

Electrodynamique et g - 2

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

16 et 23 janvier 2007

Version *version* 12/03/07

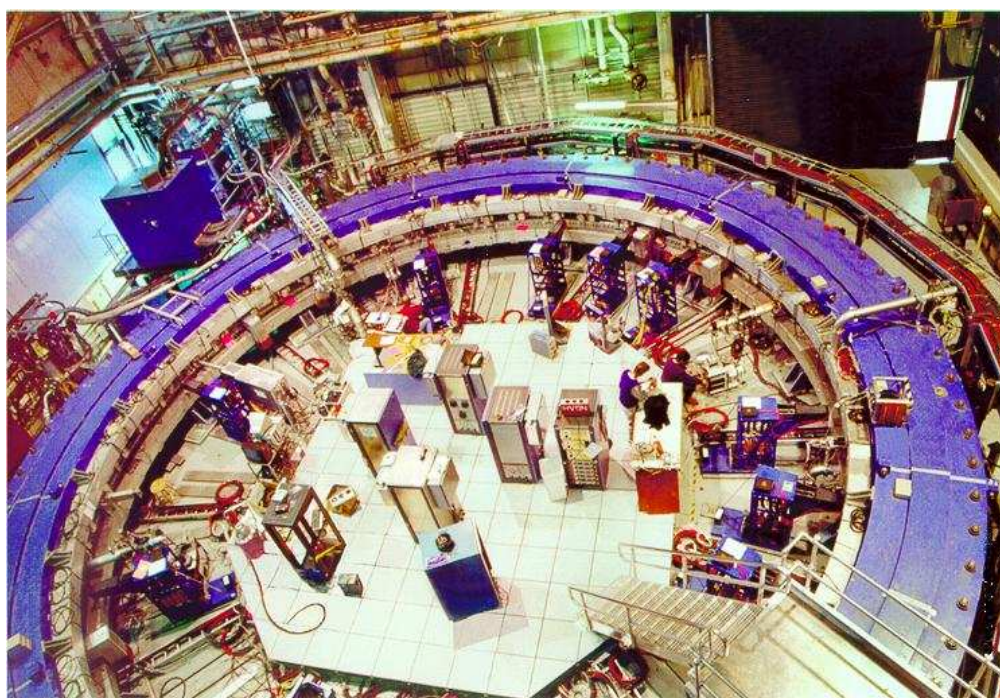


Figure 1: Expérience **g-2** E821 à BNL (Brookhaven Nat Lab (NY))

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu les 16 et 23 janvier 2007 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2006-2007

SOMMAIRE

1	Introduction	4
1.1	Rapport gyromagnétique en physique classique	4
1.2	Le facteur g de Landé	4
1.2.1	Le moment magnétique des leptons	5
1.2.2	Le moment magnétique des hadrons	6
1.3	L'expérience g-2 du muon : réf [7]	7
1.3.1	Principe de l'expérience	7
2	L'électrodynamique des fermions ponctuels relativistes	10
2.1	L'équation relativiste d'un lepton ponctuel en champ électromagnétique classique . .	11
2.1.1	L'électron libre	11
2.1.2	L'électron en interaction avec un champ E.M.	12
2.2	Influence du champ électrique $\mathcal{E}$	13
2.2.1	La structure fine	13
2.3	Influence du champ magnétique $\mathcal{B}$	13
2.3.1	La structure hyperfine , résonance magnétique nucléaire	13
2.3.2	La précession de Larmor (quantique non-relativiste)	14
2.4	Conclusion	14
3	Renormalisation et calcul de g-2	15
3.1	Le lagrangien électromagnétique	15
3.2	Matrice S , graphes de Feynman et amplitude de transition	16
3.3	Propagation d'un électron dans un champ classique	16
3.4	L'amplitude d'interaction E.M. à l'ordre α	17
3.5	Vers les règles de Feynman pour l'amplitude	19
3.6	Règles de Feynman pour l'amplitude $-i\mathcal{M} = ?$	20
3.7	La diffusion Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	21
3.8	Les corrections quantiques à l'ordre α^2	22
3.9	Calcul de $(-i\mathcal{M}_2)$ et contribution au moment magnétique	23
3.10	Les termes d'ordre supérieurs réf [6], [5]	25
3.11	Conclusion	26
4	CONVENTIONS	27
5	ANNEXES	30

List of Figures

1	Expérience g-2 E821 à BNL (Brookhaven Nat Lab (NY))	1
2	Résultats de l'expérience E821 BNL 8 Janvier 2004	5
3	Modèle des quarks : structure du proton et du neutron	6
4	Proposition d'expérience E821 @ BNL	7
5	Précession du spin dans un champ électromagnétique E et B (réf [9]) (pour un électron la valeur de e ci-dessus est négative)	8
6	Schéma de l'expérience (réf [8])	9
7	Coût de l'expérience : 15 M\$, réf [8]	9
8	Graphe de Feynman pour l'amplitude de transition au premier ordre	18
9	Graphe pour l'interaction $e^- + \gamma \rightarrow e^-$	19
10	Graphe de Feynman (1 parmi 2) pour la diffusion Compton au premier ordre en α .	21
11	Les corrections à l'ordre α^2	22
12	Des calculs ont été publiés à l'ordre 5 en mars 2006	22
13	Graphe de Feynman en α^2 qui contribue à g-2	23
14	Corrections à l'ordre α^3 pour l'électron : [5]	25
15	Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.	30
16	propagateur de Feynman	31
17	Dynamique d'un fermion en présence du champ E.M.	32
18	Amplitude de transition : règles de Feynman	32
19	Calcul de l'amplitude de transition : M	33
20	Calcul des corrections radiatives de la figure 13	34

1 Introduction

Il s'agit d'étudier la structure interne des particules à travers la relation qui lie leur moment cinétique et leur moment magnétique.

le moment cinétique est lié à la distribution des masses et à leur vitesse.

$$\vec{j} = \sum m \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (1)$$

le moment magnétique est lié à la distribution des charges et à leur vitesse

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \sum q \vec{r} \wedge \vec{v} = I \vec{S} \quad (2)$$

Remarque : l'origine du référentiel est le barycentre des masses et des charges.

1.1 Rapport gyromagnétique en physique classique

Considérons une particule chargée (q) de masse m en rotation autour d'un axe, la physique classique lui associe un moment cinétique $\vec{j}$ et un moment magnétique $\vec{\mu}$, ils sont colinéaires et leur rapport est appelé rapport gyromagnétique

$$\vec{\mu} = \gamma_g \vec{j} \quad \gamma_g = \frac{q}{2m} \quad (3)$$

Ce résultat reste vrai si la masse et la charge sont distribuées par la même fonction par exemple pour une sphère homogène en masse et en charge.

Le lien peut être plus complexe si les masses et les charges ne sont plus distribuées à l'identique. La mesure du rapport gyromagnétique γ_g donne alors une information sur la complexité du système par exemple pour les protons et neutrons que l'on pense constitués de quarks de charge 2/3 et -1/3 mais aussi le cas pour les noyaux et les atomes.

1.2 Le facteur g de Landé

Le facteur de Landé noté g permet de redéfinir la relation entre j et μ en terme indépendant des unités. Pour une particule de charge q et de masse m g sera défini par :

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{q\hbar}{2m} \right) \left(\frac{\vec{j}}{\hbar} \right) \quad (4)$$

Pour les leptons la charge q est celle de l'électron, pour les nucléons (protons ou neutrons) la charge Q et la masse M sont celles du proton. Ces choix permettent de définir des unités "naturelles" de moment magnétique telles que le magnéton de Bohr et le magnéton nucléaire respectivement pour la physique atomique et pour la physique nucléaire (application en RMN).

$$\begin{aligned} \mu_{Bohr} &= \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \\ \mu_N &= \left(\frac{e\hbar}{2M} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Measured g-factors	Currently accepted NIST values
Elementary Particle	
Electron (-)	-2.002 319 304 3718
Neutron	-3.826 085 46
Proton	5.585 694 701
Muon (-)	-2.002 331 8396
2_1H	0,85743823
3_1H	5,95792496
3_2He	-4,2552497
6_3Li	0,8220473
9_4Be	-0,7852
${}^{17}_8O$	-0,757516
${}^{19}_9Be$	5,257736
${}^{21}_{10}Ne$	-0,7852

Table 1: Le moment magnétique des leptons et hadrons

1.2.1 Le moment magnétique des leptons

Pour une particule, l'écart du $|g|$ à sa valeur "élémentaire" 2 est caractérisé conventionnellement par a_μ :

$$a_\mu = \frac{|g| - 2}{2} \quad (6)$$

Pour les fermions de **spin 1/2 élémentaires**, la valeur attendue de la théorie de Dirac est ± 2 . Pour le muon la valeur ci-dessus, table 1, conduit à $a_\mu = 0,0011659198$ une valeur qui peut être considérée comme faible (figure 2)

La différence entre les leptons muon et électron n'est due qu' à la différence des masses de ces deux particules respectivement 0,511 et 105,6 MeV/c².

