

Introduction aux symétries $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

8 avril 2008

Version 08/04/2008

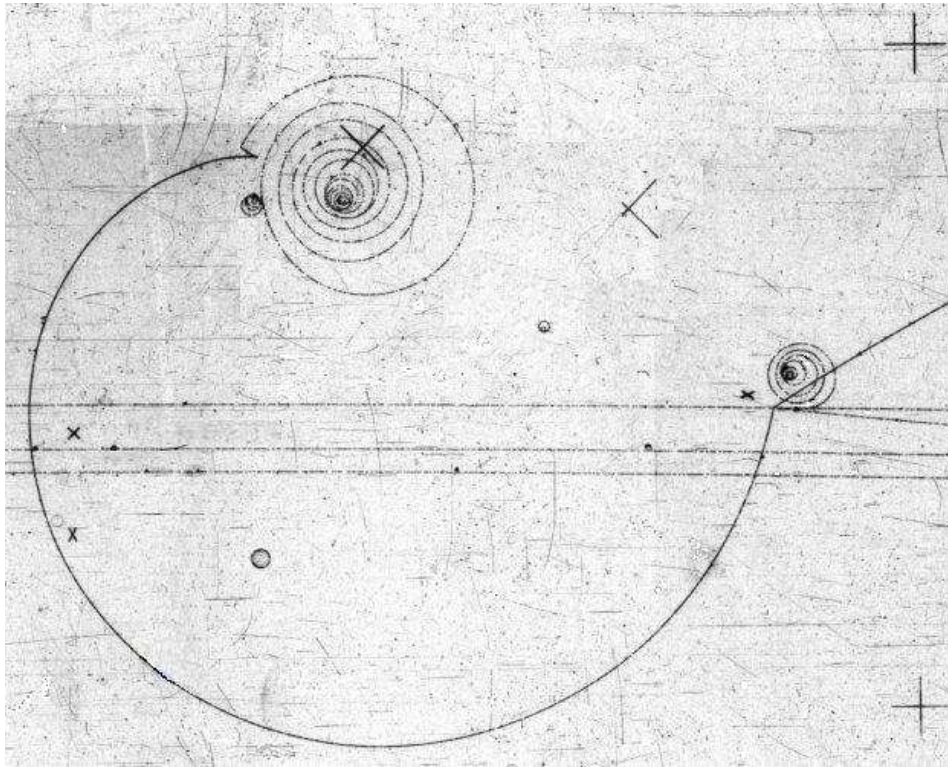
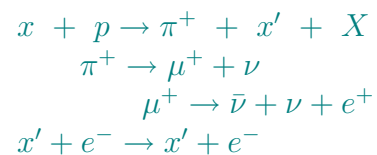


Figure 1: Mise en évidence d'un électron et d'un positon



Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu le 8 avril 2008 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2007-2008

SOMMAIRE

1	Introduction	4
2	Les symétries en mécanique quantique	5
2.1	Généralités	5
2.2	Conséquences	6
2.3	Applications	6
3	Propriétés de $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$	7
3.1	$\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$ en physique classique	7
3.2	Retour en physique quantique	8
3.3	Particularité quantique de $\mathcal{T}$	8
4	Cas des spineurs de Dirac	9
4.1	L'équation de Dirac	9
4.2	$\mathcal{C}$	9
4.3	$\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}$	9
4.4	$\mathcal{CPT}$	10
5	Conclusion	10
6	CONVENTIONS	11

List of Figures

1	Mise en évidence d'un électron et d'un positon	1
2	Espaces externe et interne des particules	4
3	Les symétries en mécanique quantique	5

List of Tables

1	Comportement des variables classiques sous $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$	7
2	Les interactions et leurs symétries $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$	8

