\pi\lambda^{-1}$ $2\pi\nu$ $\int \mathcal{L}(x) d^3x$ $\int \mathcal{H}(x) d^3x$	période longueur d'onde vecteur d'onde pulsation lagrangien hamiltonien champ électrique champ magnétique

Table des notations

L'oscillateur harmonique



- L'oscillateur classique à 1D

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

La force de rappel

$$F = -\frac{dU}{dx} = -m\omega_0^2 x$$

- L'énergie pour $x = A \cos(\phi)$ avec $\phi = \omega_0 t$

$$E_c = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 \sin^2(\phi) \quad E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 \cos^2(\phi)$$

- L'énergie totale est conservée

$$E_t = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2$$

- La notation complexe

$$x = A \exp(i\phi) \in \mathbb{C} \text{ alors la mesure de } x = \Re(x)$$

L'oscillateur quantique : états stationnaires ?

- Opérateurs hermitiens dans *Hilbert* des fonctions $\psi(x) \in \mathcal{L}^2$

$$p \circ \psi(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi \quad x \circ \psi(x) = x \times \psi \Rightarrow [p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

- Extraction des dimensions physiques

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} x \quad p \rightarrow \sqrt{\hbar m\omega_0} p \quad \mathcal{H} \rightarrow \hbar\omega_0 \mathcal{H}$$

- Propriétés des opérateurs $\mathcal{H} \ p \ x$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) \quad [p, x] = \frac{1}{i}$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + ix) \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - ix) \quad [a, a^+] = 1$$

$$\mathcal{H} = a^+ a + \frac{1}{2} \quad [\mathcal{H}, a^+] = a^+$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

- Etat fondamental ψ_0 et l'état d'ordre n ψ_n

$$a\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 = C_0 \exp(-\frac{1}{2} x^2) \quad \text{avec } e_0 = \frac{1}{2}$$

$$\psi_n = (a^+)^n \psi_0 \Rightarrow \psi_n = C_n H_n(x) \exp(-\frac{1}{2} x^2) \quad \text{avec } e_n = n + \frac{1}{2}$$

Les états physiques de l'oscillateur

$$x = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a^+ - a) \quad x^2 = -\frac{1}{2} (a^{+2} + a^2) + \mathcal{H}$$

— Etat stationnaire $e_n = n + \frac{1}{2}$ (le temps n'existe plus...)

$$\langle x \rangle = 0 \quad \langle x^2 \rangle = n + \frac{1}{2}$$

— Les états quantiques quelconques d'énergie $e = \langle \mathcal{H} \rangle \sim n_0 + \frac{1}{2}$
(le temps existe)

$$\theta = \omega_0 t \quad \langle x \rangle = A \cos(\theta)$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle$$

Théorème d'Ehrenfest : vers la physique classique

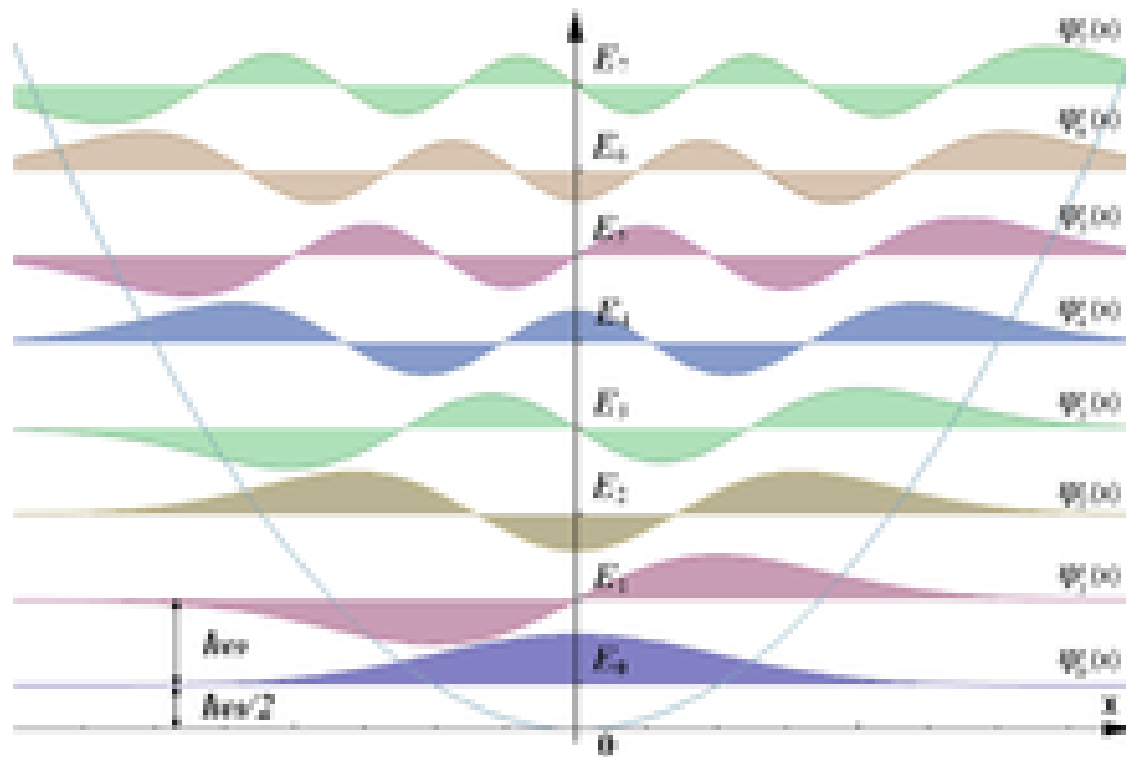
$$i \frac{d}{d\theta} \langle A \rangle = \langle [A, \mathcal{H}] \rangle + i \left\langle \frac{\partial A}{\partial \theta} \right\rangle$$