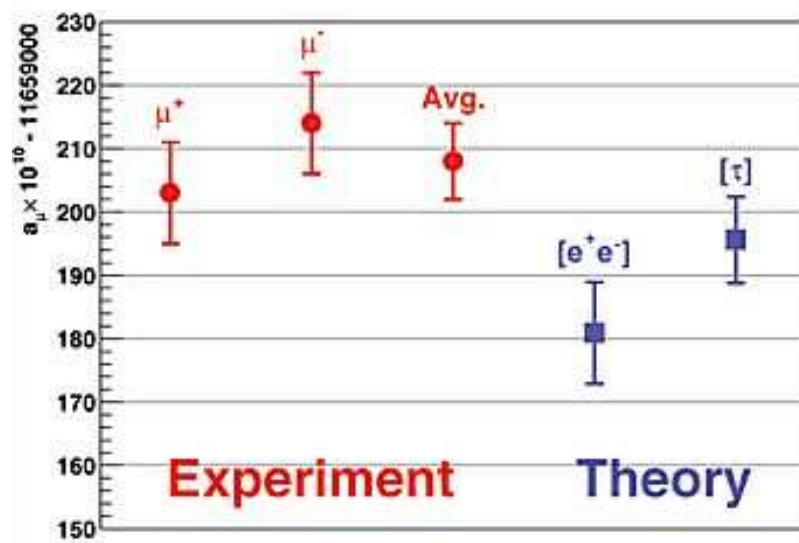


Figure 2: Résultats de l'expérience E821 BNL 8 Janvier 2004

1.2.2 Le moment magnétique des hadrons

Des valeurs de g contenues dans la table 1, il est raisonnable de conclure que les leptons sont approximativement élémentaires et les hadrons complexes c'est à dire constitués de fermions plus élémentaires.

Prenons par exemple le cas des nucléons (protons ou neutrons). On peut risquer un calcul qualitatif de leur facteur g sur la base du modèle des quarks (**pour en savoir plus voir la référence [2] page 55**).

Dans ce modèle un proton est un ensemble de trois quarks de charges $2/3 e$ (quarks up) et $-1/3 e$ (quark down) . Pour "faire" un proton, il faut deux quarks up de spin $+1/2$ et un quark down de spin $-1/2$, si l'on admet que la masse des quarks est la masse du proton divisé par 3 , on obtient g par un calcul très naïf

$$g \propto \sum_i \pm \frac{q_i}{m_i} \quad (7)$$

- pour le proton :

$$g \propto 2 \frac{2/3}{1/3} + (-1) \frac{-1/3}{1/3} = 5 \text{ comparé à } 5.58 \quad (8)$$

- pour le neutron

$$g \propto 2 \frac{-1/3}{1/3} + (-1) \frac{2/3}{1/3} = -4 \text{ comparé à } -3.82 \quad (9)$$

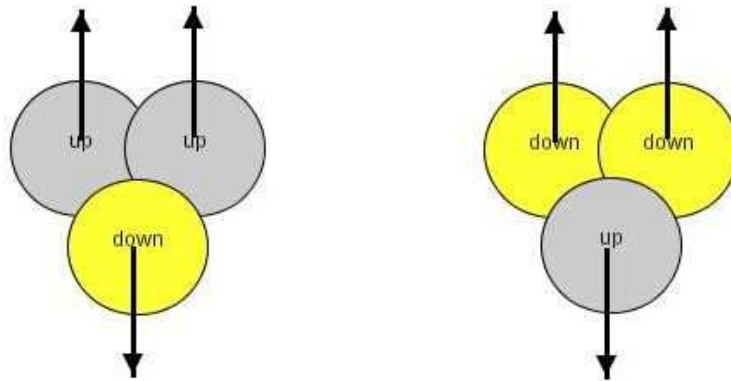


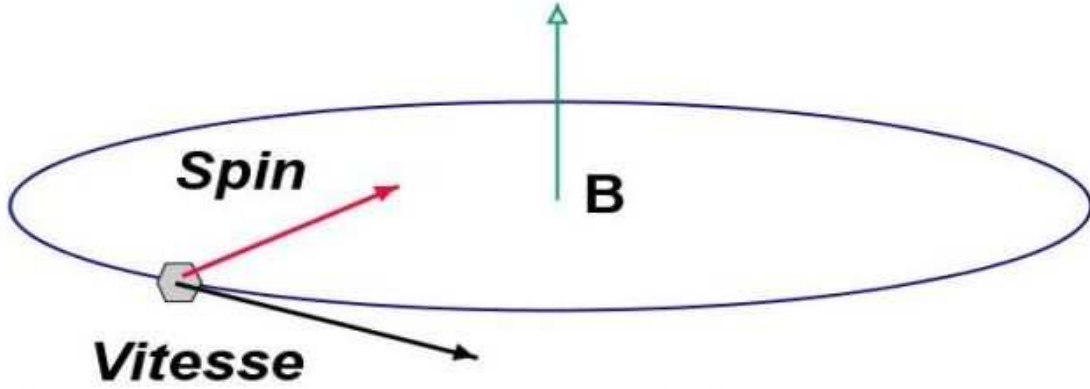
Figure 3: Modèle des quarks : structure du proton et du neutron

Conclusion : Il n'est pas possible d'obtenir des informations fondamentales de la mesure du moment magnétique des hadrons ou des noyaux car ils sont trop complexes, cependant, les applications technologiques du magnétisme nucléaire sont importantes (**RMN , structure hyperfine**) ; elles permettent également l'identification des noyaux par des mesures magnétiques.

1.3 L'expérience g-2 du muon : réf [7]

réf [7] publication PRL January 8, 2004.

1.3.1 Principe de l'expérience



1.2. Overview of the AGS Experiment

The principle of the experiment is based on the spin motion of polarized muons in a storage ring and is the same as that of the third CERN measurement of a_μ . [1] In a magnetic field B in a storage ring the spin precesses with an angular frequency ω_s which is greater than the orbital cyclotron angular frequency ω_c by ω_a , the $(g - 2)$ precession frequency:

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = \frac{e}{mc} a_\mu B. \quad (1.2.1)$$

This equation applies for all values of the momentum. For a special value of the relativistic variable γ , an electric field does not contribute to the spin precession, and the vertical focussing in the storage ring can be provided by electric quadrupoles, with no effect on the spin precession of a central momentum muon. This “magic momentum” is p_μ is 3.09 GeV/c or equivalently the “magic γ ” is $\gamma = 29.3$. The use of electrostatic quadrupoles for vertical focussing permits the magnetic field to be as pure a dipole field as it is possible to make.

Figure 4: Proposition d'expérience E821 @ BNL

Dynamique non relativiste dans un champ magnétique uniforme d'une particule de masse m portant un moment magnétique μ rigide associé à un moment cinétique intrinsèque j (spin)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_c = -\left(\frac{q}{2m}\right) 2 \vec{B} \quad (10)$$

Il en résulte que, avec g en valeur absolue :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right) g \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_s = -\left(\frac{q}{2m}\right) g \vec{B} \quad (11)$$

$\omega_a = \omega_s - \omega_c = -\frac{q}{2m} (g - 2) B \quad \text{unités internationales}$
--

Remarque Dans l'approximation $g = 2$ (**en valeur absolue**) le spin a une direction qui est liée à celle du mouvement. L'observation d'un mouvement périodique du spin par rapport à la direction de la vitesse est une mesure de la différence $\omega_s - \omega_c$ et donc de $g - 2$. Ce résultat se conserve en dynamique relativiste (référence [11], 180 équation 41,9) où le mouvement de la direction $\vec{\xi}$ du spin vérifie :

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \frac{q}{2m} \left[(g - 2 + \frac{2}{\gamma}) (\vec{\xi} \wedge \vec{\mathcal{B}}) + (g - 2) \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{B}}) (\vec{\beta} \wedge \vec{\xi}) \right]$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (12)

$$\vec{\Omega}_s = \frac{-e}{2m} \left(-(g - 2 + \frac{2}{\gamma}) \vec{\mathcal{B}} + (g - 2) \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \vec{\beta} \right)$$

avec $\vec{\xi}$ la direction du spin et $\vec{\mathcal{B}}$ le champ magnétique.

