

Université de Caen LMNO

-

Applications des groupes
en Physique des particules

C. LONGUEMARE

15 février 2011

Sommaire

1. Les groupes de symétries en physique
 - les symétries ?
 - les symétries en MQ
 - les symétries dynamiques en théorie des champs
2. Les symétries spatiales
 - Les rotations
 - $SU(2)$ et le spin
 - Le groupe de Lorentz et Poincaré
3. Les symétries internes des particules
 - Permutations de particules identiques
 - $SU(2)$
 - $SU(3)$
4. Discussion

[1] soit T une transformation effectuée sur un système physique pour donner un autre système

$$S \rightarrow S' = T.S$$

[2] T est symétrie si une propriété est conservée dans la transformation .

- Objet globalement identique à lui-même
- Dynamique (trajectoire) d'un objet matériel
- Hamiltonien d'un système physique

[3] L'ensemble des T constitue un groupe de symétrie par composition des transformations.

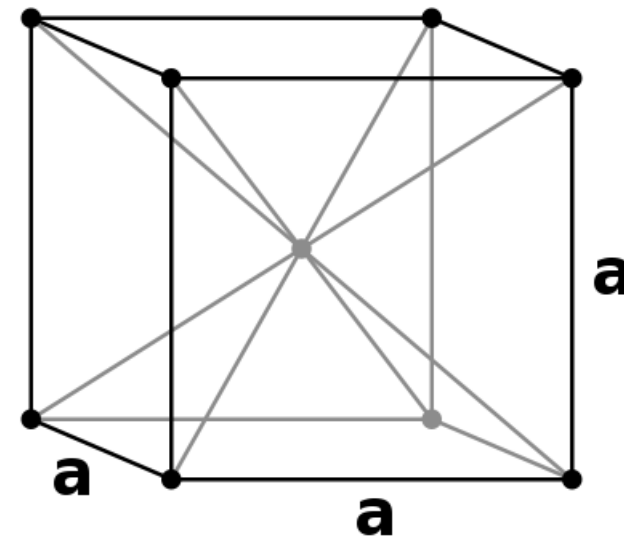
Exemple : Le cristal cubique centré

- * 3 axes générant 3 rotations (axes passant par le centre de deux faces opposées)
- * 6 axes générant 1 rotation (axes passant par le milieu de deux arêtes opposées)
- * 4 axes générant 2 rotations (axes passant par deux sommets opposés)
- * la symétrie de centre O et l'identité ;

soit

$$(9 + 6 + 8 + 1) * 2 = 48 \text{ isométries}$$

Exemple : Le chlorure de césium
 $a = 0,205 \text{ nm}$ (nanomètre).



Ce – Cl

Exemple : La trajectoire d'un point

- Le champ coulombien est invariant par rotation (parité)