exemple

$$\frac{d}{d\theta} \langle x \rangle = \langle p \rangle \quad \frac{d}{d\theta} \langle p \rangle = -\langle x \rangle = \frac{d^2}{d\theta^2} \langle x \rangle$$

— Les mélanges statistiques d'états quantique ; par exemple à $T \neq 0K$

$$\langle x \rangle = \left(\sum A_i p_i \right) \cos(\theta)$$



Représentation des sept premiers niveaux d'énergie et des fonctions d'onde associées $\psi_n(x)$ de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel. *

*. http://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_harmonique_quantique

Le champ EM classique

— Les unités : $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137,0}$

$$\epsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1 \Rightarrow e = \sqrt{4\pi\alpha}$$

— Les équations de Maxwell avec les sources

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

$$\mathcal{E}^i = F^{0i} \quad \mathcal{B}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$$

— L'invariance de jauge classique

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$$

— Le lagrangien électromagnétique

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - A_\mu J^\mu = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}^2 - \vec{\mathcal{B}}^2) + \mathcal{L}_{int}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = -\square A_\nu = J_\nu \quad \text{si condition de Lorentz}$$

Le champ E.M libre

Le tenseur énergie-impulsion pour le champ électromagnétique classique *

$$u(x) = A^\rho(x) \quad A_\mu^\rho = \partial_\mu A^\rho \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2$$

- Le tenseur énergie.impulsion Θ_ν^μ .

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^\rho} A_\nu^\rho - \mathcal{L} g_\nu^\mu \quad \Theta_\nu^0 \text{ est conservé Th Noether}$$

$$\Theta_\nu^\mu = -F_{\rho\nu}F^{\rho\mu} + \frac{1}{4} F^2 g_\nu^\mu = \Theta_\mu^\nu \quad \text{composante symétrique}$$

- Explicitement en fonction de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$:

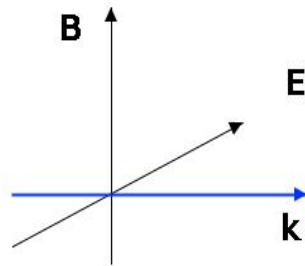
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) \quad \mathcal{H} = \Theta_0^0 = -F_{\rho 0}F^{\rho 0} + \frac{1}{4} F^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \quad \Theta_i^0 = -(\mathcal{E} \wedge \mathcal{B})^i$$

$$\Theta_{0i} = \Theta_{i0} \quad \Theta_i^j = -\mathcal{E}_i \mathcal{E}^j - \mathcal{B}_i \mathcal{B}^j - \frac{1}{2} g_i^j (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)$$

*. référence 1 page 111-112

Intensité d'une onde d'amplitude 1 volt/m



- Une onde plane monochromatique polarisée

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}) \quad \mathcal{E}_0 = 1 \text{ volt/m}$$

- La densité d'énergie *

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \sim \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}_0^2 \quad 4,42 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3$$

- Courant d'énergie ou vecteur de Poynting

$$\Theta^{0i} = (\mathcal{E} \wedge \mathcal{B})^i \quad \vec{\Theta} = \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathcal{E}_0^2 \hat{k}$$

Le courant d'énergie transporté par cette onde est

$$|\vec{\Theta}| = 1,32 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

*. dans les unités Internationales

Ocillateurs électromagnétiques : cavités EM

- Conditions aux limites des conducteurs parfaits

$$\mathcal{E}_{\parallel} = 0 \quad \mathcal{B}_{\perp} = 0$$

- Les modes d'oscillation d'une cavité

Filtre en fréquences $\sim$ trajectoires photonics fermées

- Les modes d'oscillation du condensateur plan *

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz) \cos(\omega t) \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -E_2 \\ E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz) \sin(\omega t)$$

$$0 \leq z \leq a$$

- Quantification (modes résonants)

$$\sin(ka) = 0 \quad k = \omega = p \frac{\pi}{a} \quad p \in \mathcal{N}$$

- L'énergie dans la cavité par unité de surface pour le vecteur d'onde k

$$W_k = \frac{\epsilon_0}{2} (E_1^2 + E_2^2) \frac{1}{2k} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{1}{2k}$$

- cas général : superposition linéaire de tous les modes k

*. pour des ondes polarisées dans la direction $(E_1, E_2, 0)$ arbitraire

Quantification du champ libre

- L'opérateur $A^\mu(x)$ agit sur l'espace de Fock *

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda, k} \psi_{\lambda, k}^\mu(x) a(\lambda, k) + \psi_{\lambda, k}^\mu(x)^* a^\dagger(\lambda, k)$$

avec $\psi_{\lambda, k}^\mu(x) = \epsilon^\mu(\lambda) \exp(-ikx)$ (onde plane polarisée)
 λ est l'hélicité telle que $\epsilon^\mu(\lambda) k_\mu = 0$.