L'évolution de la quantité de mouvement suit la loi bien connue de la dynamique relativiste :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{\mathcal{B}} = +\frac{q}{2m} \left(-\frac{2}{\gamma} (\vec{\mathcal{B}} \wedge \vec{p}) \right)$$

$$\vec{\Omega}_c = \frac{-e}{2m} \left(-\frac{2}{\gamma} \vec{\mathcal{B}} \right)$$

En particulier le mouvement du spin relativement à la vitesse est donné par la formule générale de la figure 5 qui est tirée de la proposition d'expérience et qui tient compte d'un champ électrique, magnétique et d'un éventuel moment dipolaire électrique de la particule.

Pour un électron ($q = -e$ et $g \geq 2$) dans un anneau ($\vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{B}} \sim 0$) la trajectoire est parcourue dans le sens positif (trigonométrique) par rapport à la direction du champ magnétique tandis que son spin se décale lentement dans le même sens à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_s - \vec{\Omega}_c = \frac{e}{2m} (g - 2) \vec{\mathcal{B}}$.

4.3.1. The Most General Case: Electric and Magnetic Dipole Moments

The most general formula for the muon spin precession, assuming that the muon has both a magnetic and electric dipole moment and moves in the presence of both electric and magnetic fields, is given by

$$\omega_a = -\frac{e}{2mc} \left[(g - 2) \mathbf{B} - \frac{(g - 2)\gamma}{\gamma + 1} (\beta \cdot \mathbf{B}) \beta + \eta \beta \times \mathbf{B} + \beta \times \mathbf{E} \left(\frac{2}{\beta^2} - g \right) \right] \quad (4.3.1)$$

where $\omega_a = \omega_s - \omega_c$ as before and ω_s is the total rate of spin precession, ω_c is the cyclotron frequency, g is the usual muon g factor, the anomaly being $a = (g - 2)/2$, and η is a parameter proportional to the electric dipole moment,

$$D_\mu = \left(\frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right).$$

Figure 5: Précession du spin dans un champ électromagnétique $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ (réf [9]) (pour un électron la valeur de e ci-dessus est négative)

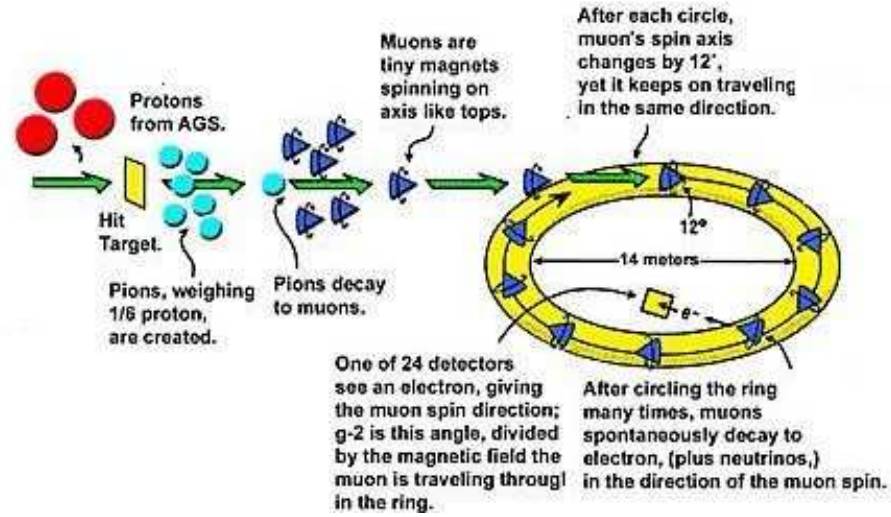


Figure 6: Schéma de l'expérience (réf [8])

Table 1.3.1: DOE Construction Cost Estimate (2/94)

WBS	Item	$E\&C(K\$)$	To go($K\$$)	Total($K\$$)
1.1	Storage Ring Magnet	4459	772	5231
1.2	Beam Monitoring	0	0	0
1.3	Magnetic Shims	276	135	411
1.4	Vacuum Chamber/Quad	243	703	946
1.5	Detectors	0	444	444
1.6	Beam/Exp. Hall	1803	1656	3459
1.7	Field Measurement	0	60	60
1.8	Muon Kicker	0	790	790
1.9	DAQ & Control	0	175	175
1.13	Direct Labor	3532	180	3712
Total	E821	10313	4915	15228

Figure 7: Coût de l'expérience : 15 M\$, réf [8]

2 L'électrodynamique des fermions ponctuels relativistes

Les différents effets relativistes :

- L'électron est une particule légère donc "facilement relativiste"
- L'électron n'est pas absolument ponctuel car il porte un spin : il faut utiliser l'équation de Dirac qui décrit l'état d'un fermion ponctuel.
- L'électron est électriquement chargé, il porte un moment magnétique qui est associé à son spin. C'est une particule qui interagit par électromagnétisme et aussi par interaction faible.

$$\vec{\mu} = \frac{g}{2} \mu_{Bohr} \vec{\xi} \quad \text{avec } g = -2.0023193043718 \quad (13)$$

- Pour l'électron le facteur g de Landé est très légèrement différent de -2 ce qui indique une déviation par rapport aux prédictions de la théorie de l'électron relativiste ponctuel dans un champ E-M classique : la correction est essentiellement due à QED. Il faut introduire la seconde quantification (QED) et décrire un électron plus complexe.
- Le muon présente l'avantage d'être plus massif que l'électron et ainsi d'ouvrir l'accès à des corrections de plus haute énergie.
L'idéal serait de faire la mesure avec le τ mais la production de cette particule est très difficile.

lepton	masse MeV/c ²
e	0,511
μ	105,6
τ	1777,

2.1 L'équation relativiste d'un lepton ponctuel en champ électromagnétique classique

Notations

$$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \text{ soit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

L'énergie impulsion $P = (E, \vec{p})$

Les champs électriques et magnétiques $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$

2.1.1 L'électron libre

- L'équation de Dirac :

$$p_\mu = i\partial_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

- Les matrices de Pauli :

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \quad \text{si } (ijk) \equiv +$$

- Les matrices γ^μ dans la représentation de Pauli-Dirac :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \beta\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :

1. γ^5 invariant (groupe de Lorentz propre)
2. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \rightarrow$ générateurs du groupe Lp
3. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
4. conséquence : décomposition symétrique anti-symétrique du produit

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -i \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$$

5. $\sigma^{\mu\nu}$:

$$\sigma^{0k} = i \alpha_i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{ij} = \Sigma_k \quad \text{si } (ijk) \equiv + \quad \text{avec } \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (14)$$

- Les solutions libres pour l'électron : avec $\omega = \sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -\omega - m \end{pmatrix} \psi = 0 \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \cdot p}{\omega + m} \chi \end{pmatrix} \quad (15)$$

2.1.2 L'électron en interaction avec un champ E.M.

- principe d'interaction minimale (invariance de jauge : référence [11], 144 équation 32,1 et 32,3) :

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \rightarrow \quad p_\mu - q A_\mu = i\partial_\mu - q A_\mu \quad (16)$$

par exemple : pour un électron dans un champ $A_0 = A^0 = V$ le potentiel électrique.

$$p_0 = i\partial_0 \quad \rightarrow \quad E + e A_0 = i\partial_0 + e V$$

- Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des fermions relativistes** de spin 1/2 (leptons) et le champ classique A_μ (photons) s'écrit :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m \} \psi(x)$$

- Les courants de charges sont la source des champs (Maxwell) :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$$

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants (action sur ψ):

$$\{ \gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m \} \psi(x) = 0$$

- Conséquence (vers l'équation de Klein-Gordon) : Avec $\mathbf{q} = -\mathbf{e}$ et en multipliant à gauche par $(\gamma^\mu (p - qA)_\mu + m) \times$, on obtient (paragraphe **Conventions équation 26**) :

$$(\gamma^\mu (p - qA)_\mu + m)(\gamma^\nu (p - qA)_\nu - m) \psi(x) = 0 \text{ avec } p = (E, \vec{p}) \quad (17)$$

$$((p + eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \psi(x) = 0$$

Commentons l'équation 17 ci-dessus où l'on voit que

- le spin n'interagit qu'avec les champs $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} F_{ij} & \text{ avec } F_{ij} = -\mathcal{B}^k \text{ si } (ijk) \equiv + \\ \{ \sigma^{k0} F_{k0} + \sigma^{0k} F_{0k} \} & \text{ avec } F_{k0} = -\mathcal{E}^k \end{aligned} \quad (18)$$

- tandis que le mouvement orbital dépend encore du potentiel A_μ (expérience de Böhm Aharonov ...)