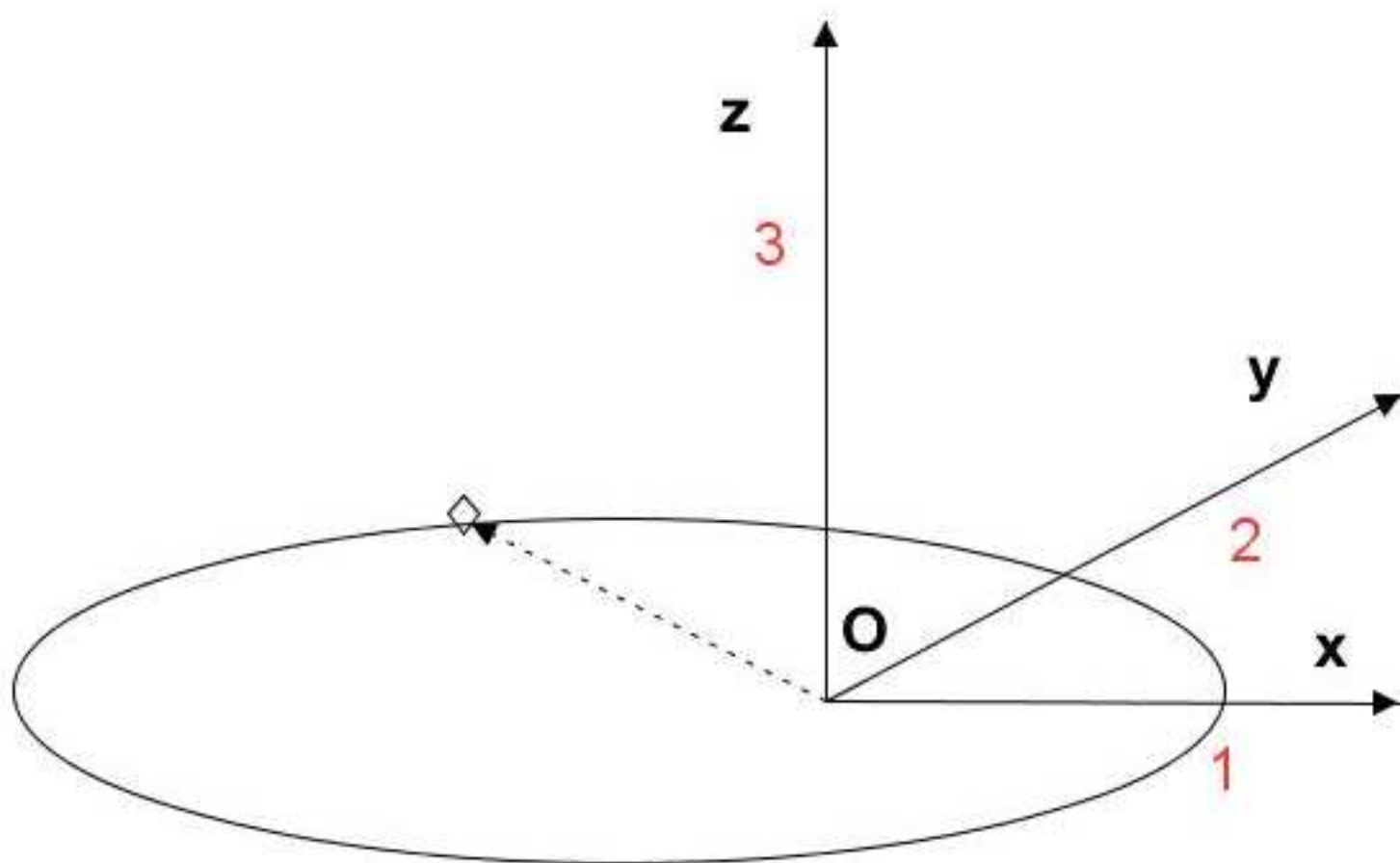
$$U = \frac{-\alpha}{r}$$

- L'énergie pour les trajectoires (elliptiques) est E

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2} (1 - e^2) = -\frac{\alpha}{2p} (1 - e^2) \quad 0 \leq e < 1$$

$\vec{L}$ le moment cinétique, $p(e)$ est le paramètre (l'excentricité) de la trajectoire.

- La dynamique est invariante par rotation de centre O :
Si une courbe est trajectoire, la courbe obtenue par rotation est trajectoire
- Les trajectoires invariantes pour certaines rotations sont les cercles tels que $e = 0$.
- idem pour la parité



1. Un état microscopique (quantique), "un atome", est représenté par un vecteur d'un espace de Hilbert approprié, $\mathcal{H}$; le *produit scalaire* est un nombre C que l'on note

$$(\phi, \psi) \text{ ou } \langle \phi | \psi \rangle \in C$$

Le produit ci-dessus est l'amplitude de ϕ dans ψ .

2. Chaque observable physique Q est associée à un opérateur hermitien dans $\mathcal{H}$ dont les valeurs propres q_i sont les résultats possibles des mesures.

$$\text{les mesures de } Q \text{ sont } = \{q_1, q_2, \dots q_i, \dots\}$$

3. La probabilité de la mesure q de Q est par principe le module carré de l'amplitude de ϕ_q dans ψ

$$\text{Prob de } q = |\langle \phi_q | \psi \rangle|^2 = \sum_{\phi} \langle \phi_q | \psi \rangle \langle \psi | \phi_q \rangle = \text{trace} \dots$$

exemple : la fonction d'onde $\phi(x) = \langle x | \psi \rangle$

4. L'évolution obéit à l'équation de Schrödinger ; l'opérateur de Hamilton $\mathbf{H}$ apparaît comme le générateur des translations dans le temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = \mathbf{H} | \psi(t) \rangle \quad (1)$$

5. Par définition, l'évolution commute avec une opération de symétrie U

$$U \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} U | \psi(t) \rangle \Rightarrow [\mathbf{H}, U] = 0 \quad (2)$$