- Champ ultra-relativiste

$$k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0 \quad \omega = |\vec{k}|$$

- Règles de commutation

$$[a, a] = 0 \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad [a(\lambda, k), a^\dagger(\lambda', k')] = \delta_{k, k'} \delta_{\lambda, \lambda'}$$

- Potentiel classique du photon λ, k :

$$\langle 0 | A^\mu(x) | \lambda, k \rangle = \psi_{\lambda, k}^\mu(x) \quad \text{ou} \quad \langle \lambda, k | A^\mu(x) | 0 \rangle = \psi_{\lambda, k}^\mu(x)^*$$

*. L'espace de Fock est un espace de Hilbert utilisé en physique quantique pour décrire les états avec un nombre variable de particules...

L'opérateur Hamiltonien de QED

- L'opérateur de comptage des photons

$$N(\lambda, k) = a^\dagger(\lambda, k)a(\lambda, k)$$

- L'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda, k} \frac{\omega}{2} \left(a^\dagger(\lambda, k)a(\lambda, k) + a(\lambda, k)a^\dagger(\lambda, k) \right)$$

$$= \sum_{\lambda, k} \omega \left(N(\lambda, k) + \frac{1}{2} \right)$$

- L'état fondamental : $\forall \lambda, k \quad N(\lambda, k) = 0$

$$W(vide) = \sum_{\lambda, k} \frac{\omega}{2} = \infty$$

Quelques justifications

- Les photons sont des particules de masse nulle d'hélicité $\lambda = 1, 2$

$$p = k = (\omega, \vec{k}) \quad \text{avec } \omega = |\vec{k}|$$

- L'opérateur de comptage des photons est N car

$$[N, a^+] = a^+ \Rightarrow Na^+ = a^+(N+1) \Rightarrow a^+|n\rangle = |n+1\rangle$$

- Le calcul de l'hamiltonien est "straightforward" *

$$F(x) = \partial A(x)$$

$$\partial A(x) = -i \sum_{\lambda, k} k (\psi_{\lambda, k}(x) a(\lambda, k) - \psi_{\lambda, k}(x)^* a^+(\lambda, k))$$

$$\mathcal{H} = \int (\partial A) (\partial A) d^3x$$

Remarque

$$\int \psi_{\lambda, k}^2(x) d^3x = 0 = \int \psi_{\lambda, k}^{*2}(x) d^3x \text{ et } \int \psi_{\lambda', k'}^*(x) \psi_{\lambda, k}(x) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}$$

- Le calcul conduit à

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda, k} \frac{\omega}{2} (a^+(\lambda, k) a(\lambda, k) + a(\lambda, k) a^+(\lambda, k))$$

*. réf 6 pages 77-80

Conclusion

- Nous avons apporté quelques compléments physiques à l'étude de l'effet Casimir
- En QED l'énergie du vide **électromagnétique** est ∞

$$W(vide) = \sum_{\lambda, k} \frac{\omega}{2} = \infty$$

Cette difficulté est évacuée par une prescription d'écriture **normale** des opérateurs de la physique :

1. a à droite et a^+ à gauche
2. en appliquant les règles de commutation
commutation (bosons)/anticommutation (fermions)

par exemple

$$\mathcal{H} \rightarrow : \mathcal{H} : = \sum_{\lambda, k} \frac{\omega}{2} (a^+(\lambda, k)a(\lambda, k) + a^+(\lambda, k)a(\lambda, k))$$

$$: \mathcal{H} : = \sum_{\lambda, k} \omega N(\lambda, k)$$

$$\text{si } N = 0 \quad : \mathcal{H} : = 0$$

- Il existe beaucoup d'autres problèmes en QFT...

références

- 1 L. Landau & E. Lifchitz *Electrodynamique quantique* MIR Edt 1976
- 2 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory* Macgraw Hill 1980
- 3 F. Halzen & al. *Quarks and leptons* John Wiley 1984
- 4 L.H. Ryder *Quantum Field Theory* Cambridge U.P. 1985
- 5 B. de Wit & al. *Field theory in particle physics* North holland 1986
- 6 S.J. Chang *Introduction to Quantum Field Theory* World Scientific 1990
- 7 I. Aitchison & al. *Gauge theories in particle physics* Inst of Physics 2004