- En développant, l'équation évolue vers l'équation de Schrödinger "relativiste" (attention notre convention est $q = -e$ avec $e > 0$)

[11], 145 équation 32,6

[16], 66 équation 2.73

[14], 50 équation 10.14)

$$\left((E + eV - m)(E + eV - m + 2m) - (p + eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi = 0$$

avec

$$\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = e (-\Sigma_k \mathcal{B}^k + i\alpha_k \mathcal{E}^k)$$

- On trouve l'équation de Pauli à la limite N.R. : (référence [11], 149 équation 33,7 1927).

$$\left((E + eV - m)(1 + \epsilon) - \frac{(p + eA)^2}{2m} + \frac{e}{2m} (-\Sigma_k \mathcal{B}^k + i\alpha_k \mathcal{E}^k) \right) \psi = 0$$

où l'on voit que :

- ϵ est, en général, négligeable : $\epsilon = \frac{E+eV-m}{2m} \sim (\gamma\beta)^2/4$.
- le spin de l'électron non relativiste peut interagir avec
 - le champ électrique (structure fine des raies et effet Stark 1906)
 - le champ magnétique (précession de Larmor, structure hyperfine et effet Zeeman 1902)

Si l'interaction est purement magnétique $\mathcal{B} \neq 0$, $\mathcal{E} = 0$:

$$\delta E_{mag} = +\frac{e}{2m} \Sigma_k \mathcal{B}^k \text{ avec } e > 0$$

Le moment magnétique s'écrit alors (référence [11], 149 équation 33,8 : Dirac 1928)

$$\delta E_{mag} = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}} \Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{\Sigma} = -\frac{e}{2m} 2\vec{j} \Rightarrow \mathbf{g} = -2 \quad (19)$$

2.2 Influence du champ électrique $\mathcal{E}$

2.2.1 La structure fine

Voir les notes sur le Lamb shift (séminaire du 16 mai 2006)

- référence [11], 151 équation 33,12 et paragraphe & 34
- référence [14], 58,59 et 61
- référence [16], 76,80 et 81
- référence [4], 262

2.3 Influence du champ magnétique $\mathcal{B}$

2.3.1 La structure hyperfine , résonance magnétique nucléaire ...

Voir les notes sur le Lamb shift (séminaire du 16 mai 2006)

- référence [11], 180:183 équations 41,6 41,9 41,11 et problème pages 183 et 184
- référence [16], 79
- référence [10] hyperphysics

2.3.2 La précession de Larmor (quantique non-relativiste)

L'équation de Schrödinger détermine la dynamique non relativiste de l'électron dans un champ E.M classique avec $q = -e$ et $e > 0$.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (H_{orb} + H_{spin}) \psi \\ H_{orb} &= + \frac{(p + eA)^2}{2m} - eV + m \\ H_{spin} &= \frac{e}{2m} (\Sigma_k \mathcal{B}^k - i \alpha_k \mathcal{E}^k) \text{ avec } \vec{\Sigma} = 2 \vec{s} \end{aligned} \quad (20)$$

Si le champ est magnétique et uniforme :

$$A_0 = 0, \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \wedge \vec{r})$$

* **équation orbitale**

$$H_{orb} = \frac{(p^2 + e^2 A^2)}{2m} + \frac{e}{2m} ((\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}}) + m$$

Le mouvement de la vitesse (mouvement orbital) est une rotation autour de $\vec{\mathcal{B}}$

L'opérateur vitesse qui est $\gamma \vec{v} \sim \vec{p} + e \vec{A}$ voit sa variation déterminée par la mécanique quantique :

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\vec{p} + e \vec{A}) = [\vec{p} + e \vec{A}, H_{orb}]$$

au premier ordre en e, on a :

$$\begin{aligned} [\vec{p} + e \vec{A}, H_{orb}] &= [\vec{p}, \frac{e}{2m} ((\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}})] + [e \vec{A}, \frac{(p^2)}{2m}] \\ [\vec{p}, \frac{e}{2m} ((\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}})] &= [e \vec{A}, \frac{(p^2)}{2m}] = i \frac{e}{2m} \vec{\mathcal{B}} \wedge (\vec{p} + \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_{orb} = \frac{e}{m} \vec{\mathcal{B}}$$

* **équation spinorielle** : référence [11], 179 équation 41,3

$$H_{spin} = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}} \text{ avec } \vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{s} \text{ et } g = -2$$

Le mouvement du spin est déterminé par la mécanique quantique (rotation autour de $\vec{\mathcal{B}}$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \vec{s} = [\vec{s}, H_{spin}] = -i \frac{g e}{2 m} \vec{\mathcal{B}} \wedge \vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_{spin} = \left(\frac{-g}{2}\right) \frac{e}{m} \vec{\mathcal{B}}$$

2.4 Conclusion

Le mouvement d'un fermion élémentaire de charge $-e$ dans un champ magnétique classique et uniforme est caractérisé par :

- un spin lié à la quantité de mouvement en rotation à la vitesse $\tilde{\Omega} = \frac{e}{m} \vec{\mathcal{B}}$
- $g = -2$ et $\mathbf{a}_\mu = \frac{\delta \Omega}{\Omega} = \mathbf{0}$

3 Renormalisation et calcul de g-2

3.1 Le lagrangien électromagnétique

- Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des champs relativistes** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ (photons) s'écrira :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m \} \psi(x)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$A^\mu = (V(x), \vec{A}(x))$ le potentiel électromagnétique

Remarque : Les dimensions de qA_μ et de p_μ sont identiques (sens physique) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \sim q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}(A^0) \right) \sim q\vec{v} \wedge (\vec{rot} A)$$

- L'interaction, ici E.M., est construite à partir du lagrangien libre en effectuant la transformation dite **principe d'interaction minimale** ou **couplage minimal** qui translate p par qA :

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$$

Cette construction est évidemment liée à l'invariance de jauge : un changement de phase sur ψ engendre une transformation de jauge du champ, dans cette opération la dynamique reste invariante .

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \exp(-iq\alpha(x)) \cdot \psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \\ \bar{\psi}(i\partial - qA)\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(i\partial - qA')\psi'(x) \end{aligned}$$

- La dynamique lagrangienne permet de construire l'action du champ sur le courant de charge et inversement (Maxwell) .

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= -\square A_\nu - \partial_\nu(\partial A) = J_\nu = q\bar{\psi}\gamma_\nu\psi(x) \\ \{ \gamma^\mu i\partial_\mu - qA_\mu - m \} \psi(x) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Soit

$$\square A_\nu + \partial_\nu(\partial A) = -J_\nu$$

et

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu \psi(x)$$

3.2 Matrice S , graphes de Feynman et amplitude de transition

référence [3] , 40-43

En représentation d'interaction, la dynamique de tout système physique microscopique est définie par une équation de Schrödinger qui est de la forme

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_{int}(t) \psi(t)$$

Il est possible d'en déduire l'opérateur d'évolution qui décrit la dynamique du système sous l'action unique de l'interaction $H_{int}(t)$

$$U(t_2, t_1) = \sum_n \int_{t_1}^{t_2} (-i)^n H_{int}(t_{i_n}) \dots H_{int}(t_{i_2}) H_{int}(t_{i_1}) dt_{i_n} \dots dt_{i_2} dt_{i_1}$$

$$\text{avec } t_2 > t_{i_n} \dots > t_{i_2} > t_{i_1} > t_1$$

Soit avec une densité d'hamiltonien dans l'espace $\vec{x}$ au temps t

$$S = U(+\infty, -\infty) = \text{Exp} \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{int}(x) d^4x \right)$$

avec T pour "produit ordonné en temps" des $\mathcal{H}_{int}(x)$ **évidemment non commutatif !**

Au premier ordre par rapport à l'interaction

$$S - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} -i \mathcal{H}_{int}(x) d^4x$$

L'amplitude d'une transition est proportionnelle à l'élément de matrice $S - 1$ qui s'écrit formellement

$$\langle out | S - 1 | in \rangle = -i 2\pi^4 \delta^4(p_{out} - p_{in}) \mathcal{M}$$

3.3 Propagation d'un électron dans un champ classique

Le spineur $\psi(x)$ est le produit de convolution du propagateur $G_F(x - x')$ et de la source du champ

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int G_F(x - x') j(x') d^4x' \quad \text{référence figure 15}$$

- avec $j(x') = -e\gamma_\mu A^\mu(x')\psi(x')$
- et où $\psi_0(x)$ est une solution générale de l'équation libre (avec $e = 0$)
- tandis que le terme intégral est induit par l'interaction ($e \neq 0$)

Il est possible d'itérer cette équation intégrale à partir de l'état $| in \rangle$ pour obtenir l'état $| out \rangle$ par un développement en puissance de e (perturbation) afin d'établir une relation entre l'état $| out \rangle$ et l'état $| in \rangle$ (matrice S). Pour plus de détails sur le propagateur de Feynman voir figure 16. L'équation d'évolution de $\psi(x)$ (électron) s'écrit avec $q = -e$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x)$$