6. à l'infini (en t) l'opérateur de diffusion commute avec U

$$[S, U] = 0$$

7. Les symétries agissent dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ par leurs représentations sur C .

$$U \in g \rightarrow U_{m',m} \in \text{matrices } (n, n) \quad \psi'_{m'} = U_{m',m} \psi_m$$

Conséquences physiques essentielles

– Etats stationnaires

Si ψ est état propre de $\mathbf{H}$ alors le groupe de symétrie U engendre un sous-espace propre éventuellement de dimension finie.

$$\mathbf{H} \psi > = E \psi > \Rightarrow \mathbf{H} U\psi = E U\psi >$$

La dimension du sous-espace $U\psi >$, appelé multiplet, détermine le nombre d'"états" physiques distincts .

La dégénérescence peut être levée par une perturbation

$$(\mathbf{H} + V) \psi_i > = (E + \epsilon_i) \psi_i >$$

Exemple $\mathbf{H} + V = \frac{J^2}{2I} + \alpha J_z \quad E(j, m) = \frac{j(j+1)}{2I} + \alpha m$

– Etats de diffusion

U est stable par rapport à l'évolution.

$$\psi_{+\infty} = \mathcal{S} \psi_{-\infty} \Rightarrow \mathcal{S} U \psi_{-\infty} = U \psi_{+\infty}$$

L'opérateur de diffusion $\mathcal{S}$ commute avec l'opération de symétrie U

$$[\mathcal{S}, U] = 0$$

En théorie quantique des champs.

1. Soit une particule (1/2) décrite par son spineur $\psi(x)$ dans l'espace temps, U est une symétrie (globale) si son hamiltonien (ou lagrangien) est invariant dans l'opération

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x)$$

2. On a l'invariance de jauge (locale) si l'opération peut être locale

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$$

Ceci n'est possible que grâce à l'interaction "des bosons"

Si le U est le groupe de Lie :

$$U(x) = \exp(-i \theta_i(x) T_i)$$

Le nombre de bosons n'est autre que la dimension de l'algèbre de Lie.

3. Exemples : Les groupes $U(1)$, $SU(2)$

$$U(x) = \exp(-ie \alpha(x)) \quad U(x) = \exp(-ig \alpha_i(x) \frac{\sigma_i}{2})_8$$

Les rotations $\text{SO}(3)$

1. Groupe orthogonal dans R^3

$$x' = R x$$

2. Groupe de Lie généré par $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3^2 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{L}^2 = -2$$

3. Algèbre de Lie

$$[L_1, L_2] = \epsilon_{123} L_3$$

$$\text{Exponentiation } R(\theta_3) = \exp(-\theta_3 L_3) \quad R(\vec{\theta}) = \exp(-\vec{\theta} \cdot \vec{L})$$

4. Opérateurs hermitiens avec $\vec{L} \rightarrow i\vec{L}$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(\vec{\theta}) = \exp(-i \vec{\theta} \cdot \vec{L}) \quad \vec{L}^2 = 2 = l(l+1)$$

1. L'espace $\mathcal{H}$ de hilbert des fonctions d'ondes normalisables

$$| \psi > \rightarrow \phi(x) = \langle x | \psi > \in C$$

2. On effectue une rotation R sur ϕ avec $x' = R x$

$$\text{par déf } \tilde{\phi}(x') = \phi(x) \quad \text{soit} \quad \tilde{\phi}(x) = \phi(R^{-1}x)$$

$$\text{avec } R^{-1}x \approx x - \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x} - \vec{\theta} \wedge \vec{x}$$

3. Les générateurs hermitiens des rotations dans $\mathcal{H}$ avec $\hbar = 1$

$$\vec{L} = \vec{x} \wedge -i\vec{\nabla} \quad \text{avec } \hbar = 1 \quad \vec{p} = -i\vec{\nabla}$$

$\vec{L}$ est le moment cinétique quantique, remarque $\vec{L}(\Omega)$

4. Algèbre de Lie des rotations

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

5. Exponentiation

$$\tilde{\phi}(x) = \exp(-i \vec{\theta} \cdot \vec{L}) \phi(x)$$

1. Groupe des translations dans R^3

$$x' = x + a \quad \tilde{\phi}(x) = \phi(x - a)$$

2. Les générateurs hermitiens des translations dans $\mathcal{H}$

$$\text{avec } \hbar = 1 \quad \vec{p} = -i\vec{\nabla}$$

3. Exponentiation

$$\tilde{\phi}(x) = \exp(-i \vec{a} \cdot \vec{p}) \phi(x)$$

4. Algèbre de Lie des déplacements

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [L_i, p_j] = i\epsilon_{ijk} p_k$$