1 Introduction

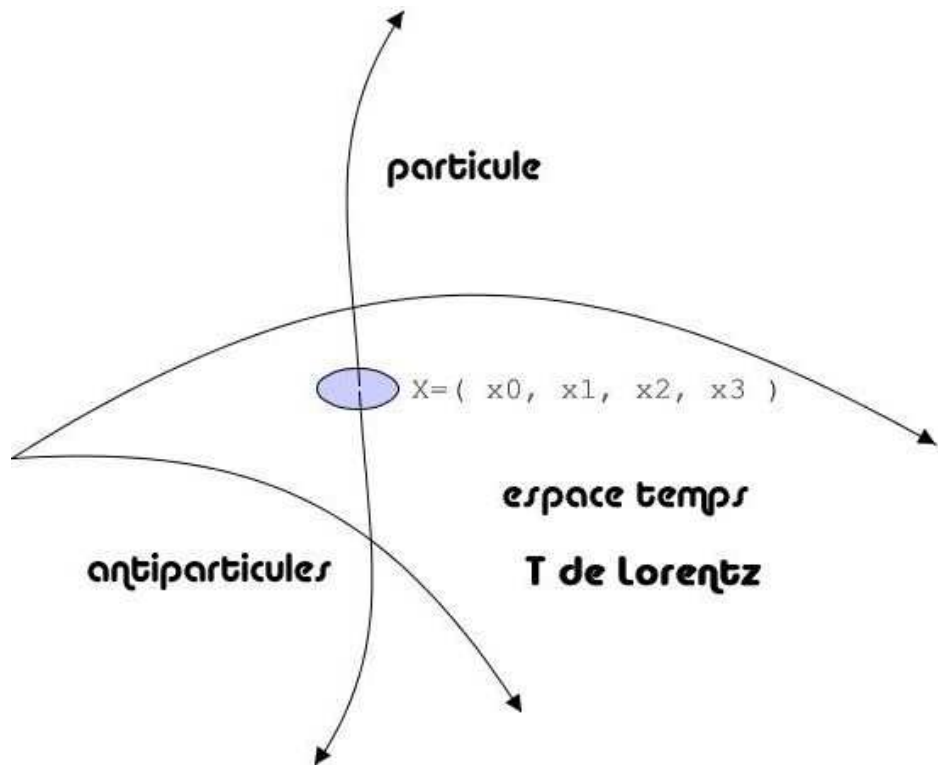


Figure 2: Espaces externe et interne des particules

Nos conventions:

$$\begin{aligned}
 c = \hbar &= 1 \\
 g_{\mu,\nu} = g^{\mu,\nu} &= (1, -1, -1, -1) \quad \text{avec } \mu = 0, 1, 2, 3 \\
 \epsilon^{0123} &= -\epsilon_{0123} = 1 \\
 p^2 &= m^2
 \end{aligned}$$

Les états quantiques libres d'une particules sont représentés par :

$$\boxed{\psi(x)}$$

La quadri-impulsion est un opérateur en MQ :

$$\boxed{i\partial_\mu = p_\mu}$$

Les états quantiques propres de la quadri-impulsion sont :

$$\psi(x) = \chi(p) \exp(-ip \cdot x) \quad \text{avec } p \cdot x = p_\mu x^\mu = p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - kx$$

Il existe un lien entre les propriétés d'espace et les propriétés internes des particules : le spin mais aussi CPT