En multipliant par β à gauche, on isole la partie dépendante du temps pour faire apparaître la densité d'hamiltonien $\mathcal{H}_{int}(x)$ (**pour plus de détail voir le paragraphe conventions**)

$$(i\partial_0 + \dots - \beta m)\psi(x) = -e\beta\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x) \quad (22)$$

$$\mathcal{H}_{int}(x) = -e\beta\gamma_\mu A^\mu(x)$$

3.4 L'amplitude d'interaction E.M. à l'ordre α

L'amplitude prise entre des états asymptotiques $|in\rangle$ et $|out\rangle$ se déduit de la connaissance de l'interaction $\mathcal{H}_{int}(x)$:

$$-i\mathcal{M} = \int \psi_{out}^+(x)[-i\mathcal{H}_{int}(x)] \psi_{in}(x) d^4x = \int \bar{\psi}_{out}(x)[+ie \gamma_\mu A^\mu(x)] \psi_{in}(x) d^4x$$

Les états asymptotiques **sont libres** (états macroscopiques mais ce n'est pas conventionnel) , obéissent à l'équation de Dirac et ils ont une quadri-impulsion déterminée par les **mesures macroscopiques** :

$$\psi_{out/in}(x) = u(p_{f/i}) \exp(-ip_{f/i} x)$$

L'amplitude de transition entre $|in\rangle$ et $|out\rangle$ s'écrit donc :

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(p_f) [ie \gamma_\mu] u(p_i) \times \hat{A}^\mu(q)$$

avec $\hat{A}^\mu(q) = \int_{-\infty}^{\infty} A^\mu(x) \exp(-iq x) d^4x$ et $q = p_i - p_f$

L' amplitude est d'ordre α car $\hat{A}^\mu(q)$ est d'ordre e donc $\mathcal{M}$ est d'ordre $e^2 = 4\pi\alpha$

Par principe de la Mécanique Quantique

$$|\mathcal{M}|^2 \text{ est proportionnel à la probabilité}$$

- d'un transfert d'impulsion q entre les états entrants et sortants respectivement $u(p_i)$ et $u(p_f)$
- d'un changement du spin entre les mêmes états $u_{\sigma'}(p_i)$ et $u_{\sigma}(p_f)$.

On peut envisager plusieurs cas particuliers à discuter par rapport à $A^\mu(x)$

- $A^\mu(x) \sim A^\mu(0)$ est constant à l'échelle microscopique alors $\hat{A}^\mu(q) \sim \delta(q)$ et $q \sim 0$: c'est le cas de la diffusion dans un champ macroscopique. Les transferts d'impulsion sont très faibles mais à l'échelle macroscopique on peut observer une trajectoire courbée.
- $A^\mu(x) \sim A^\mu(\vec{x})$ est permanent dans le temps mais variable dans l'espace alors $\vec{q} \neq 0$ mais $q^0 \sim 0$: C'est le cas de la diffusion Rutherford, diffusion dans le champ coulombien d'un noyau. Les diffusions à grand angle ($\vec{q} \neq 0$) ont apporté la preuve de l'existence de champs électriques dans l'atome et donc de la taille relativement très faible du noyau atomique.
- $A^\mu(x)$ variable à 4D est associé à un courant de particule, alors $q \neq 0$ c'est le cas général. Exemples : diffusion Möller, Compton etc...à haute énergie en général. L'évolution de la particule peut être traitée en perturbation et les termes " à un photon virtuel " sont, en principe, dominants, ...

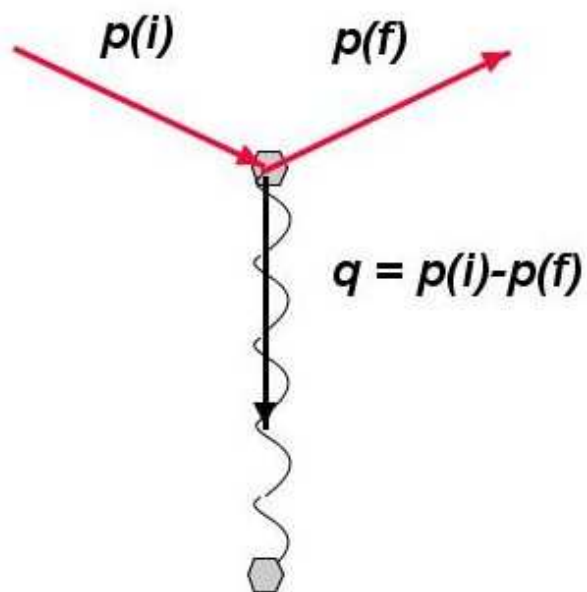


Figure 8: Graphe de Feynman pour l'amplitude de transition au premier ordre

3.5 Vers les règles de Feynman pour l'amplitude

L'exemple le plus élémentaire :

La diffusion dans un champ classique $A_\mu(x)$
d'un fermion de charge $-e$.

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(p_f) [ie \gamma^\mu] u(p_i) \hat{A}_\mu(q)$$

références [2], 88 et 152

Interprétation physique des différents termes de $-i\mathcal{M}$ au 1er ordre

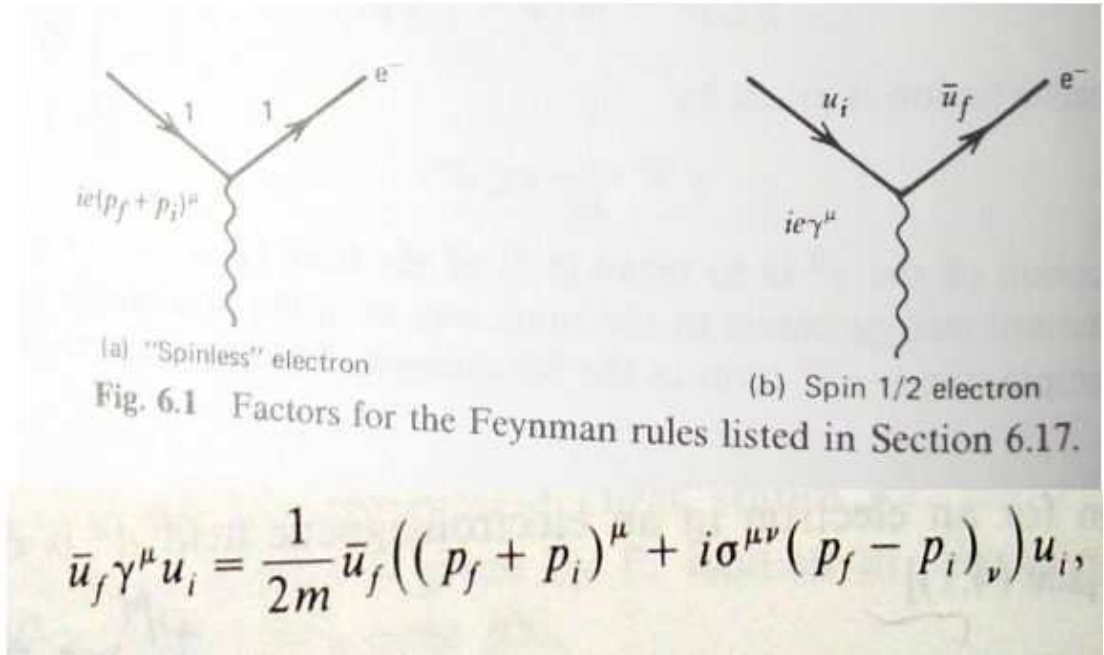


Figure 9: Graphe pour l'interaction $e^- + \gamma \rightarrow e^-$

$\bar{u}(p_f) [(p_f + p_i)^\mu] u(p_i) \Rightarrow$ l'action de la charge (spinless électron)

$\bar{u}(p_f) [-i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p_i) \Rightarrow$ l'action du moment magnétique avec $q = p_i - p_f$

Remarque : Dans le cas coulombien engendré par une charge ponctuelle Ze , on retrouve les propriétés de la diffusion Rutherford :

$$A^\mu = (V(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad V(\vec{x}) = \frac{Ze}{4\pi r} \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\vec{q}) = \left(\frac{Ze}{q^2} 2\pi\delta(q^0) \right)$$

avec

$$q^2 \hat{A}^\mu(q) = -g^{\mu\nu} \hat{J}_\nu(q) \quad \hat{J}_\nu(q) = (Ze 2\pi\delta(q^0), 0, 0, 0)$$

et donc

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(p_f) [ie \gamma^0] u(p_i) \times \hat{V}(\vec{q})$$

3.6 Règles de Feynman pour l'amplitude $-i\mathcal{M} = ?$

références [2], 149 et référence figure 19

- pour les lignes extérieures état initial ou final
avec des normalisations indiquées dans le paragraphe **Conventions**

particule	initial	final
bosons scalaires	1	1
fermions	$u(p)$	$\bar{u}(p)$
anti-fermions	$\bar{v}(p)$	$v(p)$
photons	ϵ_μ	ϵ_μ^*