5. Exemple : deux particules en interaction

$$\mathbf{H} = H_0(1) + H_0(2) + V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\text{avec } \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -i(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)$$

Exemple : Le champ coulombien

$$\mathbf{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad [\mathbf{H}, \vec{L}] = 0$$

1. Multiplet d'énergie $E =$ sous espace $\mathcal{E}$

$$\text{si } \phi(x) \in \mathcal{E} \Rightarrow R \phi(x) \in \mathcal{E}$$

2. Représentations irréductibles dans $\mathcal{H}$ des fonctions d'onde

(a) sur la sphère unité : $\Omega \rightarrow Y_l^m(\Omega) \in C$ $m = -l \dots +l$ parité $(-)^l$

(b) $R Y_l^m = D_{m'm}^l Y_l^{m'}$ avec $D_{m'm}^l = \langle lm' | \exp(-i\vec{\theta}\vec{L}) | lm \rangle$

3. Equation de Schrödinger avec $\phi(x) = f(r)Y_m^l(\Omega)$

$$\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right) f(r) = E_l f(r)$$

La multiplicité du sous-espace d'énergie E_l est $2l + 1$

4. Composition des moments angulaires ou produit direct de représentations

$$(2l_1 + 1) * (2l_2 + 1) = \sum_{|l_1 - l_2|}^{l_1 + l_2} (2l + 1)$$

1. Il existe une représentation de dimension 2

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. propriétés

(a) Algèbre de Lie

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \quad \sigma_i^2 = 1$$

(b) Exponentiation $\exp(-i\alpha(\vec{n}\vec{\sigma}))$

$$\cos(\alpha) - i(\vec{n}\vec{\sigma}) \sin(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - in_3 \sin(\alpha) & -i(n_1 - in_2) \sin(\alpha) \\ -i(n_1 + in_2) \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + in_3 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

3. interprétation physique $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$

4. Rotation d'un spineur de Pauli

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \mathcal{R} \psi(R^{-1}x) \quad \mathcal{R} = \exp(-i(\vec{\theta}\vec{s})) \quad (\alpha = \theta/2)$$
$$\vec{j} = \vec{L} + \vec{s}$$

5. Exemple : Rotation d'un fermion (1/2) au repos (θ d'axe 2)

$$\tilde{\psi}(\) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \psi(\) \quad \text{avec } \alpha = \theta/2$$

$\theta = \pi$ on échange les composantes en introduisant une phase

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\theta = 2\pi$ on multiplie par -1 (opposition de phase)

$$\tilde{\psi}(\) = -\psi(\)$$

6. $2s + 1 = 2$ donc $s = 1/2$

7. produit direct des espaces $s = 1/2$

$$1/2 * 1/2 = 1 + 0$$

$$1/2 * 1/2 * 1/2 = 3/2 + 1/2 + 1/2$$

Le groupe de Lorentz et de Poincaré

- Groupe dans R^4

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{avec} \quad \Lambda^T g \Lambda = g$$

- Groupe de Lie généré par le groupe de Lorentz restreint

$$\Lambda = \exp(A) \approx 1 + M \Rightarrow gM \text{ est antisymétrique : } M = -i \frac{\theta^{\mu\nu}}{2} J_{\mu\nu}$$

- Algèbre de Lie (6 opérateurs hermitiens)

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(J_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + J_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} - J_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - J_{\nu\sigma}g_{\mu\rho})$$

- Exponentiation

$$\Lambda = \exp(-i (\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\xi} \cdot \vec{K}))$$

$$\text{avec } J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J_{jk} \text{ et } K_i = J_{0i}$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k$$

Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$

Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ spécial linéaire = $(2, 2)$ sur $\mathbb{C}$ tel que $|A| = 1$

