

Introduction aux graphes de Feynman

C. LONGUEMARE *

11 mai 2010

Version 08/08/2010 en travaux

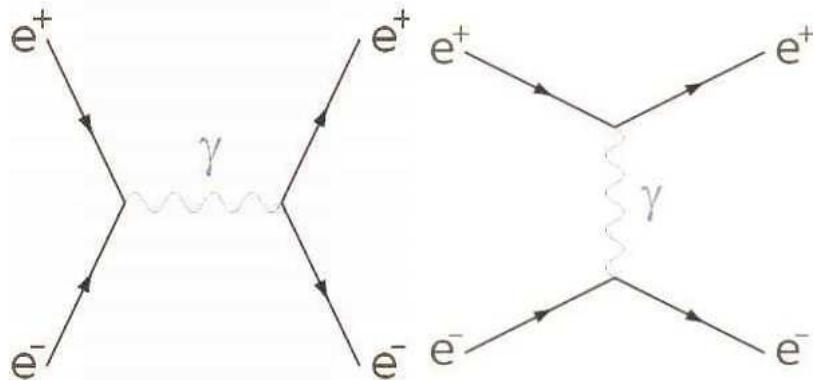


Figure 1: Interaction électromagnétique : La diffusion Bhabha $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$

Abstract

Ces notes ont été rédigées dans le cadre du séminaire d'analyse du LMNO le 11 mai 2010 à la demande d'Eric Lehman ; elles se proposent d'utiliser des diagrammes de Feynman en théorie quantique des champs relativistes pour calculer quelques processus simples du premier ordre. On essaiera dans un premier temps de présenter les principes puis d'expliquer en détail les calculs pour quelques applications choisies parmi les interactions électromagnétique et faibles.

Références :

Renton [4], Le Bellac [2], Halzen & al [1], Ryder [6], Itsykson & al [7], Chang [3]

*UNIVERSITE DE CAEN année 2009-2010

SOMMAIRE

1	Introduction	5
2	Principes de mécanique quantique	6
3	L'équation de Schrödinger	8
4	Les champs quantiques libres	10
5	L'amplitude d'une transition	11
6	Les symétries	12
7	Des probabilités aux sections efficaces et durées de vie	13
7.1	Conventions	13
7.2	Sections efficaces	14
7.3	Durées de vie	14
7.4	La somme sur les états finals	14
8	L'interaction électromagnétique	16
8.1	Diffusion Rutherford	16
8.1.1	Démonstration en physique classique	16
8.1.2	Démonstration par la physique quantique	17
9	La théorie quantique des champs (QED)	20
9.1	Règles de Feynman pour QED	20
9.2	Diffusion d'un fermion de spin 1/2 sur une source de potentiel $V(x)$	21
9.3	Diffusion électromagnétique d'un électron sur un proton (neutron)	22
9.3.1	Le courant électromagnétique du proton (neutron)	22
9.3.2	L'amplitude de transition au premier ordre (figure 5)	22
9.3.3	La cible est ponctuelle et élémentaire (de Dirac)	23
9.3.4	La cible est complexe	23
9.4	Diffusion électromagnétique inélastique d'un électron sur un nucléon	24
9.4.1	Cinématique de la diffusion inélastique	25
9.4.2	Section efficace inclusive de la diffusion très inélastique	25
9.4.3	Hypothèse des quarks-partons	25
9.5	Annihilation électromagnétique en vol	26
9.5.1	L'amplitude de transition (voir figure 7)	26
9.5.2	La section efficace à la limite ultra-relativiste réf [1] page 125	27
9.6	Diffusion Bhabha	28
9.7	Diffusion Möller	29
9.8	Annihilation au repos : le positronium	30
9.9	L'effet Compton	32
9.10	La matérialisation électromagnétique	33
10	L'interaction faible	34
10.1	Rappels	34
10.2	Les choix de Weinberg-Salam (1967)	34
10.2.1	La question des courants neutres	34
10.2.2	La partie électromagnétique	35

10.2.3 La partie faible neutre	35
10.2.4 La partie faible chargée	37
10.3 Règles de Feynman pour l'interaction électro-faible	37
10.4 Diffusion beta inverse	38
10.5 Diffusion des neutrinos (anti neutrinos) sur les nucléons	39
10.6 Diffusion inélastique d'un neutrino (anti neutrino) sur un "quark"	40
10.7 Désintégration du neutron	41
10.8 Désintégration beta du muon	42
10.9 Désintégration du pion chargé	43
11 Conclusion	43
12 Annexe 1	44

List of Figures

1	Interaction électromagnétique : La diffusion Bhabha $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$	1
2	Diffusion Rutherford sur une cible ponctuelle	16
3	Diagramme pour la diffusion Rutherford sur le courant $J(q)$	17
4	Diffusion sur un potentiel	21
5	Diagramme pour la diffusion électron proton : $e^- + p \rightarrow e'^- + p'$	22
6	Diagramme pour la diffusion électron "quark" : $e^- + q_1 + \dots \rightarrow e'^- + q'_1 + \dots$	24
7	Diagramme d'annihilation en vol : $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	26
8	Diffusion Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	28
9	Diffusion Möller $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	29
10	Diagramme d'annihilation $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$	30
11	Diagramme d'annihilation du $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	31
12	L'effet Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	32
13	La matérialisation électromagnétique $2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$	33
14	Diffusion beta inverse $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$	38
15	Diffusion xx des neutrinos $\nu + n \rightarrow \mu^- + p$	39
16	Diffusion très inélastique d'un neutrino $\nu_\mu + q_1 + \dots \rightarrow \mu^- + q'_1 + \dots$	40
17	Désintégration du neutron $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	41
18	Désintégration beta du muon $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}$	42
19	Désintégration du pion $\pi^- \rightarrow +\mu^- + \bar{\nu}$	43
20	Principe de la diffusion Rutherford (1909)	45

List of Tables

1	Règles de Feynman issues du lagrangien libre des particules	20
2	Règles issues de \mathcal{L}_{int} pour les vertex	20
3	Le modèle Left & Right de Weinberg	34
4	Règles issues de \mathcal{L}_{int} pour les vertex des interactions électrofaibles	37

1 Introduction

Nous nous intéressons à des systèmes quantiques qui au cours de l'expérience vont subir une transition d'un état initial vers un état final sous l'action d'un mécanisme d'interaction (transformation d'un état stationnaire vers un autre état stationnaire) ; cette interaction est :

- soit provoquée par une collision avec une cible
 - soit spontanée et agit dès l'apparition du système initial
- .
1. dans le premier cas , une section efficace sera mesurée (en cm^2) ; qualitativement il s'agit d'une mesure de la surface d'ombre faite par la cible au faisceau incident. Plus précisément, si le flux total des particules incidentes est noté \mathcal{F} dans le référentiel de la cible (en unité cm^{-2}), la section efficace est telle que celles des particules qui traverseront cette surface subiront l'interaction :

$$N_{int} = \sigma \mathcal{F} \quad \text{ou} \quad \dot{N}_{int} = \sigma \dot{\mathcal{F}} \quad (1)$$

Si l'on sélectionne les états finals , on introduira la section différentielle

$$d\sigma = \mathcal{F}^{-1} dN_{int}$$

Le nombre de particules qui traversent une surface \vec{ds} par unité de temps est le flux de du vecteur densité de courant de particules \vec{j}_1 à travers cette surface.

$$d\phi = \vec{j}_1 \cdot \vec{ds} \quad \text{avec } \vec{j}_1 = \rho_1 \vec{v} \quad \text{donc} \quad \sigma = \frac{1}{j_1} \frac{dN_{int}}{dt}$$

2. Dans la définition précédente nous avons implicitement considéré un faisceau incident sur une cible unique. On peut également considérer, une particule incidente unique se déplaçant dans un milieu homogène de densité de cibles ρ_2 . La probabilité d'une interaction par unité de longueur de trajectoire est liée à l'incidence de celle-ci sur les sections associées aux cibles rencontrées soit :

$$\frac{dP}{dx} = \rho_2 \sigma$$

Un raisonnement classique de probabilité permet d'en déduire la loi exponentielle pour la probabilité $P(x)$ d'observer la première interaction au delà de la distance x

$$P(x) = \exp(-\rho_2 \sigma x)$$

Le complément est la probabilité de n'avoir aucune interaction sur la distance x de trajectoire. Enfin, la distribution de probabilité de la première interaction est évidemment

$$\frac{dP}{dx} = \rho_2 \sigma \exp(-\rho_2 \sigma x)$$

3. Dans le second cas, on mesurera la durée de vie du système $\tau = \lambda^{-1}$ et on en déduira la loi exponentielle de survie au delà d'un temps t

$$P(t) = \exp(-\lambda t)$$

ainsi que la probabilité de transition par unité de temps

$$dP = \lambda dt \quad \text{ou} \quad \dot{N}_{decay} = \lambda N_0 \quad (2)$$

enfin, la distribution de probabilité de la première interaction qui est :

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t)$$

2 Principes de mécanique quantique

• Les postulats de la mécanique quantique

1. Un état de la physique microscopique (quantique), un atome en quelque sorte, est représenté par un vecteur d'un espace de Hilbert approprié, \mathcal{H} ; l'état peut être défini par ses composantes dans une base et le produit scalaire est un nombre C que l'on note

$$(\phi, \psi) \text{ ou } \langle \phi | \psi \rangle \in C$$

Le produit ci-dessus est l'amplitude de ϕ dans ψ . A cause de l'interprétation probabiliste des amplitudes, il sera nécessaire de normaliser les états.

$$(\psi, \psi) = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

2. Chaque observable physique Q est associée à un opérateur hermitien dans \mathcal{H} dont les valeurs propres q sont les résultats possibles des mesures dans le cas d'une expérience idéale menée avec des instruments parfaits.

$$\text{les mesures de } Q \text{ sont } = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}$$

3. La probabilité de la mesure q de Q est par principe le module carré de l'amplitude de ϕ_q dans ψ

$$\text{Prob de } q = |\langle \phi_q | \psi \rangle|^2$$

Dans le cas où la valeur propre engendre un sous-espace, il sera nécessaire de sommer sur la base du sous espace. Si l'on peut construire l'opérateur de projection $|\psi\rangle\langle\psi|$ dans le sous espace q alors la probabilité peut se calculer comme la trace dans le sous-espace de cet opérateur :

$$\text{Prob de } q = \sum_{\phi} \langle \phi_q | \psi \rangle \langle \psi | \phi_q \rangle = \text{Tr}\{|\psi\rangle\langle\psi|\}$$

La somme des sous-espaces de Q constitue une base de \mathcal{H} .