2 Les symétries en mécanique quantique

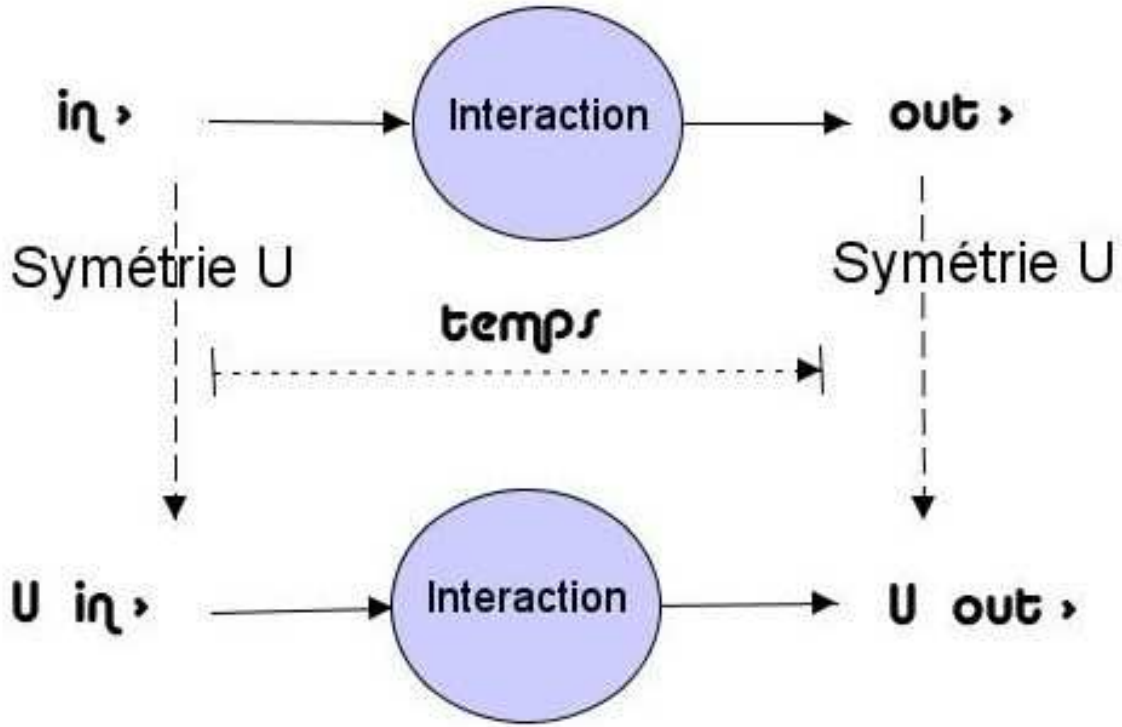


Figure 3: Les symétries en mécanique quantique

2.1 Généralités

L'opérateur d'évolution est défini par l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{\partial}{\partial t} = H = H_0 + H_{int}$$

Dans la représentation d'interaction on factorise l'évolution libre du système et il vient

$$S = \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} H_{int} dt)$$

En théorie des champs $H_{int}(x)$ est un opérateur défini dans l'espace temps et

$$S = \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} H_{int} d^4x) = \exp(+i \int_{-\infty}^{\infty} L_{int} d^4x)$$

U sera une symétrie si les probabilités de transition se conservent dans l'évolution temporelle

$$Prob \sim | \langle Uf | S U i \rangle |^2 = | \langle f | S i \rangle |^2$$

U est unitaire ou antiunitaire et commute avec H_{int} et bien sûr H_0

$$[H_{int}, U] = 0 \quad [H_0, U] = 0$$

Les symétries forment des **groupes de symétries** par combinaison.

2.2 Conséquences

Les symétries permettent de construire des observables hermitiens qui commute avec H_{int} et bien sûr H_0 . par exemple si U appartient à un groupe de Lie unitaire tel que

$$U(\alpha) = \exp(-iA\alpha) \quad A^\dagger = A$$

Alors des lois de conservation s'appliquent aux transition quand les états entrant et sortants sont propres de A car les valeurs propres sont conservées dans l'interaction. Exemple

- La Translation dans l'espace temps : l'énergie-impulsion totale, la masse au repos.
- L'invariance de Lorentz dont les rotations : le moment cinétique total, le spin au repos
- La transformation de jauge de l'électromagnétisme : la charge électrique

2.3 Applications

- Conservation de l'énergie

$$\begin{array}{ll} \gamma \rightarrow e^+ + e^- & \text{impossible} \\ \gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^- & \text{observé} \end{array}$$

- Conservation du moment cinétique : la parité du nombre de fermions se conserve

$$\begin{array}{ll} n \rightarrow p + e^- & \text{impossible} \\ n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} & \text{observé} \\ p \rightarrow \pi^+ + \gamma & \text{impossible} \\ p \rightarrow \pi^0 + e^+ & \text{possible} \\ p + e^- \rightarrow 2\gamma & \text{possible} \\ \bar{p} + p \rightarrow K^0 + K^- + \pi^+ & \text{observé} \end{array}$$

Cette contrainte est automatiquement satisfaite par les théories de jauge.

- Conservation de la charge électrique

$$n \rightarrow p + \gamma \quad \text{impossible}$$

- Conservation des nombres leptoniques et baryoniques

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+ \quad \text{impossible}$$

Cette contrainte est automatiquement satisfaite par les théories de jauge qui traitent baryons et leptons comme des espaces disjoints : exemple le modèle standard, $SU(2)_L, SU(3)$

3 Propriétés de $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$

3.1 $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$ en physique classique

En électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique 6 composantes ($\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$).