- pour les lignes intérieures (cf Lagrangien libre et les propagateurs libres)

particule	propagateur choix d'orientation
bosons scalaires	1
fermions	$(\gamma^\mu p_\mu + m)$
photons (gauge)	$-g^{\mu\nu}$

$$\times \frac{i}{p^2 - m^2} \times \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

- pour les vertex ou points d'interaction (cf le lagrangien d'interaction E.M.)

particule de charge q	fonction de vertex
boson scalaire chargé	$-iq(p + p')^\mu$
fermion	$-iq\gamma^\mu$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_{in} - p_{out})$$

3.7 La diffusion Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

références [2],141 L'application des règles ci-dessus donne :

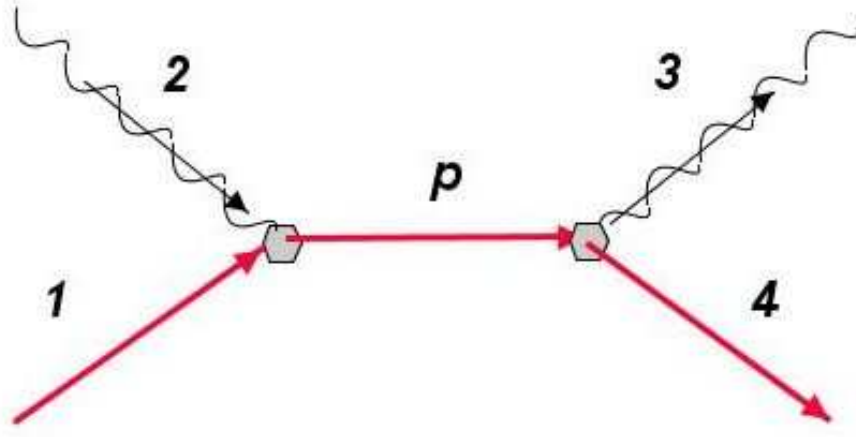


Figure 10: Graphe de Feynman (1 parmi 2) pour la diffusion Compton au premier ordre en α

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= \int_{\infty} \bar{u}(4) [ie\gamma^\nu] \left(\frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2} \right) [ie\gamma^\mu] u(1) \epsilon_\mu(2) \epsilon_\nu^*(3) \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) \quad (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) \quad \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Par principe de la Mécanique Quantique

les mesures sont proportionnelles à la probabilité

$$prob \sim |\mathcal{M}|^2$$

Conclusion : ça marche.

3.8 Les corrections quantiques à l'ordre α^2

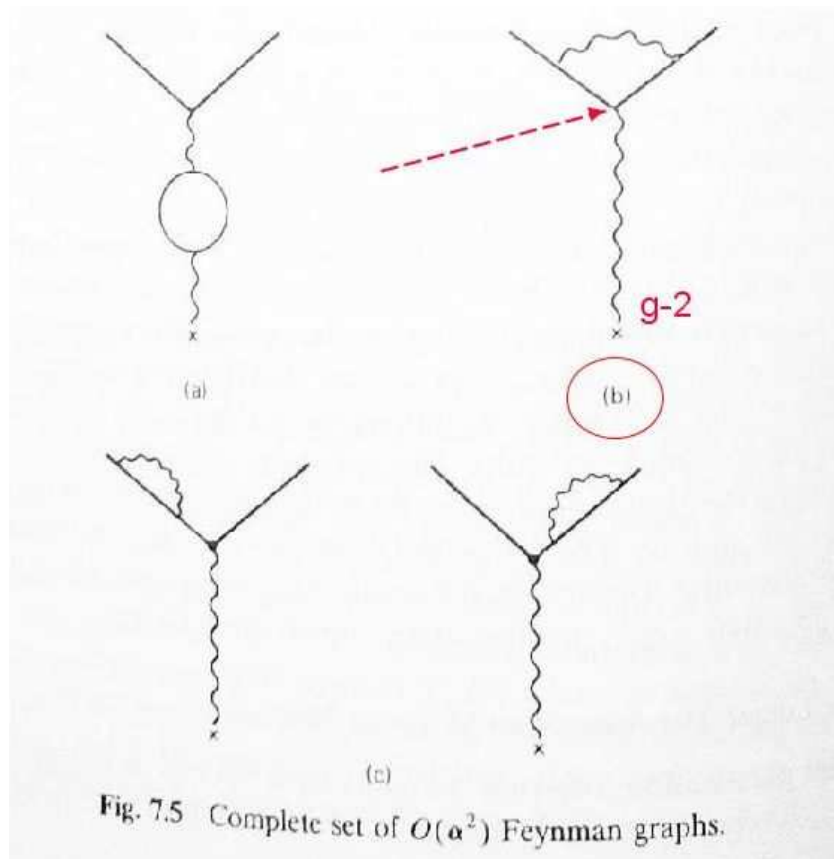


Figure 11: Les corrections à l'ordre α^2

$$-i\mathcal{M} = (-i\mathcal{M}_1) + (-i\mathcal{M}_2) + \dots$$

- $(-i\mathcal{M}_1) \Rightarrow g = 2$: graphe 9
- $(-i\mathcal{M}_2) \Rightarrow + \alpha \dots$: graphe 11-b (Schwinger [15])
- -

The Tenth-Order QED Contribution to the Lepton $g-2$: Evaluation of Dominant α^5 Terms of Muon $g-2$

Toichiro Kinoshita*

*Laboratory for Elementary-Particle Physics
Cornell University, Ithaca, New York, 14853*

Figure 12: Des calculs ont été publiés à l'ordre 5 en mars 2006

3.9 Calcul de $(-i\mathcal{M}_2)$ et contribution au moment magnétique

référence [3] page 113 ou figure 20

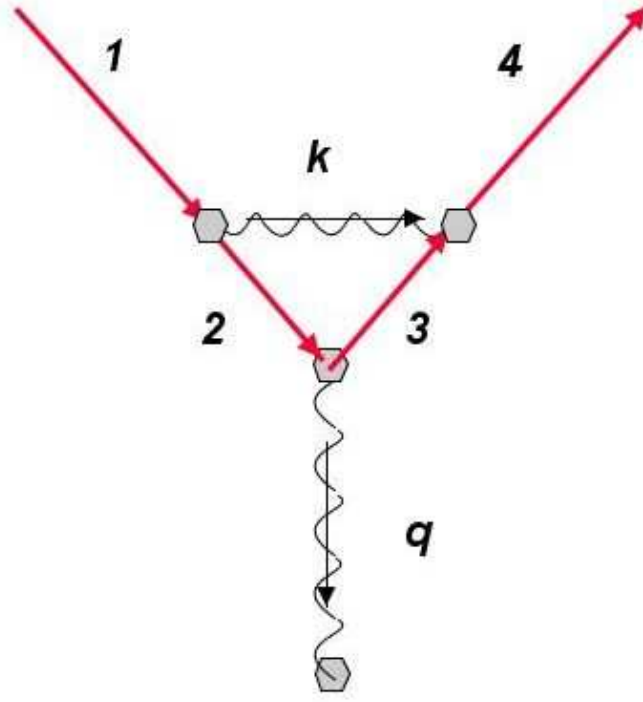


Figure 13: Graphe de Feynman en α^2 qui contribue à g-2

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= \int_{\infty} \bar{u}(4) [ie\gamma^\nu] \frac{i(/p_3 + m)}{p_3^2 - m^2} [ie\gamma^\mu] \frac{i(/p_2 + m)}{p_2^2 - m^2} [ie\gamma^\rho] u(1) \times \frac{-ig_{\nu\rho}}{k^2} \times \hat{A}_\mu(q) \\
 &(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + k - p_1) \quad (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_3 - k) \quad (2\pi)^4 \delta^4(q + p_3 - p_2) \quad \left(\frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

avec p_1 q p_4 et $u(4)u(1)$ fixés.

De plus , nous adoptons la notation

$$/p = \gamma^\mu p_\mu$$

Il en découle évidemment :

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(4) [(ie) \Lambda^\mu(p_4, p_1)] u(1) \times \hat{A}_\mu(q) \times (2\pi)^4 \delta^4(p_4 + q - p_1)$$

avec

$$\Lambda^\mu(p_4, p_1) = \frac{1}{ie} \int_{\infty} [ie\gamma^\nu] \left(\frac{i(/p_3 + m)}{p_3^2 - m^2} \right) [ie\gamma^\mu] \frac{i(/p_2 + m)}{p_2^2 - m^2} [ie\gamma_\nu] \times \frac{-i}{k^2} \times \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

et $p_2 = p_1 - k$, $p_3 = p_4 - k$ fonction de k et $q = p_2 - p_3 = p_1 - p_4$

- Question : comment extraire de cette amplitude la contribution magnétique ?