La moyenne des mesures de Q est :

$$\langle Q \rangle = \sum_{\phi, q} q |\langle \phi_q | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | Q \psi \rangle$$

Remarque La probabilité de la mesure q de Q est aussi la moyenne de l'opérateur de projection $P_{(q)}$ sur le sous-espace q .

$$\text{Prob de } q = \langle \psi | P_{(q)} | \psi \rangle$$

Exemple L'opérateur Q est l'observable de position de l'"atome" dans l'espace physique R^3 à l'instant t .

$$Q \equiv \vec{x}$$

Soit $|\vec{x}_0\rangle$ un état propre : dans cet état, la mesure de la position de l'"atome" donne systématiquement \vec{x}_0 .

La probabilité de cette valeur dans ψ est par principe $|\langle \vec{x}_0 | \psi \rangle|^2$. L'amplitude $\langle \vec{x}_0 | \psi \rangle$ est la fonction d'onde associée à l'état $|\psi\rangle$:

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \in C$$

4. l'état du vide ψ_0 est associé à l'élément neutre de \mathcal{H} en effet l'amplitude $\psi_0(\vec{x})$ est la fonction 0 car la probabilité de l'observation de l'atome est nulle $\forall \vec{x}$. Cependant le vide est un élément non-nul de l'espace car sa norme est 1.

Remarque L'opérateur a_x^+ qui au vide fait correspondre l'état $|\vec{x}\rangle$ est un opérateur de création d'un "atome" en \vec{x} .

Cet opérateur peut agir sur un état quelconque de \mathcal{H} , son action crée une particule en x . L'opérateur hermitique conjugué a_x est l'opérateur d'annihilation :

$$a_x^+ |0\rangle = |x\rangle \Rightarrow a_x |x\rangle = |0\rangle$$

en effet,

$$\begin{aligned} <0|a_x &= <x| \\ <0|a_x|x\rangle &= <x|x\rangle = 1 \Rightarrow a_x|x\rangle = |0\rangle \end{aligned}$$

Remarque Les opérateurs a_x^+ et a_x ne sont pas hermitiens par contre $a_x a_x^+$ est hermitien et peut avoir une interprétation physique.

5. Il en résulte une autre interprétation de la fonction d'onde d'une particule :

$$\psi(x) = <x|\psi> = <0|a_x\psi> \in C$$

6. Les particules identiques conduisent à des fonctions d'ondes qui ont des propriétés particulières vis à vis des permutations, par exemple à deux particules

$$\psi(x, y) = <0|a_x a_y|\psi> \in C$$

- dans le cas des fermions les fonctions d'ondes sont impaires par transposition et il en résulte que les opérateurs de création ou d'annihilation anticommutent entre eux

$$\{a_x, a_y\} = 0 \quad \{a_x^+, a_y^+\} = 0$$

avec

$$\{a_x, a_x^+\} = 1 \quad \text{plus généralement} \quad \{a_x, a_y^+\} = \delta_{x,y}$$

- inversement pour les bosons

$$[a_x, a_y] = 0 \quad [a_x^+, a_y^+] = 0$$

avec

$$[a_x, a_x^+] = 1 \quad \text{plus généralement} \quad [a_x, a_y^+] = \delta_{x,y}$$

7. Comptage des particules dans un état quelconque

Lemme : Il découle des relations de commutation (anti-commutation) des bosons (fermions) les relations suivantes

$$a_x(a_x^+)^n = [a_x, (a_x^+)](a_x^+)^{n-1} \pm a_x^+ a_x (a_x^+)^{n-1}$$

$$\text{supposons } [a_x, a_x^+] = (a_x a_x^+ \mp a_x^+ a_x) = b \quad (\text{ci-dessus } b = 1)$$

$$a_x(a_x^+)^n = (b + (\pm)b + b + (\pm)b \dots)(a_x^+)^{n-1} + (\pm)^n (a_x^+)^n a_x$$

$$a_x^+ a_x |n\rangle = (b + (\pm)b + b + (\pm)b \dots) |n\rangle$$

Conclusion $a_x^+ a_x$ est un opérateur qui compte les particules en x . Pour les bosons, les valeurs propres sont $n \in \mathbb{N}$ pour les fermions les valeurs sont 0, 1.

3 L'équation de Schrödinger

- **L'équation d'évolution et l'équation de Dyson**

1. L'évolution d'une fonction d'onde obéit à l'équation de Schrödinger qui fait intervenir l'opérateur de Hamilton H et qui apparaît comme le générateur des déplacements dans le temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H} \times \psi \quad (3)$$

Dans la représentation x , l'équation de Schrödinger prend la forme d'une équation différentielle sur les fonctions d'onde de l'espace temps.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \mathcal{H} \psi(\vec{x}, t) \text{ avec } \psi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$$

L'opérateur d'évolution qui transforme l'état initial du système à t_0 vers l'état à t est unitaire et s'écrit :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H} dt\right)$$

2. Le lien avec la physique classique : le théorème d'Ehrenfest prévoit que les valeurs moyennes des observables vérifient une équation qui est analogue aux équations de Hamilton en mécanique classique :

$$\frac{d \langle Q \rangle}{dt} = \langle \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, Q] \rangle + \langle \frac{\partial Q}{\partial t} \rangle$$

en mécanique classique cette équation devient

$$\frac{dQ}{dt} = [\mathcal{H}, Q]_{Poisson} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

avec

$$[\mathcal{H}, Q]_{Poisson} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

Application :

$$Q \equiv \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \text{ et } \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_{int}$$

$$\text{Mécanique classique} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial V_{int}}{\partial q_j}$$

$$\text{Mécanique quantique} \quad \frac{d}{dt} \langle p_j \rangle = - \langle \frac{i}{\hbar} [p_j, V_{int}] \rangle = - \langle \nabla_j V_{int} \rangle$$

3. Les constantes du mouvement : Si l'état initial est propre de l'opérateur Q , si Q est indépendant du temps et commute avec \mathcal{H} , la valeur propre est une constante du mouvement. Les exemples sont nombreux : \mathcal{H} lui-même, la quantité de mouvement totale, les charges conservées, le moment cinétique...

4. Les états stationnaires : Ils sont propres de l'hamiltonien \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} | \psi \rangle = E | \psi \rangle$$

Dans ces états, les valeurs moyennes ou les valeurs propres de **tous les observables** sont des constantes au cours du temps, c'est la raison pour laquelle on les appelle états stationnaires.

$$\forall Q \quad \langle Q \rangle = Cte \quad \forall t$$

Exemple :

$$\langle \vec{x} \rangle = \vec{a} \quad \langle \vec{p} \rangle = \vec{b} \quad \langle \mathcal{H} \rangle = E$$

Les états stationnaires possibles physiquement peuvent être classés par rapport aux valeurs propres des opérateurs qui commutent avec \mathcal{H} et qui commutent entre eux. Ces valeurs propres s'appellent nombres quantiques ; la connaissance de ces valeurs permettra de faire **l'inventaire du possible**.

Un ensemble complet d'observables de cette nature conduit par principe à générer une base de l'espace de Hilbert du système.

5. **L'équation de Dyson** Pour étudier une transition entre un état (initial) sans interaction et un autre état sans interaction (final), on peut formellement isoler l'opérateur d'interaction dans l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

En effectuant un changement d'état $\psi(t)$,

$$\psi(t) \rightarrow \tilde{\psi}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right) \psi(t)$$

on peut réécrire l'équation d'évolution de Dyson soit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(t) = \mathcal{H}_1(t) \times \tilde{\psi}(t)$$

avec $\mathcal{H}_1(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right) \mathcal{H}_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t\right)$

Remarque : s'il n'y a pas d'interaction alors $\tilde{\psi}(t)$ est constant, égal à $\psi(0)$.

La solution de l'équation de Dyson peut s'écrire sous forme exponentielle en introduisant l'opérateur d'ordonnancement dans le temps \mathcal{T} qui est nécessaire ici à cause de l'éventuelle non commutativité des opérateurs d'interaction à t.

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1(t) dt\right)$$

6. Généralisation relativiste : Introduction de la densité d'hamiltonien et matrice \mathcal{S}

Dans le cas d'une transition, l'état initial comme l'état final sont "sans interaction" : les particules sont libres car éloignées les unes des autres à des distances macroscopiques ; il s'agit de déterminer une probabilité pour une transition qui résulte d'une interaction "microscopique" et quantique. Pour remplir ce programme, on introduit une densité d'interaction dans l'espace temps $\mathcal{H}_{int}(x)$ dont il peut résulter la transition observée. L'opérateur d'évolution pourra se mettre sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{H}_{int}(x) d^4x\right) \quad \text{ou mieux} \quad = \mathcal{T} \exp\left(+\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4x\right) \quad (4)$$

par exemple référence [2] page 351-353

Dans ce formalisme de la théorie des champs,

- L'opérateur \mathcal{T} garantit la causalité relativiste des processus pouvant intervenir aux différents points de l'espace temps. Les relations entre les différents points sont limitées par la causalité relativiste.
- Les interactions sont ponctuelles , le formalisme est local dans R^4 .
- Les points définissent un chemin qui permet de passer de l'état initial à l'état final grâce aux interactions .
- Entre les interactions l'évolution est libre
- **L'espace de Fock des états macroscopiques entrants et sortants**

Pour des raisons pratiques, ces états sont composés de particules dont les quadri-impulsions sont déterminées par "la préparation" de l'état initial où par la détection dans l'état final. Ces états sont indéterminés dans l'espace temps.

Les processus physiques de mesure et de détection se situent à l'échelle macroscopique où les différents constituants (particules) évoluent quasi-librement, sans interaction. Ces états appartiennent à l'espace de Fock de la théorie, ils sont construits comme des états de particules libres dont les caractéristiques quantiques sont déterminées. Mathématiquement, l'espace de Fock est l'espace de Hilbert obtenu par la somme directe des produits d'espaces de Hilbert à une particule.