– $SL(2, \mathbb{C})$ homomorphe à $\mathcal{L}_{hr}$

$$\text{soit } X \in H_2 = x^0 - x^i \sigma_i \quad X' = x'^0 - x'^i \sigma_i = A X A^+ \quad (\pm A)$$

$$SL(2, \mathbb{C}) / Z_2 \sim \mathcal{L}_{hr}$$

– Les spineurs de $SL(2, \mathbb{C})$ (à 2 composantes sur $\mathbb{C}$)

$$\tilde{\psi}(x) = A \psi(\Lambda^{-1} x)$$

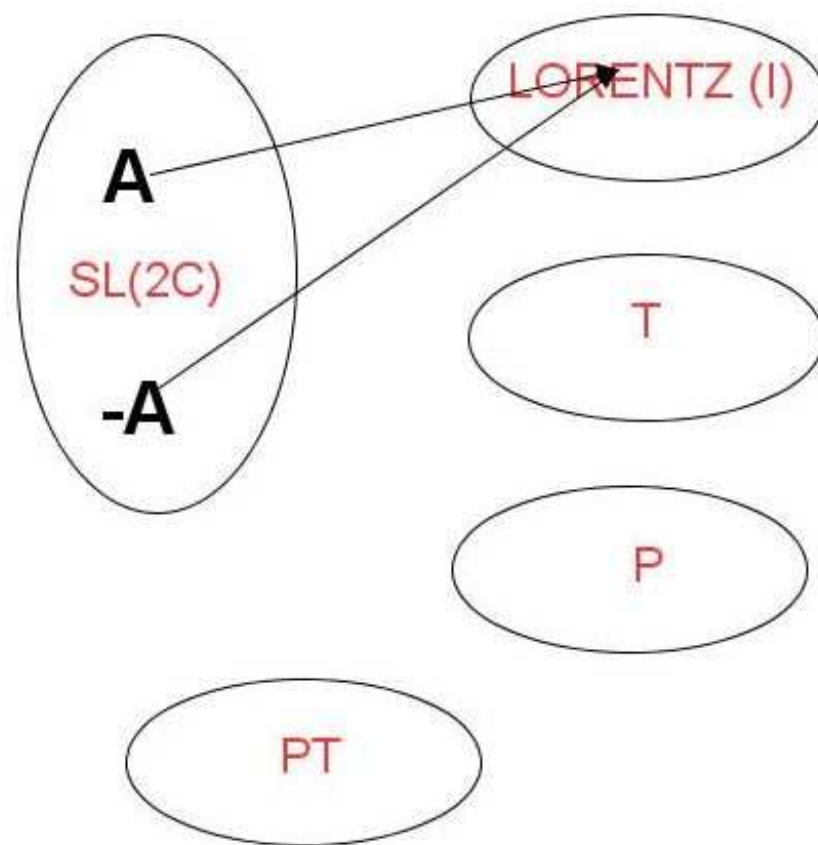
– Deux représentations inéquivalentes : A et $A^* \Rightarrow$ bi-spineurs de Dirac

$$\psi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

qui se transforme dans $\mathcal{L}_{hr}$ par

$$\tilde{\psi}_D(x) = \Sigma(A) \psi_D(\Lambda^{-1} x) \quad \Sigma(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^+)^{-1} \end{pmatrix}$$

Si $A \in SU(2)$ $(A^+)^{-1} = A$, Λ est une rotation et $\Sigma(A) \equiv A$



$$A \rightarrow A^+ \quad A^{-1} \quad A^T$$

Les permutations de particules identiques

- Permutation des particules dans un état à plusieurs particules

$$\psi = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3)\psi_d(4) \rightarrow \psi_a(2)\psi_b(4)\psi_c(1)\psi_d(3)$$

- L'hamiltonien (les observables) commutent avec les permutations

$$\mathbf{H} = H(1,2,3,4) = H(2,4,1,3)$$

- Si l'état est propre des transpositions les valeurs propres sont ± 1
- Theorème spin-statistique

	valeur propre
fermions	-1
bosons	+1

Le groupe U(1)

stabilité de la matière !

– Associé aux lois fondamentales de conservation des fermions !

$$U(\alpha) = \exp(-i\alpha Q)$$

Q est la charge associée (opérateur hermitien)

1. Nombre baryonique $0, \pm 1, \dots$

2. Nombre leptonique $0, \pm 1, \dots$

3. La charge électrique $0, \pm 1, \dots$ en unité e

– Quelques exemples de violation

$$p + e^- \rightarrow 2\gamma$$

$$n \rightarrow p + e^-$$

	p/n	e^-/ν	quarks	mésons
B	1	0	1/3	0
L	0	1	0	0
Q	1, 0	-1, 0	2/3, -1/3	0, ± 1 ...
spin	1/2	1/2	1/2	0, 1...