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ A^\mu &= (V(x), \vec{A}(x)) \text{ le potentiel électromagnétique} \\ \vec{\mathcal{E}} &= (\mathcal{E}^i = F^{i0}) \quad \vec{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}^k = -F^{ij}) \end{aligned}$$

- Les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} &= 0 \quad [1] \\ \partial^\nu F_{\nu\mu} &= J_\mu \quad [2] \end{aligned}$$

- L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue et la dynamique peut être extraite de la densité de lagrangien d'interaction

$$L_{int}(x) = -A_\mu(x) J^\mu(x)$$

- L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot v^\nu)$$

avec $v^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$ et $p_\mu = m v_\mu$; τ est le temps propre

L'invariance de Lorentz est explicite donc vraie pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$

L'invariance sous $\mathcal{C}$ est garantie si

$$\mathcal{C}A = -A \text{ car } \mathcal{C}J = -J$$

	$\vec{r}$	$\vec{p}$	σ	q	A_μ
$\mathcal{P}$	-1	-1	+1	1	
$\mathcal{T}$	1	-1	-1	1	
$\mathcal{C}$	1	1	1	-1	-1

Table 1: Comportement des variables classiques sous $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$

Application

$\mathcal{C}$ est une symétrie pour l'interaction électromagnétique donc un positon suivra la même trajectoire qu'un électron dans un champ inversé.

3.2 Retour en physique quantique

Les grandeurs physiques sont des opérateurs qui gardent leurs propriétés de transformation.

mais attention le temps est un paramètre en MQ et ce n'est une observable comme $\vec{r}$ la position dans l'espace ou $\vec{p}$.

Les symétries sont des transformations linéaires dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ou en théorie des champs, elles sont des opérateurs qui agissent sur ces champs

Par exemple, pour le champ du photon on aura

$$\mathcal{C} J \mathcal{C}^{-1} = -J \Rightarrow \mathcal{C} A \mathcal{C}^{-1} = -A$$

Conclusions Le photon est un état quantique neutre et propre de $\mathcal{C}$ avec valeur propre -1. L'état est invariant sous $\mathcal{C}$ à une phase près.

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C} \mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$
	unitaire	unitaire	unitaire	antiunitaire	antiunitaire
forte	oui	oui	oui	oui	oui
EM	oui	oui	oui	oui	oui
faible	non	non	$\sim$ oui	oui	

Table 2: Les interactions et leurs symétries $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$

Application

La désintégration électromagnétique du $\pi^0 = q\bar{q}$ de conjugaison de charge +1 ;

$$\begin{aligned}\pi^0 &\rightarrow 2\gamma \quad \text{observé} \\ \pi^0 &\rightarrow 3\gamma \quad \text{impossible}\end{aligned}$$

La désintégration électromagnétique du positronium $e^+ e^-$ de conjugaison de charge ± 1 ;

$$\begin{array}{llll} J^P & \mathcal{C} & & \\ ortho & 1^- & -1 & \rightarrow 3\gamma \text{ observé } 10^{-7} \text{ sec} \\ para & 0^- & +1 & \rightarrow 2\gamma \text{ observé } 10^{-10} \text{ sec} \end{array}$$

Le carré de ces opérateurs est unitaire et vérifie

$$U^2 = 1 \text{ à une phase près}$$

3.3 Particularité quantique de $\mathcal{T}$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ peuvent être pris unitaire mais $\mathcal{T}$ doit être antiunitaire. Pour être des symétries, ils doivent de plus commuter avec l'hamiltonien H . Si $\mathcal{T}$ est antiunitaire, on obtient la bonne propriété de transformation de l'opérateur quantité de mouvement qui doit s'inverser.

$$\mathcal{T} i\vec{\partial} \mathcal{T}^{-1} = -i\vec{\partial}$$

en particulier

$$\mathcal{T} \exp(-iH t) \mathcal{T}^{-1} = \exp(+iH t)$$

L'application de $\mathcal{T}$ aux amplitudes conduit à la propriété :

$$\forall a, b \quad \langle b|a \rangle = \langle \mathcal{T}b|\mathcal{T}a \rangle^*$$

Conclusions $\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$ est antiunitaire

Conséquence pour les amplitudes de transition (ref [11] page 155)

$$\begin{aligned} \langle f | \exp(-iHt) i \rangle &= \langle \mathcal{T}f | \mathcal{T} \exp(-iHt) \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T}i \rangle^* \quad \text{antiunitaire} \\ &= \langle \mathcal{T}f | \exp(+iHt) \mathcal{T}i \rangle^* = \langle \mathcal{T}i | \exp(-iHt) \mathcal{T}f \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle f | S i \rangle = \langle \mathcal{T}i | S \mathcal{T}f \rangle}$$

4 Cas des spineurs de Dirac

4.1 L'équation de Dirac

Elle s'écrit

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi &= 0 \quad \text{avec} \quad \partial^\mu \partial_\mu \equiv -\square \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

Pour les électrons, elle admet des solutions à énergie positive et négative ainsi qu'une dimension associé au spin 1/2 soit 4 états.

Si on ajoute la possibilité de créer un électron ou d'annihiler un électron alors l'annihilation d'un état électronique d'énergie négative correspond à la création d'un positon d'énergie positive et inversement. Le champ $\psi(x)$ ci-dessous annihile des électrons d'énergie positive et crée des positons (réf [5] page 121):

$$\psi(x) = \sum [a(p, \sigma) u(p, \sigma) \exp(-ipx) + b^+(p, \sigma) u(-p, -\sigma) \exp(+ipx)]$$

Le champ de spineur "conjugué de Dirac" introduit les processus inverses, création d'électrons et annihilation de positons (réf [5] page 105) :

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0 = \sum [a^\dagger(p, \sigma) \bar{u}(p, \sigma) \exp(ipx) + b(p, \sigma) \bar{u}(-p, -\sigma) \exp(-ipx)]$$

4.2 $\mathcal{C}$

réf [5] page 124

La "fonction d'onde" d'un positron est alors donnée par

$$\psi_+ = \bar{u}(-p, -\sigma) \exp(-ipx)$$

Cependant ce spineur ne satisfait pas à l'équation de Dirac il faut le transformer

$$\mathcal{C}\psi = U_c \psi_+ \quad \text{avec} \quad U_c = \gamma^2 \gamma^0 \quad (\text{dans la représentation standard})$$

4.3 $\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}$

On procédera de la même façon pour le renversement du temps et la parité

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\psi &= U_T \bar{\psi}(-t, \vec{x}) \quad \text{avec} \quad U_T = i\gamma^3 \gamma^1 \gamma^0 \\ \mathcal{P}\psi &= U_P \psi(t, -\vec{x}) \quad \text{avec} \quad U_P = i\gamma^0 \end{aligned}$$

réf [5] pages 105 et 127

4.4 $\mathcal{CPT}$

On en déduit que l'action de $\mathcal{CPT}$ sur un spineur de Dirac est donnée par

$$\mathcal{CPT}\psi(x) = -i\gamma^5\psi(-x)$$

réf [5] page 128

5 Conclusion

La symétrie $\mathcal{CPT}$ supposée universelle couple de façon simple les propriétés spaciales du groupe de Lorentz inhomogène avec des propriétés internes des particules .

Références additionnelles [7], [11], [1], [3], [5], [8] [10] , [4]

6 CONVENTIONS

liste des livres qui utilisent nos conventions

- [6] pages 7:9
- [5] pages 99:130
- [11] appendix
- [2] pages 73,75,88 et 100:115
- [9] pages 27:28 44:45 49 et 53.
- [1] appendix 1
- [3] pages 16 20 28:29
- [7] pages 69 105 122:123 127

$$\begin{aligned}
 c = \hbar = 1 \quad \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \\
 g_{\mu,\nu} = g^{\mu,\nu} = (1, -1, -1, -1) \quad \epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1 \quad \text{avec } \mu = 0, 1, 2, 3 \\
 p^2 = m^2 \text{ et } i\partial_\mu = p_\mu
 \end{aligned} \tag{1}$$

Les matrices sigma de Pauli :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les équations de Klein-Gordon et de Dirac s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi &= 0 \text{ avec } \partial^\mu \partial_\mu \equiv -\square \\
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) &= 0
 \end{aligned}$$

Les représentations de l'algèbre de Dirac

- Les matrices gamma dans la représentation de Pauli-Dirac ou standard (réf [2], 111 ; [5] pages 107 et 111) :

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 = \beta &= \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \alpha_i = \beta\gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ (réf [2] page 101)}
 \end{aligned}$$

- Les matrices gamma dans la représentation de Weyl ou chirale ou spinorielle (réf [2], 115 ; [5] pages 103 et 111) :

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 = \beta &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \\
 \alpha_i &= \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \text{ (réf [2] page 101)}
 \end{aligned}$$

- Il existe également la représentation de Majorana (réf [11] appendix) telle que

$$\gamma_M = U\gamma_D U^+ \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :

1. γ^5 invariant (groupe de Lorentz propre)
2. $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu} \rightarrow$ générateurs du groupe Lp
et $\rightarrow \sigma^{ij}$ générateurs des rotations
3. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
4. conséquence : décomposition symétrique anti-symétrique du produit

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} \Rightarrow /A/B = (A.B) - i\sigma^{\mu\nu}(A_\mu.B_\nu)$$

Application avec $q = -e$:

$$/(p - qA)/(p - qA) = (p - qA)^2 + iq \sigma^{\mu\nu}[p_\mu, A_\nu] = (p + eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2)$$

5. $\sigma^{\mu\nu}$ (représentation de Pauli Dirac) :

$$\begin{aligned} \sigma^{0k} &= i \alpha_i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^{ij} &= \Sigma_k \quad \text{si } (ijk) \equiv + \quad \text{avec } \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

- Les solutions libres pour l'électron : avec $\omega = \sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega - m & -\sigma.p \\ \sigma.p & -\omega - m \end{pmatrix} \psi = 0 \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma.p}{\omega+m} \chi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Selon les conventions de Halzen & al avec $N = 1$

Les ondes planes

- pour les bosons (réf [2], 75,88)

$$\phi(x) = N \exp(-ipx)$$

Le courant de particules associé et conservé par l'équation de Klein Gordon est :

$$j_\mu = (i\partial_\mu \phi)^* \phi + \phi^* (i\partial_\mu \phi) = 2p_\mu N^2$$

- pour les fermions (anti) (spin 1/2) (réf [2], 110) $\omega = |E|$

$$\psi(x) = N u(p) \exp(-ipx) \text{ avec } u^+ u = \bar{u} \gamma^0 u = 2E = 2\omega$$

$$\psi(x) = N v(p) \exp(+ipx) \text{ avec } v^+ v = \bar{v} \gamma^0 v = -2E = 2\omega$$

car $v(p) = u(-p)$ avec $E = p^0 = -\omega$

Le courant de particules associé et **conservé** par l'équation de Dirac est :

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 2p_\mu N^2 \text{ avec } \bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$$

La normalisation des états de particules libres telle que dans la référence [2]

- Pour les spineurs $\bar{u}u^{1,2} = +2m$ et $\bar{u}u^{3,4} = -2m$

- Pour les photons $\epsilon^* \epsilon = 1$
- Pour les bosons scalaires $\phi^* \phi = 1$

L'électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique 6 composantes ($\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$).

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A^\mu = (V(x), \vec{A}(x)) \text{ le potentiel électromagnétique}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}^i = F^{i0}) \quad \vec{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}^k = -F^{ij})$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [1]$$

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \quad [2]$$

- $F_{\mu\nu}$ antisymétrique : $\Rightarrow$ l'invariance de jauge & la conservation de J_μ & la conservation de la relation $p^2 = m^2$. L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue et la dynamique peut être extraite du principe de moindre action (A_{min}).

$$A = \int -m d\tau - q A_\mu dx^\mu$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu = q (F_{\mu\nu} v^\nu) \quad \text{avec } v^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} \quad (5)$$

L'électromagnétisme des fermions ponctuels de Dirac

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants (action sur ψ):

$$\{ \gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m \} \psi(x) = 0$$

- L'opérateur de Dirac s'écrit (avec une action sur ψ):

$$i\partial_0 \psi(x) = H_D \psi(x) = \{ qA_0 - \gamma^0 \gamma^i (i\partial - qA)_i + \gamma^0 m \} \psi(x)$$

$$H_D = \{ qA_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \} \text{ avec } \vec{p} = -i\vec{\partial} - q\vec{A}$$

$$\mathcal{H}_0(x) = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\partial} + \beta m \quad \mathcal{H}_{int}(x) = q (A_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{A})$$

References

- [1] E. Leader & al. *{ Gauge theories and the new physics }*. Cambridge UP., 1982.
- [2] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [3] S.J. Chang. *{ Introduction to Quantum Field Theory }*. World Scientific, Inc., 1990.
- [4] TD Lee. *{ particle physics and ... }*. Harwood Academic, 1981.
- [5] L. Landau & E. Lifchitz. *{ Electrodynamique quantique }*. MIR , Inc., 1972.
- [6] L. Landau & E. Lifchitz. *{ Théorie quantique relativiste I }*. MIR , Inc., 1972.
- [7] P. Renton. *{ Electroweak interactions }*. Cambridge UP., 1990.
- [8] A. Rougé. *{ Introduction à la physique subatomique }*. Ellipse., 1997.

- [9] L.H. Ryder. *{ Quantum Field Theory }*. Cambridge UP., 1985.
- [10] G Chanfray & G. Smadja. *{ Les particules et leurs symétries }*. Masson, 1997.
- [11] C. Itzykson & Zuber xx. *{ Quantum field theory }*. Macgraw Hill, Inc., 1980.