4 Les champs quantiques libres

Soit à étudier une onde bosonique dont la quantité de mouvement est fixée, ce peut être une fonction d'onde propre de l'opérateur quantité de mouvement :

$$\phi(x) = \langle x | \phi \rangle \in C \text{ propre de } p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Soit le vecteur d'onde k , sa dimension est l'inverse d'une longueur

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

Par TF et son inverse , on obtient :

$$\phi(k) = \int \phi(x) \exp(ikx) d^4x \quad \phi(x) = (2\pi)^{-4} \int \phi(k) \exp(-ikx) d^4k$$

L'équation de Klein-Gordon impose des limitations

$$(k^2 - m^2) \phi(k) = 0 \text{ soit } \phi(k) = 0 \text{ sauf si } k^0 = \pm \omega_k \text{ avec } \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Donc on pourra décomposer ϕ de la manière suivante :

$$\phi(k) = 2\pi \delta(k^2 - m^2) [\theta(k^0) \phi^+(k) + \theta(-k^0) \phi^-(k)]$$

alors

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [\phi^+(k) \exp(-ikx) + \phi^-(k) \exp(ikx)]$$

avec

$$kx = \omega_k k^0 - \vec{k} \vec{x} \text{ et } \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Jusqu'ici l'onde est une fonction d'onde définie sur R voire sur C . La seconde quantification transforme cette fonction en opérateur par l'introduction d'opérateurs de création et annihilation d'états caractérisés par k . alors

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k) \exp(-ikx) + a^+(k) \exp(ikx)]$$

avec le commutateur (ou l'anticommutateur)

$$[a(k), a^+(k')] \text{ ou } \{a(k), a^+(k')\} = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k')$$

référence [2] pages : 363 365 366 puis 370

5 L'amplitude d'une transition

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, on va s'intéresser à des transitions entre un état initial constitué de particules libres, identifiées macroscopiquement et donc éloignées les unes des autres et un état final de même nature par exemple dans les réactions suivantes qui ont été effectivement abondamment étudiées dans les années 1960 :

$p + n \rightarrow p + n$	$p + n \rightarrow p + n + \pi^0$	int. forte
$e^- + p \rightarrow e^- + n + \pi^+$	$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$	int. électromagnétique
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$	$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$	int. faible

Ces exemples sont choisis pour mettre en évidence les trois interactions qui se manifestent à l'échelle microscopique, l'interaction forte, électromagnétique et faible.

Nous considérerons dans le même cadre les désintégrations des particules ; dans ce cas, l'état entrant est composé d'une seule particule dont la durée de vie est assez longue pour qu'elle puisse être identifiée. Les interactions propres ou internes de cette particule (self interaction) vont conduire à sa désintégration en un autre système de particules éventuellement stables et détectées à l'échelle macroscopique. Nous considérons que l'état initial et l'état final seront libres des interactions internes qui conduisent à la transition. Citons quelques exemples

$\Delta^+ \rightarrow n + \pi^0$	$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	int. forte
$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad / \quad \gamma + e^+ + e^-$	int. électromagnétique
$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	int. faible

- L'amplitude de probabilité

Par principe, ce qui est accessible à l'expérimentation est la probabilité de la transition entre un état initial (de Fock) vers un autre état de cet espace. Par principe de la mécanique quantique, cette probabilité peut s'obtenir en calculant le module au carré de l'amplitude de la transition qui est un produit scalaire dans l'espace de Fock. La dynamique est contenue dans l'opérateur de "scattering" \mathcal{S} , les amplitudes de transition sont données par les éléments de \mathcal{S} .

$A = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle = \mathcal{S}_{f,i} = \delta_{f,i} - i T_{f,i}$

avec

$$\mathcal{S} = 1 + \frac{1}{1!} \int [i \mathcal{L}_{int}(x)] d^4x + \frac{1}{2!} \mathcal{T} \int [i \mathcal{L}_{int}(x)] [i \mathcal{L}_{int}(y)] d^4y d^4x \dots \quad (5)$$

- la quadri-impulsion et sa conservation

Evidemment, tous les états finals ne sont pas accessibles, ils sont limités par les lois de conservation liées aux invariances ; par exemple l'invariance par rapport aux translations d'espace temps qui conduit à la conservation de l'énergie impulsion de l'état initial à l'état final.

$$\Sigma p_i^\mu = \Sigma p_f^\mu \quad \mu = 0,1,2,3$$

Dans l'état initial comme dans l'état final, l'énergie impulsion totale est la somme des contributions individuelles des particules libres. On écrira :

$$T_{f,i} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i - \Sigma p_f) \quad \mathcal{M}_{f,i} \quad (6)$$

$\mathcal{M}_{f,i}$ est appelée amplitude de transition réduite : les processus quantiques doivent pouvoir se calculer à partir de cette fonction :

$$\text{états } i, f \rightarrow \mathcal{M}_{f,i}$$

Par application des principes de la mécanique quantique , la probabilité de la transition $i \rightarrow f$ sera liée au module au carré de l' amplitude de transition :

$$Prob (i, f) \propto | T_{f,i} |^2 = VT \quad (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i - \Sigma p_f) \quad | \mathcal{M}_{f,i} |^2 \quad (7)$$

- l'incertitude sur l'état final

La physique microscopique n'est pas déterministe , l'état final est variable et la détermination de probabilités est l'objectif de toute entreprise expérimentale où théorique dans le cadre d'une dynamique quantique.

Il apparaît que certaines transitions sont interdites et historiquement les progrès réalisés à travers ces interdictions ont été plus importants que ceux qui sont venus des transitions permises.

Exemple : quelques réactions interdites

$\bar{p} + p \rightarrow K^+ + \pi^-$	int. forte
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$	int. électromagnétique
$n \rightarrow p + e^-$	int. faible

6 Les symétries

Considérons formellement une opération de symétrie spatiale ou interne qui laisse l'interaction $\mathcal{L}(x)d^4x$ invariante ; soit U cette opération que l'on prendra unitaire. Cette invariance se traduit par

$$U^+ \mathcal{L}_{int}(x) d^4x U = \mathcal{L}'_{int}(x') d^4x' = \mathcal{L}_{int}(x) d^4x$$

De proche ne proche l'opérateur \mathcal{S} est invariant dans l'opération U . Cette symétrie s'applique également dans l'espace de Fock des états libres entrants et sortants ; il en résulte que les amplitudes sont invariantes.

$$A = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle = \langle Uf | \mathcal{S} |Ui \rangle$$

Exemple : U est l'opérateur de translation d'espace temps

$$\forall a \quad U(a) = \exp(ipa)$$

où p est l'opérateur de quadri-impulsion totale du système.

Retenant l'expression de \mathcal{S} sous forme perturbative (équation 5), il est possible d'écrire l'amplitude en fixant une origine aux interactions et effectuant une translation x arbitraire :

$$\mathcal{S} = U^+(x) \left(1 + \frac{1}{1!} [i \mathcal{L}_{int}(0)] + \frac{1}{2!} \mathcal{T} \int [i \mathcal{L}_{int}(0)] [i \mathcal{L}_{int}(y)] d^4y \dots \right) U(x) d^4x$$

Dans les états initiaux et finals (espace de Fock macroscopique) les quantités de mouvement sont déterminées, il s'en suit que l'amplitude fait apparaître explicitement la conservation de la quadri-impulsion comme dans l'équation 6 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,i} &= \int \exp(i(p_f - p_i)x) d^4x \\ &\times \langle f | \left(1 + \frac{1}{1!} [i \mathcal{L}_{int}(0)] + \frac{1}{2!} \mathcal{T} \int [i \mathcal{L}_{int}(0)] [i \mathcal{L}_{int}(y)] d^4y \dots \right) | i \rangle \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique aux autres symétries qui s'observent à l'échelle macroscopique comme le résultat de propriétés microscopiques, exemples : transformations de Lorentz, parité, conjugaison de charge, U(1), SU(2) etc...

7 Des probabilités aux sections efficaces et durées de vie

Considérons à nouveau la formule qui définit la section efficace, équation 1, ou la durée de vie, équation 2. Il est évident que le nombre de transitions observées pendant l'expérience dépend du nombre de particules entrées en collision, il y a donc une question de normalisation pour passer aux probabilités.

Par ailleurs, l'amplitude de transition dépend de la normalisation des états initiaux et finals, de plus la sommation sur les états finals suppose la normalisation de chaque état.

7.1 Conventions

Liste de nos conventions

- Les indices d'espace-temps sont $\mu = 0, 1, 2, 3$; la métrique g est telle que $g_{\mu\nu} = 1, -1, -1, -1$.
- Les unités sont telles que $\hbar = 1$ et $c = 1$. De plus, en l'électromagnétisme, on choisira :

$$\epsilon_0 = 1 = \mu_0 \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137,0..}$$

- La charge électronique sera négative et notée $e = -|e|$
- L'impulsion d'une particule libre est notée \vec{p} éventuellement p_μ ;
- L'énergie positive d'une particule est $\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$; l'énergie de l'état relativiste d'une particule est $E = p_0 = \pm\omega_p$
- La normalisation des états d'impulsion \vec{p} est choisie pour satisfaire à la relativité :

$$\frac{d \text{Prob}}{d^3x} = \phi_p^+(x) \phi_p(x) = 2\omega_p$$

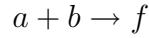
Par exemple, voir la référence [1] page 88 ou l'annexe 1. Le courant de particules libres est un quadrivecteur conservé.

- Les transformations de Fourier de l'espace physique x vers l'espace réciproque q

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int \exp(-iqx) f(q) dq \quad f(q) = \int \exp(iqx) f(x) dx \quad (8)$$

7.2 Sections efficaces

Soit la réaction



Dans le laboratoire, b est la cible et a est le projectile. Avec nos conventions,

- le flux total des particules incidentes est

$$\mathcal{F}_a = T (2\omega_a v_a)$$

- le nombre des cibles est

$$N_b = V (2\omega_b)$$

- le nombre de transitions observées est N_i

$$N_i = \sigma_{fi} \mathcal{F}_a N_b = |T_{f,i}|^2$$

En application de l'équation 7 et dans le cadre nos conventions, la section efficace et l'amplitude quantique sont liées par l'équation suivante :

$$\sigma_{\text{totale}} = \mathcal{F}^{-1} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \times |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \quad \text{avec } \mathcal{F} = (2\omega_b)(2\omega_a v_a) \quad (9)$$

On montre

$$\mathcal{F} = 4((p_a \cdot p_b)^2 - (m_a m_b)^2)^{1/2} = \sqrt{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)} \quad (10)$$

7.3 Durées de vie

Soit la désintégration



De la même façon, la probabilité de transition par unité de temps est :

$$\lambda_{\text{totale}} = \mathcal{F}^{-1} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \times |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \quad (11)$$

avec $\mathcal{F} = (2\omega_a)$ dans le référentiel de la particule $\mathcal{F} = (2m_a)$

7.4 La somme sur les états finals

La mécanique quantique précise la densité d'états d'impulsion dans l'espace réciproque d'un espace physique de volume V

$$\sum_f (\text{états d'impulsion}) = \Pi_f \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega_p'} \quad (12)$$