Intégration pour le calcul de $\Lambda^\mu(p_4, p_1)$

$$\bar{u}(4) [\Lambda^\mu(p_4, p_1)] u(1) = -ie^2 \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \frac{\bar{u}(4) [\gamma^\nu] (/p_3 + m) [\gamma^\mu] (/p_2 + m) [\gamma_\nu] u(1)}{(p_3^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)(k^2)}$$

avec $p_2 = p_1 - k$, $p_3 = p_4 - k$

Il est facile de montrer que $\Lambda^\mu(p_4, p_1)$ est invariant dans une translation des impulsions externes $p_1 \rightarrow p_1 + a$ et $p_4 \rightarrow p_4 + a$ il ne dépend donc que de $q = p_1 - p_4$.

Il s'écrira en général :

$$\bar{u}(4) [\Lambda^\mu(p_4, p_1)] u(1) = \bar{u}(4) \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{1}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(1)$$

Le calcul détaillé se trouve dans la référence [3] pages 113-119 et conduit à :

$$\frac{g}{2} = 1 + F_2(0) \text{ avec } F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001\,162$$

J. Schwinger 1948 réf [15] comparé à

Measured (g-2)/2	experimental values
Electron (-)	.001 159 6522
Muon (-)	.001 165 9198

3.10 Les termes d'ordre supérieurs réf [6], [5]

-

$$\frac{g}{2} - 1 = A_1^{(2)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_1^{(4)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_1^{(6)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots$$

$$\text{avec } A_1^{(2)} = 0.5 \quad A_1^{(4)} = -0.328478 \quad A_1^{(6)} = \dots \quad (25)$$

A. Two-loop contributions

Seven diagrams contribute to the fourth-order coefficient $A_1^{(4)}$, one to $A_2^{(4)}(m_e/m_\mu)$ and one to $A_2^{(4)}(m_e/m_\tau)$. As there are no two-loop diagrams contributing to a_e^{QED} that contain both virtual muons and taus, $A_3^{(4)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) = 0$. The mass-independent coefficient has been known for almost fifty years [7]:

$$\begin{aligned} A_1^{(4)} &= \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{2}\ln 2 \\ &= -0.328\,478\,965\,579\,193\,78\dots, \end{aligned} \quad (9)$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function of argument s . The coefficient of the two-loop mass-dependent contribution to a_l^{QED} , $A_2^{(4)}(1/x)$, with $x = m_j/m_l$, is generated by the diagram in fig. 1, where j is the virtual lepton in the vacuum polarization subgraph. This coefficient was

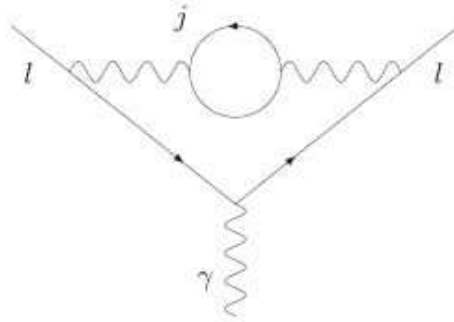


FIG. 1: The QED diagram generating the mass-dependent part of a_l^{QED} in order α^2 .

Figure 14: Corrections à l'ordre α^3 pour l'électron : [5]

3.11 Conclusion

intérêt du sujet tant expérimental que théorique

- Qu'est-ce qu'une particule élémentaire habillée de ses interactions
- Test de la théorie des champs en électrodynamique quantique (localité ?)
- Les diagrammes complexes ouvrent sur la possibilité de contributions à "haute énergie"
- Développement instrumental dans le domaine du contrôle à 10^{-10}

4 CONVENTIONS

liste des livres qui utilisent nos conventions

- [11] pages 7:9
- [16] appendix
- [2] pages 73,75,88 et 100:115
- [13] pages 27:28 44:45 49 et 53.
- [1] appendix 1
- [3] pages 16 20 28:29
- [12] pages 69 105 122:123 127

$$\begin{aligned} c &= \hbar = 1 \\ \epsilon_0 &= \mu_0 = 1 \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} \end{aligned}$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} g_{\mu,\nu} &= g^{\mu,\nu} = (1, -1, -1, -1) \\ \epsilon^{0123} &= -\epsilon_{0123} = 1 \end{aligned}$$

$$p^2 = m^2 \text{ et } i\partial_\mu = p_\mu$$

Les matrices sigma de Pauli (réf 1) :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de Pauli vérifie :

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \quad \text{si } (ijk) \equiv +$$

Les équations de Klein-Gordon et de Dirac s'écrivent :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0 \text{ avec } \partial^\mu \partial_\mu \equiv -\square$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Les représentations de l'algèbre de Dirac

- Les matrices gamma dans la représentation de Pauli-Dirac (réf [2], 111) :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \beta \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ (réf [2] page 101)}$$

- Les matrices gamma dans la représentation de Weyl ou chiral (réf [2], 115) :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \text{ (réf [2] page 101)}$$

- Il existe également la représentation de Majorana (réf [16] appendix) telle que

$$\gamma_M = U\gamma_D U^+ \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :

1. γ^5 invariant (groupe de Lorentz propre)
2. $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu} \rightarrow$ générateurs du groupe Lp
et $\rightarrow \sigma^{ij}$ générateurs des rotations
3. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
4. conséquence : décomposition symétrique anti-symétrique du produit

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \Rightarrow /A/B = (A.B) - i\sigma^{\mu\nu}(A_\mu.B_\nu)$$

Application avec $q = -e$:

$$(/(p - qA)/(p - qA) = (p - qA)^2 + iq\sigma^{\mu\nu}[p_\mu, A_\nu] = (p + eA)^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (26)$$

5. $\sigma^{\mu\nu}$ (représentation de Pauli Dirac) :

$$\begin{aligned} \sigma^{0k} &= i\alpha_i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^{ij} &= \Sigma_k \quad \text{si } (ijk) \equiv + \quad \text{avec } \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

- Les solutions libres pour l'électron : avec $\omega = \sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega - m & -\sigma.p \\ \sigma.p & -\omega - m \end{pmatrix} \psi = 0 \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma.p}{\omega+m}\chi \end{pmatrix} \quad (28)$$

Selon les conventions de Halzen & al avec $N = 1$

Les ondes planes

- pour les bosons (réf [2], 75,88)

$$\phi(x) = N \exp(-ipx)$$

Le courant de particules associé et conservé par l'équation de Klein Gordon est :

$$j_\mu = (i\partial_\mu \phi)^* \phi + \phi^* (i\partial_\mu \phi) = 2p_\mu N^2$$

- pour les fermions (anti) (spin 1/2) (réf [2], 110) $\omega = |E|$

$$\psi(x) = N u(p) \exp(-ipx) \text{ avec } u^+ u = \bar{u} \gamma^0 u = 2E = 2\omega$$

$$\psi(x) = N v(p) \exp(+ipx) \text{ avec } v^+ v = \bar{v} \gamma^0 v = -2E = 2\omega$$

car $v(p) = u(-p)$ avec $E = p^0 = -\omega$

Le courant de particules associé et **conservé** par l'équation de Dirac est :

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 2p_\mu N^2 \text{ avec } \bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$$

La normalisation des états de particules libres telle que dans la référence [2]

- Pour les spineurs $\bar{u} u^{1,2} = +2m$ et $\bar{u} u^{3,4} = -2m$
- Pour les photons $\epsilon^* \epsilon = 1$
- Pour les bosons scalaires $\phi^* \phi = 1$

L'électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique 6 composantes ($\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$).

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$A^\mu = (V(x), \vec{A}(x))$ le potentiel électromagnétique

$$\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}^i = F^{i0}) \quad \vec{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}^k = -F^{ij})$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} &= 0 \quad [1] \\ \partial^\nu F_{\nu\mu} &= J_\mu \quad [2] \end{aligned}$$

- $F_{\mu\nu}$ antisymétrique : $\Rightarrow$ l'invariance de jauge & la conservation de J_μ & la conservation de la relation $p^2 = m^2$. L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue et la dynamique peut être extraite du principe de moindre action (A_{min}).

$$A = \int -m d\tau - q A_\mu dx^\mu$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu = q (F_{\mu\nu} v^\nu) \quad \text{avec } v^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} \quad (29)$$

L'électromagnétisme des fermions ponctuels de Dirac

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants (action sur ψ):

$$\{\gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m\} \psi(x) = 0$$

- L'opérateur de Dirac s'écrit (avec une action sur ψ):

$$i\partial_0 \psi(x) = H_D \psi(x) = \{ qA_0 - \gamma^0 \gamma^i (i\partial - qA)_i + \gamma^0 m \} \psi(x)$$

$$H_D = \{ qA_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \} \text{ avec } \vec{p} = -i\vec{\partial} - q\vec{A}$$

$$\mathcal{H}_0(x) = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\partial} + \beta m \quad \mathcal{H}_{int}(x) = q (A_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{A})$$

5 ANNEXES

références [2], 146

The Electron Propagator iS_F

We take the electron propagator as our example and use the Green's function method to solve Dirac's equation, (6.76), for an electron in an electromagnetic field:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = -e\gamma_\mu A^\mu \psi. \quad (6.122)$$

That is, we first solve the unit source problem

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)G_F = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (6.123)$$

where G_F represents the wave produced at x by a unit source at x' . Once we have found Green's function G_F , we can construct the solution to (6.122):

$$\psi(x) = -e \int d^4x' G_F(x, x') \gamma_\mu A^\mu(x') \psi(x'). \quad (6.124)$$

Note that here ψ appears also on the right-hand side, and so an iterative perturbation series solution in powers of e is obtained.