Le groupe SU(2)

– Associé à l'électrofaible !

$$SU(2) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{I})$$

I_3 est la charge associée et la "dimension" est $2I + 1$

Exemple de spineur :

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

1. C'est une **symétrie interne approchée** (violée par l'électrofaible)
2. Exemple de multiplets (mc^2 en GeV)

				B	S	I	mc^2	"	"
N	p	n		1	0	1/2	.9383	.9396	
Σ	Σ^-	Σ^0	Σ^+	1	-1	1	1.1975	1.1926	1.1894
π	π^-	π^0	π^+	0	0	1	.1396	.1350	.1396

3. Gell man Nishijima formula

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2}$$

- Quelques exemples de validations

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 \text{ ou } n + \pi^+$$

$$\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n \text{ ou } p + \pi^0$$

- Le modèle statique des quarks

q	B	$2I_3$	S	T	mc^2
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	1/3	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	0	0	.300
$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	1/3	0	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 1.5 \\ .500 \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	1/3	0	0	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 175.0 \\ 5.0 \end{matrix}$

- Spectroscopie des hadrons = mésons + baryons

baryons	anti-baryons	mésons
qqq	$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$	$q\bar{q}$

Le groupe $SU(3)$

- Associé à l'interaction forte des quarks !
La dimension de couleur est interne et "cachée"
- Groupe de Lie

$$SU(3) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{\lambda})$$

- Algèbre de Lie d'ordre $n = 8$:
 λ_i = les matrices (3,3) hermitiennes de trace nulle

$$[\lambda_i, \lambda_j] = if_{ijk}\lambda_k$$

l'ordre de l'algèbre est $n = 8$

le rang de l'algèbre est $c = 2$ (deux casimirs C_1, C_2)