Exemple Si la réaction ne comporte que deux particules finales $i \rightarrow c + d$ dans le référentiel du centre de masse on vérifie :

$$\int (2\pi)^4 \delta^3(p_c + p_d) \delta(\omega_c + \omega_d - E_0) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2\omega_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2\omega_d} = (2\pi)^{-2} \frac{p'}{4E_0} \int d\Omega \quad (13)$$

où $p'(p)$ est la quantité de mouvement commune des deux particules finales (initiales) et E_0 est l'énergie dans le CM notée parfois $\sqrt{s} \equiv E_0$.

$$\sigma_{a+b \rightarrow c+d} |_{CM} = \mathcal{F}^{-1} \frac{p'}{4E_0} (2\pi)^{-2} \int | \mathcal{M}_{f,i} |^2 d\Omega \quad (14)$$

avec $\mathcal{F} = 4p E_0$ réf équation 10,

$$\sigma_{a+b \rightarrow c+d} |_{CM} = \frac{p'}{p} \left(\frac{1}{8\pi E_0} \right)^2 \int | \mathcal{M}_{f,i} |^2 d\Omega$$

pour la section élastique on aura :

$$\sigma_{a+b \rightarrow a+b} |_{CM} = \int f(\omega)^2 d\Omega \quad f(\omega) = \left| \frac{1}{8\pi E_0} \mathcal{M}_{f,i} \right| \quad (15)$$

8 L'interaction électromagnétique

8.1 Diffusion Rutherford

référence ¹



La section efficace différentielle classique (voir référence ci-dessus) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{avec } E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

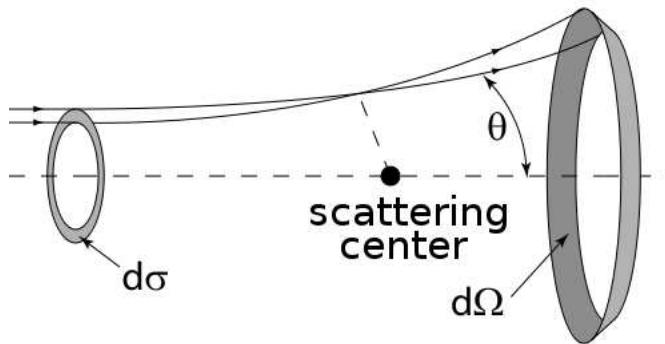


Figure 2: Diffusion Rutherford sur une cible ponctuelle

8.1.1 Démonstration en physique classique

Rappelons la formule de Rutherford :

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2bE_0}{\kappa} \quad \text{avec } \kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (16)$$

où b est la paramètre d'impact et θ l'angle de diffusion

Remarque : θ croît quand Z croît ou quand b décroît ce qui est attendu physiquement. La démonstration la plus "physique" de cette formule peut être faite par intégration des variations d'impulsion :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{p}} dt = [\vec{p}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) dt$$

En effet :

$$\text{la loi des aires : } dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad \text{avec } L = mv_0 b$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{mr^2}{L} \right) \vec{f}(t) d\theta = \frac{\kappa}{v_0 b} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u} d\theta \quad \text{avec } \theta(-\infty) = \pi \text{ et } \theta(\infty) = \theta_0$$

$$\text{avec } \vec{p}_f - \vec{p}_i = m v_0 (\cos(\theta_0) + 1, \sin(\theta_0)) \text{ et } \vec{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

On en déduit sans difficulté la formule 16 ci-dessus

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Rutherford_Scattering

8.1.2 Démonstration par la physique quantique

Soit à calculer la section efficace de diffusion d'un électron sur une charge $Z | e |$ ponctuelle située à l'origine du référentiel du laboratoire. Le diagramme de Feynman qui décrit cette transition est présenté sur la figure 3.

Les étapes de la démonstration

- Le lagrangien libre de l'électron

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)((p.\gamma) - m)\psi(x)$$

- L'équation libre de Dirac

$$((p.\gamma) - m)\psi(x) = 0$$

- L'interaction de l'électron avec un champ extérieur A_μ (principe d'interaction minimale)

$$((p.\gamma) - e(A.\gamma) - m)\psi(x) \equiv 0$$

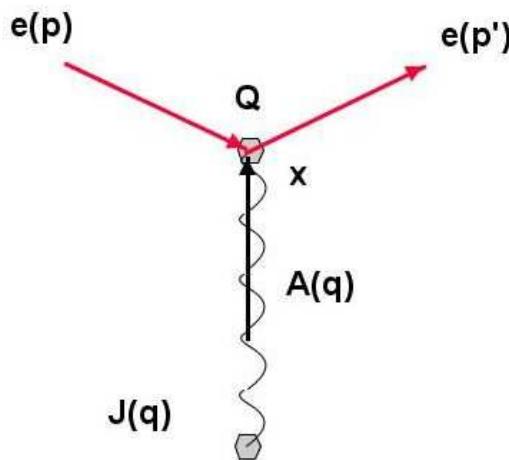


Figure 3: Diagramme pour la diffusion Rutherford sur le courant $J(q)$

- La forme hamiltonienne de cette équation

$$i\partial_0\psi(x) = [-i\partial_j\gamma^0\gamma^j + e\gamma^0(A.\gamma) + \gamma^0m]\psi(x)$$

donc pour l'interaction :

$$H_{int}(x) = e A_\mu(x) \gamma^0 \gamma^\mu \quad (17)$$

- L'amplitude de transition au premier ordre (figure 3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{f,i} &= -i \int \psi'^+(x) (H_{int}(x)) \psi(x) d^4x \\
&= -i \int \exp(i(p' - p)x) A_\mu(x) d^4x \times u(p')^+ (e \gamma^0 \gamma^\mu) u(p) \\
&\equiv -i A_\mu(q) \times \bar{u}(p') (e \gamma^\mu) u(p)
\end{aligned}$$

avec

$$q = p' - p \quad \text{et} \quad A_\mu(q) = \int \exp(iqx) A_\mu(x) d^4x$$

- Le champ de photons virtuels rayonnés par la source $J(x)$ (relations de Maxwell avec $\epsilon_0 = 1$)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu(x)$$

par transformation de Fourier, on obtient l'équation suivante sur le champ $A_\mu(q)$

$$(-iq)^2 A_\nu - (-iq)_\nu (-iq)^\mu A_\mu(q) = J_\nu(q)$$

Equation que l'on peut écrire formellement

$$A^\mu(q) = [-q^2 g_{\mu\nu} + q_\nu q^\mu]^{-1} J_\nu(q)$$

- Dans le cas d'une charge électrique ponctuelle, la conservation du courant impose qu'elle soit statique

$$J^\mu(x) = (Q \delta^3(x), \vec{0})$$

La transformée de Fourier du courant conduit à

$$J^0(q) = 2\pi\delta(q^0)Q$$

Donc

$$A^0(q) = \frac{1}{\vec{q}^2} J^0(q) = 2\pi\delta(q^0) \frac{Q}{\vec{q}^2}$$

avec $|\vec{q}|^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$

Remarque Le retour à l'espace ordinaire conduit à (par transformation de Fourier inverse)

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|\vec{x}|}$$

- L'amplitude de transition T_{fi}

$$\begin{aligned} T_{f,i} &= A_0(q) \times \bar{u}(p') (e \gamma^0) u(p) \\ &= 2\pi\delta(q^0) \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \end{aligned}$$

Dans ce cas l'amplitude de transition (réduite) est :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

- Finalement, en prenant correctement en compte les normalisations, on calcule la section efficace quantique au premier ordre coulombien en sommant le spin final et en moyennant sur le spin initial si l'électron incident est non-polarisé :

$$\sigma = \mathcal{F}^{-1} \int 2\pi\delta(q^0) \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'} \quad (18)$$

avec $\mathcal{F} = 2\omega v = 2p$.

- L'intégration sur $d^3 p'$ est simple à cause de la conservation de l'énergie ($q^0 = 0$)

$$\sigma = \mathcal{F}^{-1} \int 2\pi \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \frac{p \omega}{(2\pi)^3 2\omega} d\Omega'$$

$$d\sigma = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\frac{Qe}{\vec{q}^2}\right)^2 \sum_{\text{spin}} |\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)|^2 d\Omega'$$

- Enfin la somme sur les spins : Nous utilisons une formule connue des ondes planes de spineurs par exemple dans la référence [1] page 123 :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} (\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p))^* (\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)) &= \text{Tr}[u(p')\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu] \\ &= \text{Tr}[(p'\cdot\gamma) + m]\gamma^\mu((p\cdot\gamma) + m)\gamma^\nu] = 4(p'^\mu p^\nu + p^\nu p^\mu - ((p\cdot p) - m^2)g^{\mu\nu} \\ \sum_{\text{spin}} |\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)|^2 &= 4[\omega^2 + p^2 \cos(\theta) + m^2] = 4[2\omega^2 + p^2(\cos(\theta) - 1)] \end{aligned}$$

Remarque Tr est la trace d'une matrice.

- Enfin on obtient la section différentielle de Mott (un fermion chargé sur une cible ponctuelle) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{\text{cible}} = \left(\frac{Z\alpha}{2p^2}\right)^2 \frac{[\omega^2 + p^2 \cos(\theta) + m^2]}{2\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{Z\alpha\omega}{2p^2}\right)^2 \frac{(1 - v^2 \sin^2(\theta/2))}{\sin^4(\theta/2)} \quad (19)$$

A la limite non-relativiste on retrouve la section de Rutherford $\omega \sim m$ et $v \sim 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (20)$$

A la limite ultra-relativiste $m \sim 0$, $v \sim 1$ et $\omega \sim p$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2\omega}\right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \quad (21)$$

La section efficace a la dimension de E^{-2} ce qui est correct dans le système d'unité employé ici, $\hbar c E^{-1}$ est une longueur qui décroît avec l'énergie .