Figure 15: Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.

références [2], 147

6.16 The $+i\epsilon$ Prescription for Propagators 147

From translational invariance, $G_F(x, x')$ is a function only of the difference $x - x'$. To solve (6.123), we first Fourier transform to momentum space:

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(p) e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p. \quad (6.125)$$

Then, on substituting into (6.123), we obtain

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not{p} - m) S_F(p) e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p,$$

where the right-hand side is the Fourier representation of the delta function. In momentum space, (6.123) therefore becomes simply

$$(\not{p} - m) S_F(p) = 1.$$

That is,

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (6.126)$$

So far, this is just a sophisticated version of the derivation of Section 6.10.

To complete the determination of S_F , we need to know how to treat the singularities at

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2) = (p_0 - E)(p_0 + E) = 0.$$

Since the electron is off mass shell, p_0 and $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ are independent variables. To obtain the correct prescription for integration over the poles at $p_0 = \pm E$, we need to impose the appropriate boundary conditions on $G_F(x - x')$. From (6.125) and (6.126),

$$\begin{aligned} G_F(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{p} + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip_0(t - t')}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Recall that $G_F(x - x')$ represents the wave produced at x by a unit source at x' . That is, the propagation is from x' to x . Now, we seek an S_F which is associated with the propagation of positive-energy electrons forward in time ($t > t'$) and with negative-energy electrons backward in time ($t < t'$); see Section 3.5. This can be accomplished by performing the p_0 integration along the contour in the complex p_0 plane shown in Fig. 6.15. That is, the required properties of S_F are obtained by choosing the contour along the $\text{Re } p_0$ axis to go below the $p_0 = -E$ pole and above the $p_0 = +E$ pole.

Figure 16: propagateur de Feynman

références [2], 117, 118

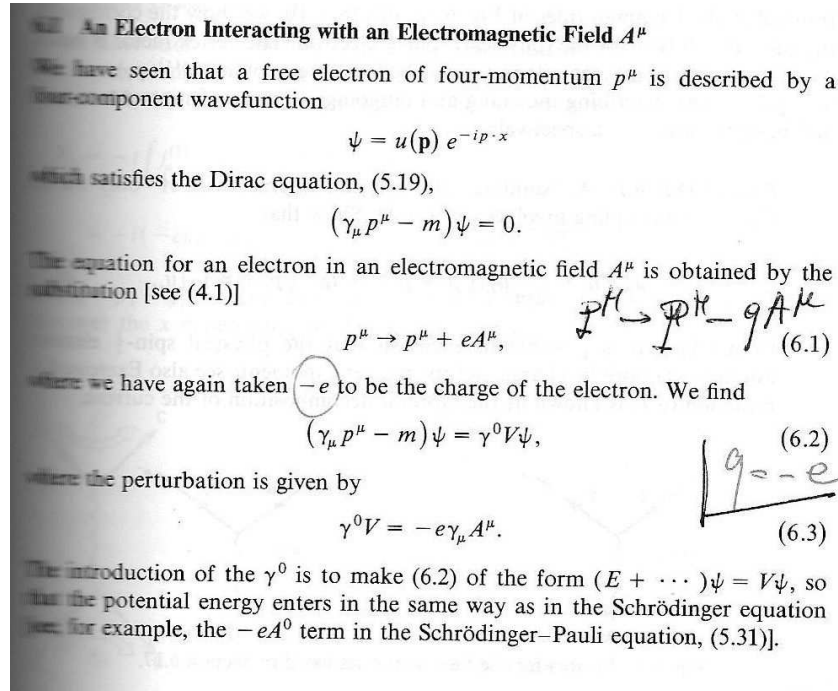


Figure 17: Dynamique d'un fermion en présence du champ E.M.

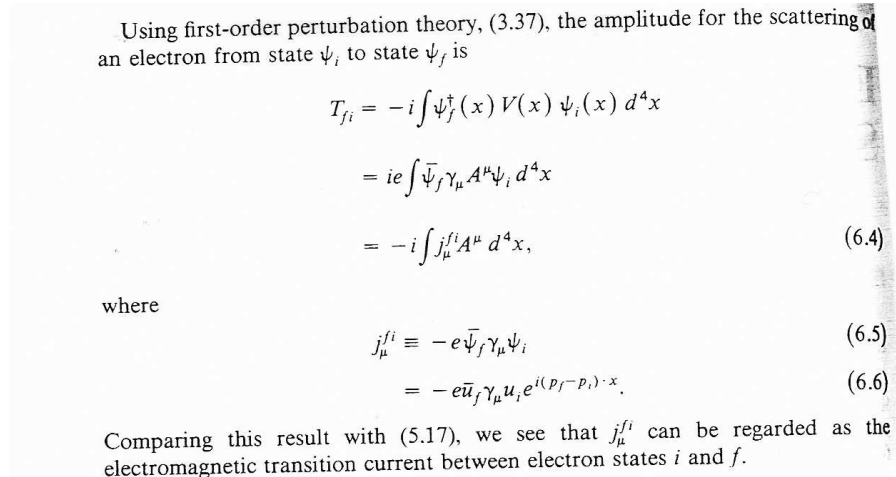


Figure 18: Amplitude de transition : règles de Feynman

références [2], 149

6.17 Summary of the Feynman rules for QED 149

TABLE 6.2
Feynman Rules for $-i\mathcal{M}$

		Multiplicative Factor
External Lines		
Spin 0 boson (or antiboson)		1
Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)		$u, \bar{u}$
antifermion (in, out)		$\bar{v}, v$
Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$
Internal Lines—Propagators (need $+i\epsilon$ prescription)		
Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Spin $\frac{1}{2}$ fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
Vertex Factors		
Photon—spin 0 (charge $-e$)		$ie(p + p')^\mu$
Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k/(2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices

Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+

Figure 19: Calcul de l'amplitude de transition : M

références [3], 113

page 113

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu &= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \\
&\quad \times \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu. \\
&= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon) ((p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon) ((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}.
\end{aligned}
\tag{6.28}$$

Figure 20: Calcul des corrections radiatives de la figure 13

References

- [1] E. Leader & al. *{ Gauge theories and the new physics }*. Cambridge UP., 1982.
- [2] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [3] S.J. Chang. *{ Introduction to Quantum Field Theory }*. World Scientific, Inc., 1990.
- [4] E. Chpolski. *{ Physique atomique }*. MIR, Inc., 1974.
- [5] M. Passera et al. *{ Precise mass-dependent QED contributions }*. arXiv:hep-ph/0606174, 2006.
- [6] T. Kinoshita et al. *{ The tenth order QED contributions }*. arXiv:hep-ph/0512330, 2005.
- [7] E821 experiment. *{ www.g-2.bnl.gov/ }*. www.g-2.bnl.gov, 2005.
- [8] g 2 experiment. *{ bnlweb/pubaf/pr/2001/g-2_ backgroundunder.htm }*. www.bnl.gov, 2005.
- [9] g-2 experiment E821. *{ publications/tdr/index.html - chpt4-errors }*. www.g-2.bnl.gov, 2005.
- [10] /http/hyperphysics. *{ http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hyde.html }*. Georgia state university, 2005.
- [11] L. Landau & E. Lifchitz. *{ Théorie quantique relativiste I }*. MIR , Inc., 1972.
- [12] P. Renton. *{ Electroweak interactions }*. Cambridge UP., 1990.
- [13] L.H. Ryder. *{ Quantum Field Theory }*. Cambridge UP., 1985.
- [14] H. Bethe & E Salpeter. *{ Quantum mechanics of one and two ... }*. Springer verlag, Inc., 1957.
- [15] J Schwinger. *{ Phys. Rev. 73 - 416 }*. APS., 1948.
- [16] C. Itsykson & Zuber xx. *{ Quantum field theory }*. Macgraw Hill, Inc., 1980.