les f_{ijk} sont les constantes de structure du groupe

- Les "racines" permettent de caractériser les représentations irréductibles

le nombre de racines dans le plan est $r = n - c = 6$

3.7 *Classification of Semisimple Compact Lie Groups*

189

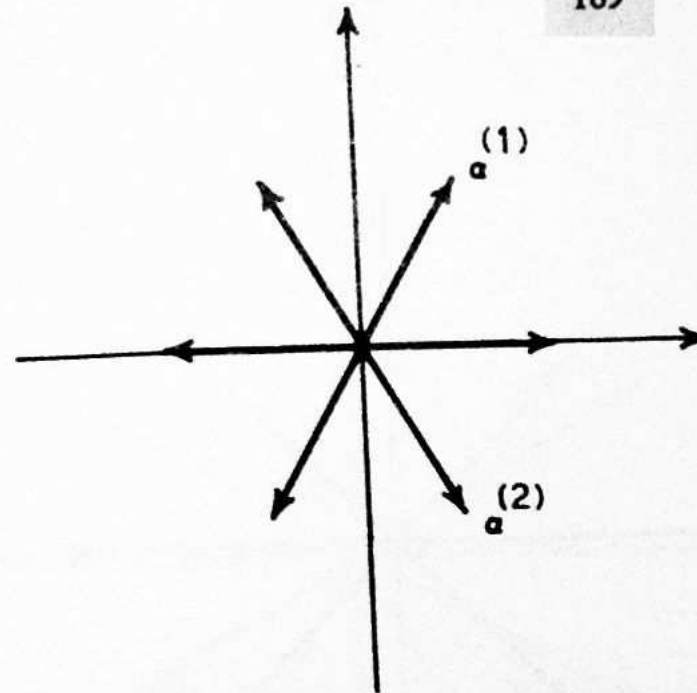


Figure 3.2

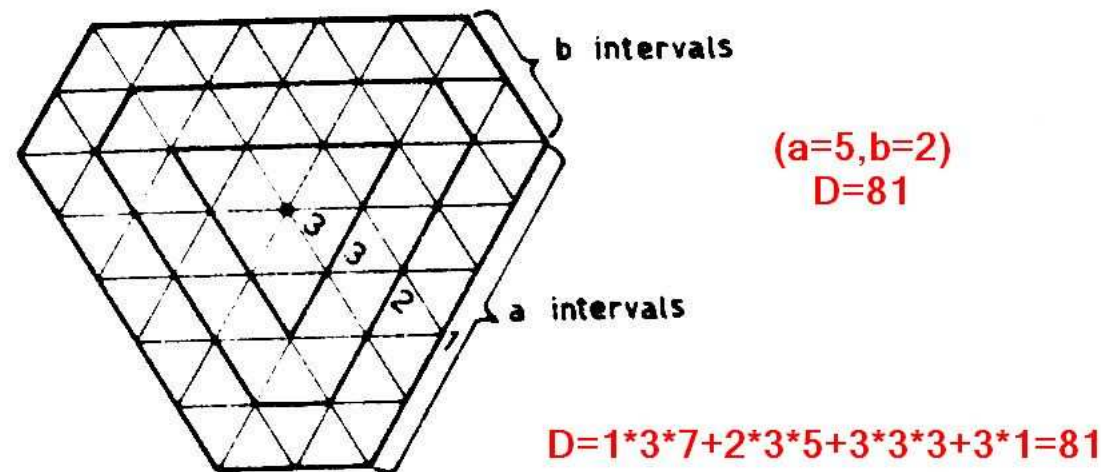


Figure 3.9

is characterized by the numbers $(a - 1, b - 1)$ and so on. The following rules hold:

- (f₆) Weights of the external layer are simple.
- (f₇) Going from the external layer to the internal ones the multiplicity of weights increases by one at each layer, until a triangular pattern appears. After this the multiplicity remains the same. This is shown explicitly in Fig. 3.9.
- (f₈) From (f₇) one can easily derive that the total number of states (dimension of the representation) of a given diagram is

$$D_{ab} = (1 + a)(1 + b) \left(1 + \frac{a + b}{2} \right). \quad (3.148)$$

To evaluate the eigenvalues of C_1 and C_2 we have then simply to commute the operators entering into their expression and use Eqs. (3.150) and (3.151). With very simple calculations for C_1 and a rather cumbersome procedure for C_2 , we get that in the linear vector space carrying the (a, b) irreducible representation these operators have the following values:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{12}(a-b)^2 + \frac{1}{4}(a+b)(a+b+4), \\ C_2 &= \frac{1}{18}(a-b)(2a+b+3)(2b+a+3). \end{aligned} \tag{3.152}$$

– Examples

(a, b)	C_1	C_2	D	
$(0, 0)$	0	0	1	
$(1, 0)$	$4/3$	$10/9$	3	q
$(0, 1)$	$4/3$	$-10/9$	3	$\bar{q}$
$(1, 1)$	3	0	8	$q\bar{q}$
$(3, 0)$	6	9	10	qqq
$(0, 3)$	6	-9	10	$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$

Le groupe SU(3)

- Décomposition en représentations irréductibles

hadrons	dimension	décomposition	B
q	3	3	1/3
$\bar{q}$	3	$\bar{3}$	1/3
$q\bar{q}$	9	$1 \oplus 8$	0
qq	9	$6 \oplus \bar{3}$	2/3
$qq\bar{q}$	27	$3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus 15$	1/3
qqq	27	$1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$	1
$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$	27	$1 \oplus \bar{8} \oplus \bar{8} \oplus \bar{10}$	-1
$qqqq$	81	$3 \oplus 3 + ..$	4/3

Seuls les singulets sont les structures observables à "distance macroscopiques" ? **Baryons, anti-baryons et mésons.**

Conclusion

- Les groupes interviennent sur les questions fondamentales
 - l'espace-temps
 - les propriétés "internes" des particules (ondes de matière)
 - l'invariance de jauge
- Ils induisent des lois de conservation dans les réactions observées à l'échelle macroscopique
- Les représentations complexes des groupes sont essentielles à la mécanique quantique
- Les représentations irréductibles déterminent la zoologie des systèmes quantiques (spectroscopie)
- La théorie des groupes de Lie est l'outil mathématique qui permet le classement des particules. Historiquement $SU(2)$ $SU(3)$ $SU(5)$ ont été essayés avec des succès divers.

Bibliographie

R Gilmore	Lie Groups..	Dover 1974
M. Scadron	Advanced Q. Theory	Springer 1979
L. Fonda & G.C. Ghirardi	Symetry Principle in Q. Physics	Dekker 1970
A. Rougé	Introduction à la physique ..	Ellipses 1997

sur le Web :

[http ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_groupes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_groupes)

[http ://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group)

[http ://mathworld.wolfram.com/LieGroup.html](http://mathworld.wolfram.com/LieGroup.html)