Remarque : Retour aux unités macroscopiques pour faire une application numérique dans le cas de l'expérience de Rutherford

$$\alpha + Au \rightarrow \alpha + Au$$

avec $Z = 2 \times 79 = 158$ $\alpha = 1/137,0$

$$E_0 = p_0^2/2M \sim 10 \text{ MeV} \quad Mc^2 \sim 4,10^3 \text{ MeV} \quad \hbar c = 197, 10^{-15} \text{ MeV.m}$$

$$d\sigma = \sigma_0 \times \sin^{-4}(\theta/2) d\Omega \quad \sigma_0 = 0,32 10^{-24} \text{ cm}^2 \sim \text{barn}$$

- Il est bien connu que la section efficace de Rutherford diverge à $\theta = 0$; ceci est dû à la portée infinie du potentiel coulombien. En réalité, le potentiel du noyau atomique est écranté par les électrons de l'atome à une distance d de l'ordre de l'Angström ; donc, pour des valeurs de $|\vec{q}| = 2p_0 \sin(\theta/2)$ inférieures à $\hbar d^{-1}$, la diffusion ne se produit plus. en conséquence $d\sigma = 0$ pour les valeurs de θ telles que

$$2p_0 \sin(\theta/2) < \frac{\hbar}{d} \text{ soit } \theta \sim 10^{-5} \text{ avec } d \sim 10^{-10} \text{ m}$$

Le paramètre "naturel" d'intégration de la section efficace est $|\vec{q}| = 2p_0 \sin(\theta/2)$ qui varie sur l'intervalle $[\frac{\hbar}{d}, 2p_0]$

- La structure nucléaire "apparaît" pour les grandes valeurs de $|\vec{q}|$ soit pour $d \sim 10^{-15} \text{ m}$, la diffusion Rutherford est dite "anomale".

9 La théorie quantique des champs (QED)

Les règles de Feynman permettent d'écrire l'amplitude de transition $T_{f,i}$ pour un chemin donné sous forme de graphe ; la contribution des vertex (points d'interaction) se déduit du lagrangien d'interaction.

Pour QED on a :

$$\mathcal{L}_{int} = -Q A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi (x)$$

9.1 Règles de Feynman pour QED

particule	état initial	propagateur	état final
intégration		$d^4p/(2\pi)^4$	
fermion	$u(p)$		$\bar{u}(p)$
antifermion	$\bar{v}(p)$	$i((p \cdot \gamma) - m)^{-1}$	$v(p)$
boson scalaire	1	$i(p^2 - m^2)^{-1}$	1
boson vectoriel	ϵ_μ	$i(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)^{-1}$	ϵ_μ^*
photon (jauge de Lorentz)	ϵ_μ	$ig_{\mu\nu} (-p^2)^{-1}$	ϵ_μ^*

Table 1: Règles de Feynman issues du lagrangien libre des particules

interaction quantique (QED)	$-iQ\gamma^\mu$
conservation de p	$(2\pi)^4 \delta^4(p_{in} - p_{out})$
combinatoire(nième ordre)	$\frac{1}{n!}$
potentiel classique (équation 8)	$-i\gamma_0 V(q)$

Table 2: Règles issues de \mathcal{L}_{int} pour les vertex

si	$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp(+\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4x)$
alors :	$\mathcal{S}_{f,i} = \delta_{f,i} - i T_{f,i} \quad T_{f,i} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i - \Sigma p_f) \quad \mathcal{M}_{f,i}$ enfin équations 9 11

Remarque : application à la diffusion Rutherford (figure 3) référence [4] page 149.

$$\mathcal{S}_{f,i} = \int \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)u(p)\frac{g_{\mu\nu}}{-q^2}(-iJ^\nu(q))(2\pi^4)\delta^4(p'-p-q)\frac{i d^4q}{(2\pi)^4}$$

Avec $J^j(q) = 0$ et $J^0(q) = 2\pi\delta(q^0)Q$ avec $Q = -Ze$

$$\mathcal{M}_{f,i} = \left(\frac{Qe}{\bar{q}^2}\right) \bar{u}(p')\gamma^0u(p) |_{q=p'-p}$$

Pour calculer la section efficace on reprend l'équation 18

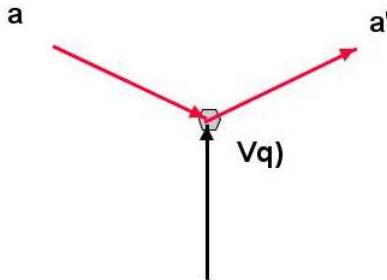


Figure 4: Diffusion sur un potentiel

9.2 Diffusion d'un fermion de spin 1/2 sur une source de potentiel $V(x)$

$$a + X \rightarrow a' + X$$

$$(p) + (q) = (p')$$

Soit à calculer la section efficace de la diffusion d'une particule de spin 1/2 sur le potentiel : par l'application des règles de Feynman au graphe du premier ordre on trouve :

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \int (\delta^4(p' - p - q)[-i V(q) \bar{u}(p')(\gamma_0) u(p)] i d^4q \\ &= V(q) [\bar{u}(p')(\gamma_0) u(p)]_{q=p'-p} \end{aligned}$$

$$V(q) = \int V(x) \exp(iqx) d^4x$$

La probabilité de transition est proportionnelle au carré de l'amplitude :

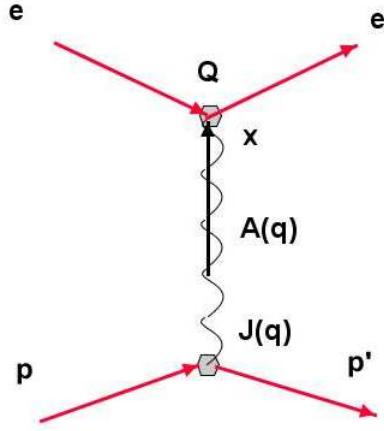
$$Prob(f, i) \sim \sum_f |T_{f,i}|^2$$

Si le potentiel est indépendant du temps, on a la conservation de l'énergie et le flux $\mathcal{F} = 2p$ est donné par unité de temps alors, intégrant sur l'énergie et en sommant sur les spins (équation 18 et conséquences) on trouve

$$\sigma = \int \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_{\text{spin}} |\bar{u}(p')\gamma^0u(p)|^2 |V(\vec{q})|^2 d\Omega' \sim \lim_{NR} \frac{m^2}{(2\pi)^2} \int |V(\vec{q})|^2 d\Omega'$$

$$\text{avec } V(q) = 2\pi \delta(q_0) V(\vec{q}) \text{ exemple } V(\vec{q}) = \frac{Qe}{\vec{q}^2} = Z\alpha \frac{4\pi}{\vec{q}^2} \text{ avec } |\vec{q}|^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$$

Remarque : Si $V(\vec{x})$ a la dimension d'une énergie, $V(\vec{q})$ a la dimension E^{-2} et la section efficace a la dimension d'une surface soit E^{-2} (CQFD).

Figure 5: Diagramme pour la diffusion électron proton : $e^- + p \rightarrow e'^- + p'$

9.3 Diffusion électromagnétique d'un électron sur un proton (neutron)

$$e^- + p \rightarrow e'^- + p'$$

$$(k) + (p) = (k') + (p')$$

9.3.1 Le courant électromagnétique du proton (neutron)

Le proton est un fermion de spin 1/2 et de charge Q , il peut être décrit par un spinor de Dirac ; son quadri-vecteur courant est de la forme :

$$J_\mu(q) = Q \times \bar{u}'(p)(\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M} q_\nu F_2(q^2))u(p) \quad (22)$$

Les autres termes possibles sont nuls à cause des symétries de l'électromagnétisme... Le courant ne dépend que de deux fonctions appelées facteurs de forme.

9.3.2 L'amplitude de transition au premier ordre (figure 5)

$$A = \mathcal{S}_{f,i} = \bar{u}(k')(-ie\gamma^\mu)u(k) \frac{i g_{\mu\nu}}{-q^2} (-i J^\nu(q))(2\pi)^4 \delta^4(k' - k + p' - p) \Big|_{q=k'-k=p-p'}$$

L'amplitude réduite vaut :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \bar{u}(k')(e\gamma^\mu)u(k) \frac{g_{\mu\nu}}{-q^2} (J^\nu(q))$$

Dans le laboratoire, la section efficace est donnée par la formule de Rosenbluth [5], références [4] page 294, [1] page 132 et 177 pour un électron ultra relativiste $m = 0$ et avec $Q = -e$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{Lab} = \left(\frac{\alpha}{2\omega \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(K_1(q^2) \cos^2(\theta/2) - K_2(q^2) \sin^2(\theta/2) \right) \quad (23)$$

avec

$$K_1 = F_1^2 + \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 \quad K_2 = \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2$$

$$q^2 = (p - p')^2 = (p'_e - p_e)^2 = -4\omega\omega' \sin^2(\theta/2) = -2M(\omega - \omega')$$

$K_1(q^2)$ et $K_2(q^2)$ contiennent les informations sur la structure électromagnétique du proton ou du neutron en particulier le rayon carré moyen qui est expérimentalement de l'ordre de $0,8\text{ fm}$. Des expériences de plus en plus précises analysent ces facteurs de forme depuis plus de 50 ans.

9.3.3 La cible est ponctuelle et élémentaire (de Dirac)

C'est une particule de Dirac comme par exemple dans $e^- + \mu \rightarrow e'^- + \mu'$ où la cible est un muon ; on a

$$J_\mu(q) = Q \times \bar{u}'(p)(\gamma_\mu)u(p) \quad (24)$$

donc

$$F_1 \equiv 1 \quad F_2 \equiv 0$$

La section efficace s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{Lab} = \left(\frac{\alpha}{2\omega \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right) \quad (25)$$

Remarque : cette dernière expression (équation 25) peut être comparée à la section efficace de Mott (équation 19)

- $\omega' = \omega$ dans l'équation 25 ci-dessus (ce qui implique $q^2 = 0$).
- un projectile sans masse (l'électron) dans l'équation 19 qui devient l'équation 21

9.3.4 La cible est complexe

Par exemple, le proton ou le neutron sont complexes car ils sont composés de quarks et éventuellement participent à l'interaction forte.

- S'ils peuvent être considérés comme ponctuels à basse énergie , les facteurs de forme F_i sont indépendants de q^2 .

$F_i = F_i(0)$	e ou μ	unité	p	n	unité
$F_1(0)$	1		1	0	
$F_2(0)$	$\sim 0,001$	μ_B	1.79	-1.91	μ_N

$F_2(0)$ est le moment magnétique anomal et μ_N est le magnéton nucléaire égal à $\frac{e}{2M_p}$.

Le moment magnétique des nucléons est donné par :

$$\mu = (1 + F_2(0)) \times \mu_N$$

Remarque : Le modèle statique des quarks permet une interprétation simple de ces résultats expérimentaux ². Le facteur de Landé g s'exprime en fonction de $F_2(0)$

$$\frac{g}{2} = 1 + F_2(0) \quad \text{soit} \quad \frac{g-2}{2} = F_2(0)$$

- à haute énergie, les facteurs de forme dépendent de q^2 ; pour le proton on obtient expérimentalement un ajustement satisfaisant avec la fonction ci-dessous qui correspond à un rayon carré moyen de 0,8 $fm = 0,8 \cdot 10^{-13} cm$

$$F_i(q^2) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2} \quad m = 0.843 \text{ GeV}$$

référence [1] page 178-179

²<http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/g-2.pdf> page 6

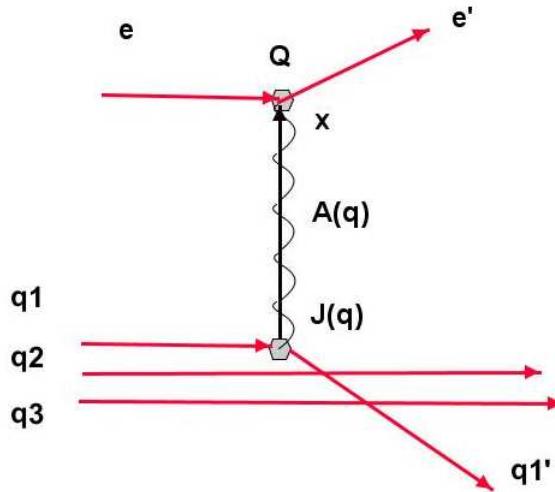


Figure 6: Diagramme pour la diffusion électron "quark" : $e^- + q_1 + \dots \rightarrow e'^- + q'_1 + \dots$

9.4 Diffusion électromagnétique inélastique d'un électron sur un nucléon

$$e^- + N + \dots \rightarrow e'^- + X$$

$$(k) + (p) = (k') + (p')$$

voir figure 6

Conditions d'observation

- Seul l'état électronique final est détecté, l'impulsion et éventuellement le spin de l'électron final sont mesurés.
- L'expérience mettra en évidence l'existence des quarks à haute énergie et dans une région cinématique particulière de l'espace de phase de l'électron diffusé
- Dans ces conditions, la section efficace est dite inclusive car l'état X n'étant pas déterminé par l'expérience, la probabilité doit être sommée sur tous les états X par principe de la MQ.
- Notations :

La masse du nucléon-cible est notée M

Dans le laboratoire est quadri-moments sont :

$$k = (\omega, \vec{k}) \quad k' = (\omega', \vec{k}') \quad p = (M, \vec{0}) \quad p' = (E', \vec{p}')$$

θ est l'angle de diffusion dans le laboratoire. $\theta = (\vec{k}, \vec{k}')$

q est le quadri-moment transféré à la cible et ν est l'énergie transférée .

$$q = (k - k') = (p' - p) \text{ et } \nu = \omega - \omega'$$

La masse de l'électron est négligée et la masse du système nucléonique X est notée W

$$\omega = |\vec{k}| \quad \omega' = |\vec{k}'| \quad W^2 = (q + p)^2$$

$$\text{On montre } W^2 = M^2 + 2(\omega - \omega')M + 2\omega\omega'(\cos(\theta - 1))$$

9.4.1 Cinématique de la diffusion inélastique

Il est facile de montrer que le domaine cinématique physiquement possible est caractérisé par les inégalités suivantes

$$0 < \omega' < \omega \quad \text{l'électron perd de l'énergie}$$

$$-2 < -1 + \cos(\theta) < 0 \quad \text{la géométrie}$$

$$M < W \quad \text{le nucléon est le système nucléonique le plus léger}$$

Cette dernière contrainte impose une borne supplémentaire au domaine ω', θ défini par les deux premières inégalités

$$1 - \cos(\theta) < \frac{(\omega - \omega')M}{\omega\omega'}$$

- On peut utiliser différentes variables cinétiques pour caractériser la diffusion par exemple $-q^2$ et W^2 .

$$-q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos(\theta))$$

$$W^2 = M^2 + 2M(\omega - \omega') + q^2$$

Le domaine physique dans le plans $-q^2, W^2$ est un triangle tel que

$$M^2 < W^2 < M^2 + 2\omega M$$

$$0 < -q^2 < \frac{4\omega^2 - a(W^2 - M^2)}{1+a} \quad \text{avec } a = \frac{2\omega}{M}$$

- On peut utiliser également ν et $-q^2$.

Le domaine physique dans le plans $\nu, -q^2$ est un triangle tel que

$$0 < \nu < \omega$$

$$-q^2 < 2M\nu$$

$$-q^2 < 4\omega(\omega - \nu)$$

- On peut utiliser également les variables de Bjorken x et y .

$$x = -q^2/2M\nu$$

$$y = (\omega - \omega')/\omega$$

Le domaine physique dans le plans ν, W^2 est tel que

$$0 < y < 1$$

$$0 < x < 1$$

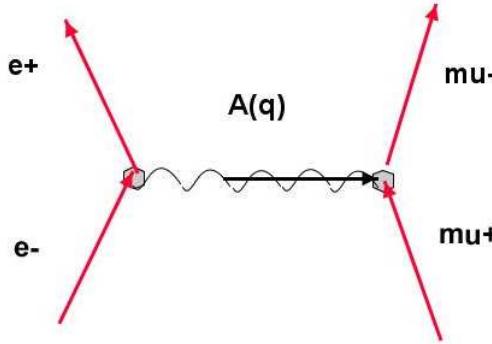
$$\frac{M}{2\omega}xy < (1 - y)$$

En pratique, à haute énergie, le domaine en (x, y) devient le carré de côté unité.

-

9.4.2 Section efficace inclusive de la diffusion très inélastique

9.4.3 Hypothèse des quarks-partons

Figure 7: Diagramme d'annihilation en vol : $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

9.5 Annihilation électromagnétique en vol

$$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$$

$$(k) + (k') = (p') + (p)$$

voir figure 7

9.5.1 L'amplitude de transition (voir figure 7)

$$A_{f,i} = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)v(p) \frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} \bar{v}(k')(-ie\gamma^\nu)u(k)(2\pi^4)\delta^4(-p' - p + k' + k)$$

avec $q = k + k' = p + p'$ et $q^2 = s = E_0^2$

L'amplitude réduite

$$\mathcal{M}_{f,i} = \frac{e^2}{-s} \bar{u}(p')\gamma^\mu v(p) \bar{v}(k')\gamma_\mu u(k)$$

Pour des particules non-polarisées, la somme et moyenne sur les spins conduit à : (notations : masse électronique = m et masse muonique = m_1)

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[(\gamma.p') + m_1)\gamma^\mu((\gamma.p) - m_1)\gamma^\nu] \times \text{Tr}[(\gamma.k') - m)\gamma_\mu((\gamma.k) + m)\gamma_\nu]$$

calcul des Tr (réf [1] page 123) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\gamma.p') + a m_1)\gamma^\mu((\gamma.p) + b m_1)\gamma^\nu] &= \text{Tr}[(\gamma.p')\gamma^\mu(\gamma.p)\gamma^\nu] + 4ab m_1^2 g^{\mu\nu} \\ &= 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + (ab m_1^2 - (p'.p)) g^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

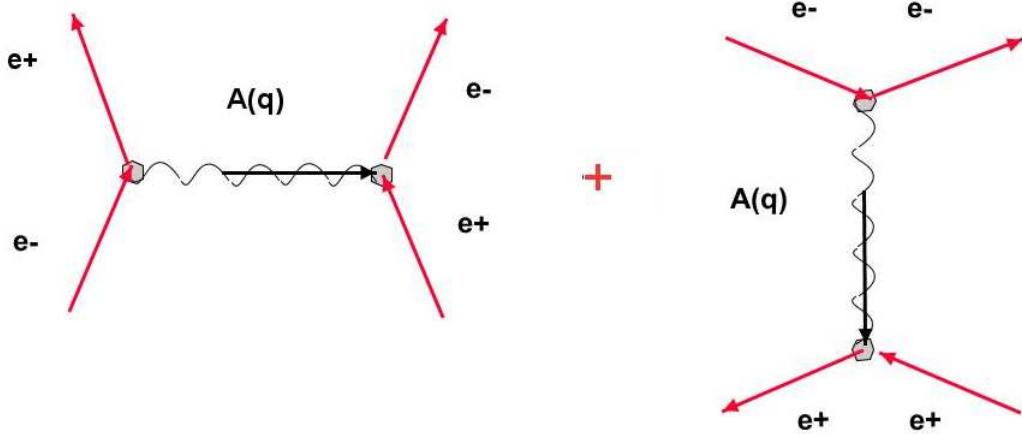
En conséquence :

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 = 4 \frac{e^4}{s^2} [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + (-m_1^2 - (p'.p)) g^{\mu\nu}] [k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (-m^2 - (k'.k)) g_{\mu\nu}]$$

9.5.2 La section efficace à la limite ultra-relativiste réf [1] page 125

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \mid_{CM} = \left(\frac{\alpha^2}{4s} \right) (1 + \cos^2(\theta))$$
$$\sigma \mid_{CM} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Application numérique : $\sigma = 0,85 \cdot 10^{-33} \text{ cm}^2 \sim nb$ à $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$

Figure 8: Diffusion Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$

9.6 Diffusion Bhabha

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

$$(k_a) + (k_b) = (k_c) + (k_d)$$

voir figure 8

L'application des règles de Feynman conduit aux amplitudes réduites suivantes :

$$\mathcal{M}_{f,i}(1) = \frac{-e^2}{q^2} |_{q=k_a+k_b} \bar{u}(k_c) \gamma^\mu v(k_d) \times \bar{v}(k_b) \gamma_\mu u(k_a)$$

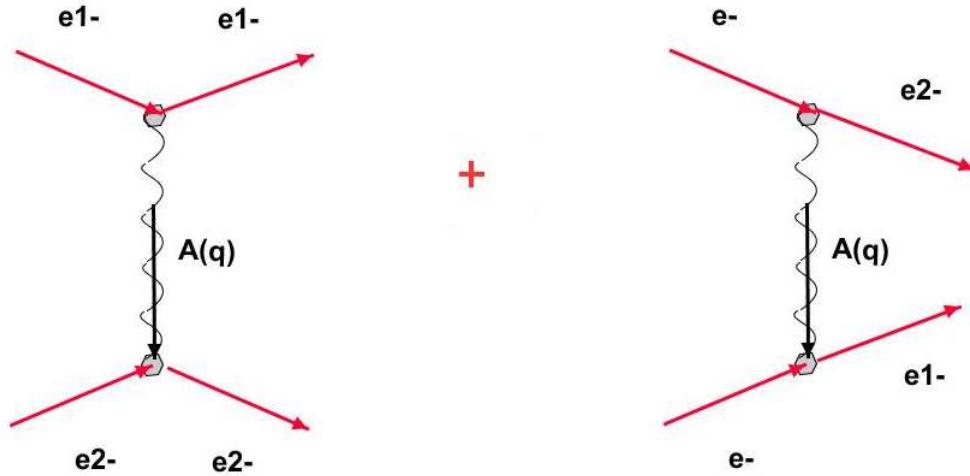
$$\mathcal{M}_{f,i}(2) = \frac{+e^2}{q^2} |_{q=k_a-k_c} \bar{u}(k_c) \gamma^\mu u(k_a) \times \bar{v}(k_b) \gamma_\mu v(k_d)$$

La section efficace dans le centre de masse s'en déduit (équation 15) avec :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \mathcal{M}_{f,i}(1) + \mathcal{M}_{f,i}(2)$$

Le résultat est (référence [1] page 121) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{CM} = \frac{m^2 \alpha^2}{16p^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right\}$$

Figure 9: Diffusion Möller $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

9.7 Diffusion Möller

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

$$(k_a) + (k_b) = (k_c) + (k_d)$$

voir figure 9

L'application des règles de Feynman conduit aux amplitudes réduites suivantes :

$$\mathcal{M}_{f,i}(1) = \frac{-e^2}{q^2} |_{q=k_a-k_c} \bar{u}(k_c) \gamma^\mu u(k_a) \times \bar{u}(k_d) \gamma_\mu u(k_b)$$

$$\mathcal{M}_{f,i}(2) = \frac{\pm e^2}{q^2} |_{q=k_a-k_d} \bar{u}(k_d) \gamma^\mu u(k_a) \times \bar{u}(k_c) \gamma_\mu u(k_b)$$

La section efficace dans le centre de masse s'en déduit (équation 15) avec :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \mathcal{M}_{f,i}(1) + \mathcal{M}_{f,i}(2)$$

Le résultat est (référence [1] page 121) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |_{CM} = \frac{m^2 \alpha^2}{16p^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right\}$$

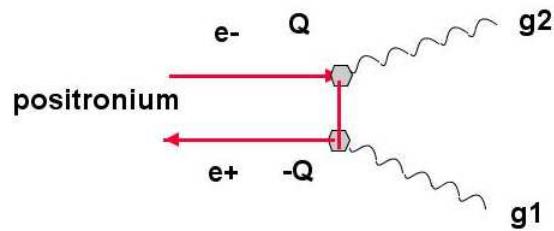
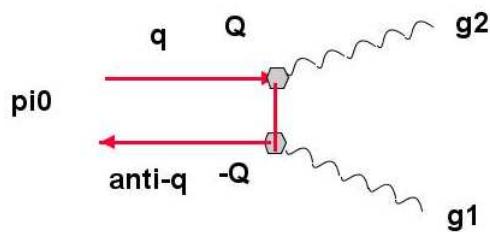


Figure 10: Diagramme d'annihilation $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$

9.8 Annihilation au repos : le positronium

$$(e^-e^+) \rightarrow 2\gamma / 3\gamma \quad \pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

voir figure 10

Figure 11: Diagramme d'annihilation du $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

$$\boxed{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}$$

voir figure 11

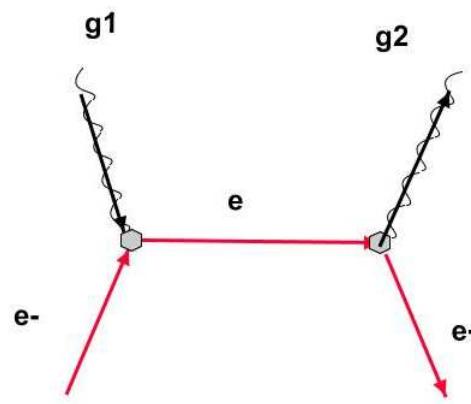


Figure 12: L'effet Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

9.9 L'effet Compton

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

voir figure 12

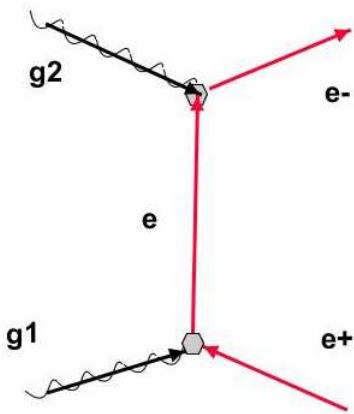


Figure 13: La matérialisation électromagnétique $2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$

9.10 La matérialisation électromagnétique

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$$

voir figure 13

10 L'interaction faible

10.1 Rappels

Rappelons le lagangien de l'interaction faible après brisure de la symétrie $SU(2)^*U(1)$ ³.

10.2 Les choix de Weinberg-Salam (1967)

Pour respecter les propriétés connues des interactions faibles, Weinberg avait choisi dans sa publication de 1967, "a theory of leptons", deux groupes continus unitaires, $SU2_L \otimes U1$ ⁴.

- $SU2$, constante de couplage g , agissant sur un doublet de fermions gauches

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ avec } T_a = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ et } B_{\mu a} = (W_{\mu 1}, W_{\mu 2}, W_{\mu 3})$$

- $U1$, constante de couplage g' , agissant sur ce doublet et sur un singulet droit électronique

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \oplus \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) (e) \text{ avec } T_a = Y \text{ et } B_{\mu a} = (B_\mu)$$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ν_L	1/2	-1/2	0
e_L	-1/2	-1/2	-1
e_R	0	-1	-1

Table 3: Le modèle Left & Right de Weinberg

Ce choix était justifié par la violation de parité par des interactions faibles et sa conservation par l'interaction électromagnétique.

L'interaction entre fermions et bosons est alors entièrement définie et sa confrontation avec l'expérience va demander environ 20 ans (il aura fallu au préalable étendre ce modèle aux hadrons ou plutôt aux quarks).

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}_L (-g T_a W_a - g' Y B) \psi_L + \bar{\psi}_R (-g' Y B) \psi_R$$

10.2.1 La question des courants neutres

Ce modèle prévoyait des interactions neutres des neutrinos mais celles-ci n'avaient pas encore été observées ; d'autre part les interactions électromagnétiques risquaient de violer la parité. Il était donc nécessaire, pour l'expérience, de redéfinir ces bosons en bosons "physiques" en attribuant des masses aux bosons et en brisant la symétrie initiale, la nature choisissant, pour ainsi dire, une solution ! :

réécrivons la partie diagonale de \mathcal{L}_{int}

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - g \{T_3\}_L W_3 - g' \{Y\} B$$

³C. Longuemare, séminaires d'analyse du lmno : Interactions électro-faibles (janvier 2006) ou Sur la particule de Higgs (décembre 2008).

⁴ou peut-être $U2_L \otimes U1_R$? car les sous-espaces L et R seraient alors sur un pied d'égalité.

en explicitant les courants fermioniques droits et gauche :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{J}_3\}_L &= \bar{\psi}_L (T_3 \gamma) \psi_L \\ \{\mathcal{J}_Y\} &= \bar{\psi}_L (Y \gamma) \psi_L + \bar{\psi}_R (Y \gamma) \psi_R\end{aligned}\quad (26)$$

A la suite de Weinberg on effectue une rotation dans l'espace (W_3, B)

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ A \end{pmatrix}$$

10.2.2 La partie électromagnétique

L'interaction électromagnétique devient (interaction avec A)

$$\mathcal{L}_{em} = \dots - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A (\{\mathcal{J}_{3L} + \mathcal{J}_Y\}) \quad \mathcal{J}_{em} = \{\mathcal{J}_{3L} + \mathcal{J}_Y\} - e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} > 0$$

$$\mathcal{L}_{em} = \dots - |e| A \mathcal{J}_{em}$$

en explicitant pour les leptons :

$$\mathcal{J}_{em} = \{(\bar{\nu}\nu)_L \left(\frac{1}{2}\right) + (\bar{e}e)_L \left(\frac{-1}{2}\right) + (\bar{\nu}\nu)_L \left(\frac{-1}{2}\right) + (\bar{e}e)_L \left(\frac{-1}{2}\right) + (\bar{e}e)_R (-1)\}$$

Soit

$$\mathcal{J}_{em} = -(\bar{e}e)$$

en clair

$$\mathcal{L}_{em}(x) = -e A_\mu \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) = -|e| A_\mu \mathcal{J}_{em}^\mu \quad (27)$$

L'interaction électromagnétique conserve la parité et le neutrino n'interagit pas avec le champ électromagnétique A . On obtient l'expression de la charge électronique dans ce modèle :

$$e = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} < 0 \quad (28)$$

10.2.3 La partie faible neutre

Le modèle prévoyait l'existence d'une interaction neutre (couplage au Z_0) des neutrinos qui a été découverte en 1973 par une expérience CERN conduite par le professeur A. Lagarrigue du LAL (Orsay). On peut écrire l'interaction du Z_0 explicitement comme cela a été fait pour l'interaction électromagnétique. En introduisant l'angle de Weinberg θ_W tel que :

$$\cos(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g'} \quad ; \quad \sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g} \quad (29)$$

en explicitant :

$$\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0 (\{\cos^2(\theta_W) \mathcal{J}_{3L} - \sin^2(\theta_W) \mathcal{J}_Y\})$$

Remarque : Le lien entre l'électromagnétisme et les interactions faibles neutres s'exprime conventionnellement par la relation ci-dessous :

$$\text{si } \{\mathcal{J}_Y\} = \{J_{em} - \mathcal{J}_{3L}\} \Rightarrow \{J_Z\} = \{\mathcal{J}_{3L} - \sin^2(\theta_W) \mathcal{J}_{em}\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0 \mathcal{J}_Z}$$

en explicitant pour les leptons:

$$\mathcal{J}_Z = \left((\bar{\nu}\nu)_L \left(\frac{1}{2} \right) + (\bar{e}e)_L \left(\frac{-1}{2} \right) - \sin^2(\theta_W) (-\bar{e}e) \right)$$

en clair

$$\mathcal{L}_Z(x) = -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_{0\mu} \left(\bar{\nu}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu(x) + \bar{e}(x) \gamma^\mu \left(-\frac{1 - \gamma_5}{2} - 2\sin^2(\theta_W) \right) e(x) \right) \quad (30)$$

10.2.4 La partie faible chargée

Cette partie du Lagrangien d'interaction est due aux bosons "primaires" W_1 et W_2 qui sont responsables des désintégrations bêta (figure ??) soit :

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - g (\{\mathcal{J}_{1L} W_1 + \mathcal{J}_{2L}\}_L W_2)$$

que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}_{+L} W_+ + \mathcal{J}_{-L} W_-)$$

$$T_+ = T_1 + iT_2 \quad T_- = T_1 - iT_2$$

avec

$$W_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - iW_2) \quad W_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + iW_2)$$

en explicitant pour les leptons :

$$\mathcal{L}_W = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (W_+ (\bar{\nu}e)_L + W_- (\bar{e}\nu)_L)$$

en clair

$$\mathcal{L}_W(x) = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_{+\mu} \bar{\nu}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e(x) + W_{-\mu} \bar{e}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu(x) \right) \quad (31)$$

De ce résultat, il est possible de calculer une première estimation de la masse des W à partir de la durée de vie du neutron ⁵ : on trouve $M_W \sim 50 \text{ GeV}$ si g est choisi de l'ordre de $|e|$.

Plus précisément, on vérifie avec $\cos(\theta_C) = .974$ et les valeurs de la table ?? :

$$\frac{1}{\tau \times 10,20} = \frac{G_\beta^2 m^5}{2\pi^3} = \left(\frac{g^4}{(4\pi)^3} \right) \frac{\cos^2(\theta_C) m^5}{M_W^4} = 1.109 10^{-4} \text{ sec}^{-1} = 7,299 10^{-26} \text{ MeV}$$

$$\tau = 884 \pm 10 \text{ sec expérimentalement } 887 \pm 2 \text{ sec}$$

10.3 Règles de Feynman pour l'interaction électro-faible

interaction électromagnétique (QED)	$-iQ\gamma^\mu$
interaction faible CC	$-iQ\gamma^\mu$
interaction faible CN	$-iQ\gamma^\mu$

Table 4: Règles issues de \mathcal{L}_{int} pour les vertex des interactions électrofaibles

⁵C. Longuemare : Interactions électro-faibles, janvier 2006

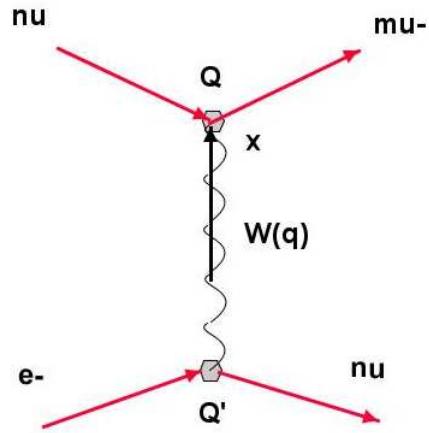


Figure 14: Diffusion beta inverse $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$

10.4 Diffusion beta inverse

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$

voir figure 14

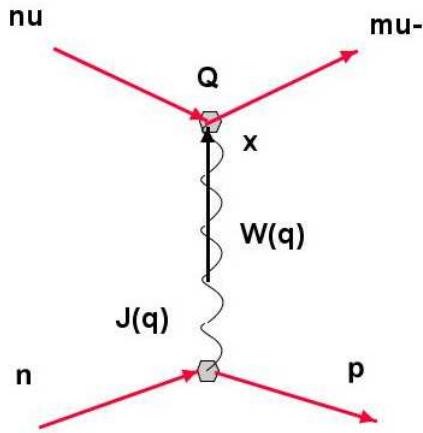


Figure 15: Diffusion xx des neutrinos $\nu + n \rightarrow \mu^- + p$

10.5 Diffusion des neutrinos (anti neutrinos) sur les nucléons

$$\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu + n/p \rightarrow \mu^-/\mu^+ + p/n$$

voir figure 15

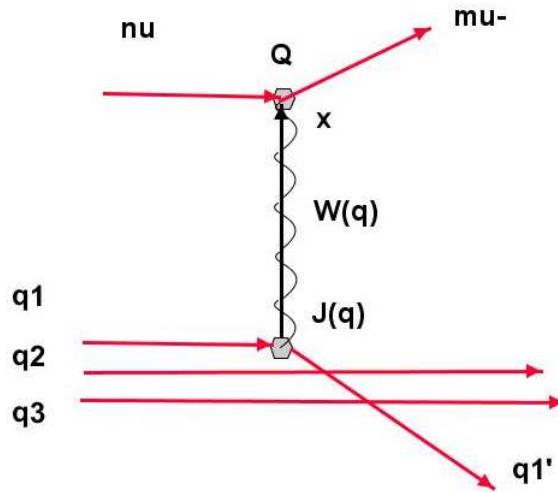


Figure 16: Diffusion très inélastique d'un neutrino $\nu_\mu + q_1 + \dots \rightarrow \mu^- + q'_1 + \dots$

10.6 Diffusion inélastique d'un neutrino (anti neutrino) sur un "quark"

$$\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu + n/p \rightarrow \mu^-/\mu^+ + X, \quad \forall X$$

voir figure 16

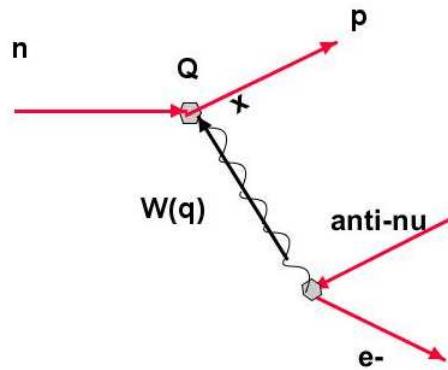


Figure 17: Désintégration du neutron $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

10.7 Désintégration du neutron

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

voir figure 17

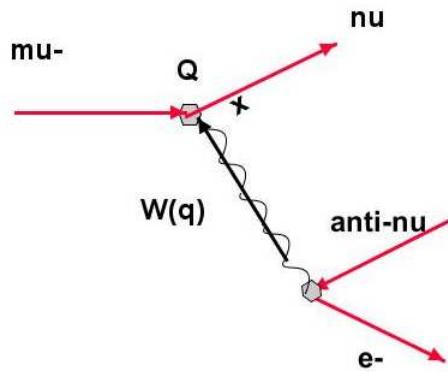


Figure 18: Désintégration beta du muon $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}$

10.8 Désintégration beta du muon

$$\mu^\pm \rightarrow \bar{\nu}_\mu / \nu_\mu + e^+ / e^- + \nu / \bar{\nu}$$

voir figure 18

10.9 Désintégration du pion chargé

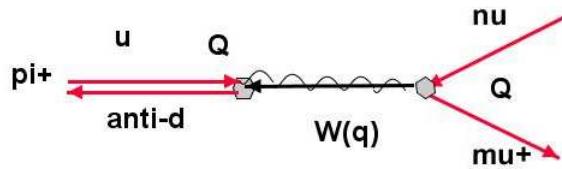


Figure 19: Désintégration du pion $\pi^- \rightarrow +\mu^- + \bar{\nu}$

$$\boxed{\pi^\pm \rightarrow \mu^+/\mu^- + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu}$$

voir figure 19

11 Conclusion

Dans cette note, nous avons voulu montrer et expliquer avec quelques détails comment la théorie quantique amenait à des prédictions précise à l'ordre le plus bas dans quelques processus élémentaires bien connus. Evidemment, il existe beaucoup d'autres transitions moins élémentaires qui, par exemple, mettent en œuvre l'interaction forte ; les calculs sont alors moins directs et requièrent des hypothèses supplémentaires. Nous n'avons pas souhaité aborder ces questions en nous limitant aux transitions les plus proches des lois fondamentales de la théorie unifiée des interactions faibles et électromagnétiques.

12 Annexe 1

La normalisation des états des particules physiques ?

Eléments

- La sommation sur tous les états d'impulsion d'une particule impose d'intégrer dans tout l'espace p

$$\int d^4p \text{ avec } p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

- Pour une particule physique initiale ou finale, on se restreint aux états physiques sur leur "couche de masse" et aux énergies positives

$$\delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) d^4p$$

ce qui donne, en intégrant sur p_0

$$\frac{d^3p}{2\omega_p} \quad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

- La normalisation est liée aux propriétés de commutation (anticommutation) des opérateurs de création et d'annihilation des états physiques des particules et aux **conventions** choisies, ici:

$$\langle p' | p \rangle = \langle 0 | [a_{p'}, a_p^+] | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^3(p - p')$$

En utilisant la fermeture des états $|x\rangle$

$$\int \langle x | p' \rangle^* \langle x | p \rangle d^3x = \int 2\omega_p \exp(-i(p - p')x) d^3x$$

on justifie pour $p = p'$

$$|\langle x | p \rangle|^2 = 2\omega_p \quad \text{avec} \quad \int d^3x = V$$

References

- [1] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [2] M. Le Bellac. *{ Des phénomènes critiques aux champs de jauge }*. InterEditions CNRS, 1988.
- [3] S.J. Chang. *{ Introduction to Quantum Field Theory }*. World Scientific, Inc., 1990.
- [4] P. Renton. *{ Electroweak interactions }*. Cambridge UP., 1990.
- [5] M. N. Rosenbluth. High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons. *Phys. Rev.*, 79(4):615–619, Aug 1950.
- [6] L.H. Ryder. *{ Quantum Field Theory }*. Cambridge UP., 1985.
- [7] C. Itzykson & Zuber xx. *{ Quantum field theory }*. Macgraw Hill, Inc., 1980.

référence ⁶

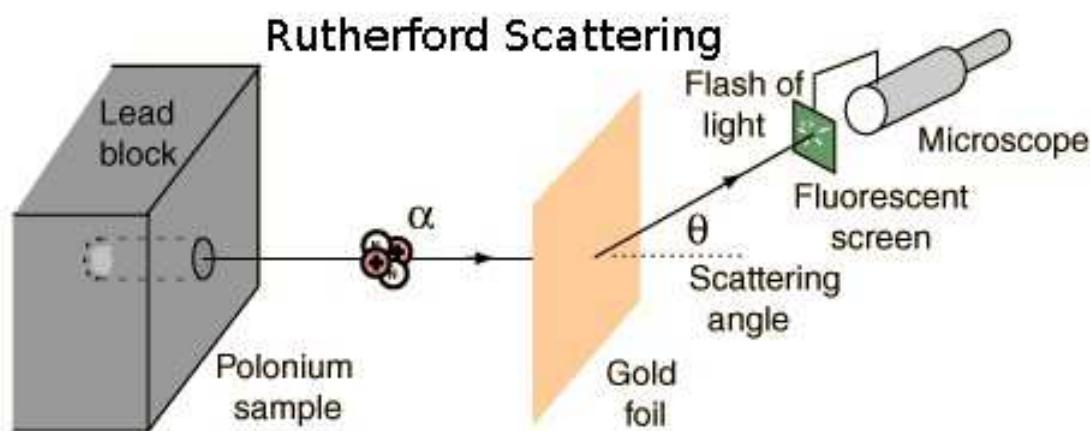


Figure 20: Principe de la diffusion Rutherford (1909)

⁶tribute to : [hyperphysics.phy-astr](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu)