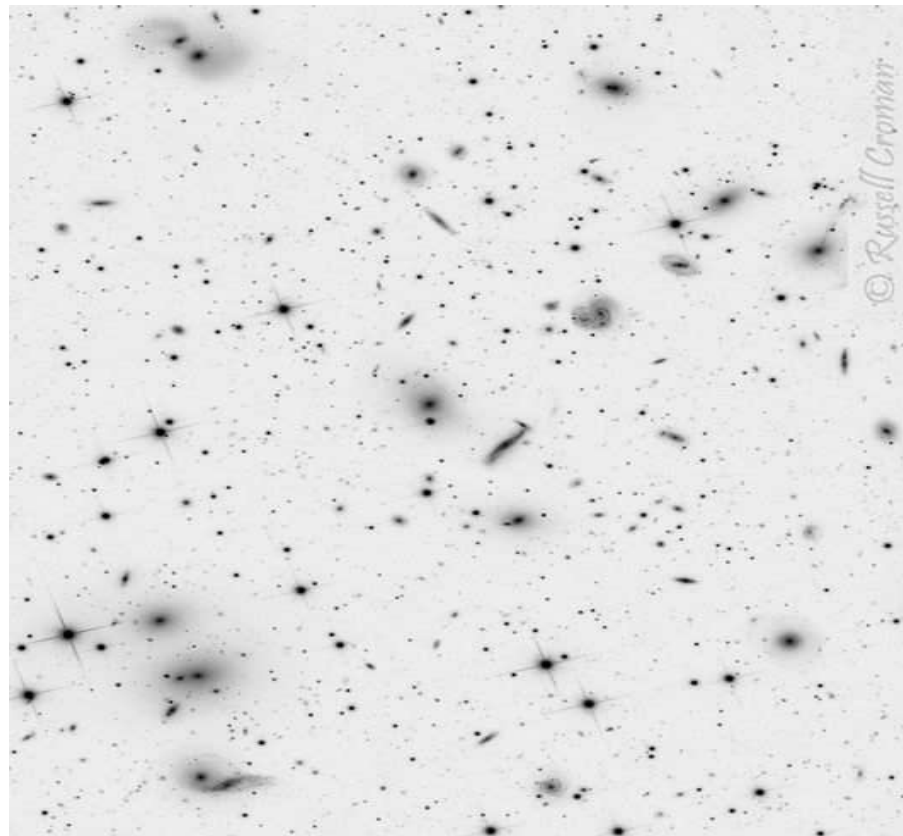


Stabilité stellaire

C. LONGUEMARE

8 novembre 2011



Plan

1. Introduction
2. Equilibre thermodynamique
3. Nucléosynthèse
4. Modèle d'Eddington
5. Evolution des étoiles

Introduction

- Généralités :

Les étoiles naissent dans les grands nuages d'hydrogène froid ($H_2 + He$), appelés "nébuleuses". Sous l'effet de la gravité ces nuages s'effondrent, la masse de gaz se concentre et la température s'élève car l'énergie gravitationnelle est transformée en chaleur (luminosité + échauffement). La matière est en situation passive. Quand le coeur du nuage atteint une température d'environ 10 millions de kelvins, la réaction de fusion de l'hydrogène en He est possible sur une base de temps très longue, le milliard d'années. L'étoile a trouvé une nouvelle source d'énergie . La pression est assez élevée pour, provisoirement, stabiliser le système. Une étoile de la séquence principale s'est formée.

Notations et constantes physiques

S, U r ρ $V (P)$ T $N \sim \mathcal{N}$	entropie, énergie distance à l'origine densité massique volume (pression) température thermo Nombre de constituants		
$\mathcal{H}$ $\mathcal{G}$ $\mathcal{N}$ $R^* : k_B \mathcal{N}$ k_B c σ	Constante de Hubble cte de gravitation nombre d'Avogadro cte des gaz parfaits cte Boltzmann vitesse de la lumière cte Stefan-Boltzmann	$72, \pm 10,$ $6,673 \cdot 10^{-11}$ $6,022 \cdot 10^{23}$ $8,314$ $8,617 \cdot 10^{-5}$ $3, \cdot 10^8$ $5,67 \cdot 10^{-8}$	$\text{km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ mol^{-1} $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ eV.K^{-1} m.s^{-1} $\text{J.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

- La matière stellaire est composée d' un plasma d'électrons, de photons (légers) et de noyaux (lourds). Les particules qui composent le plasma stellaire sont de très petite dimension ($r \sim fm$) . La densité peut donc croître jusqu'à la densité nucléaire ! Le système considéré est isotrope.
- L'équilibre mécanique est envisagé sous l'action de deux forces, la pression du gaz et la gravitation. Soient P la pression, et ρ la densité à l'intérieur de l'étoile. Le système est décrit par :
 - L'équation de la mécanique des fluides, en régime hydrostatique :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g\rho(r) \quad \text{avec } g(r) = G \frac{M(r)}{r^2} \quad (1)$$

où g est l'accélération de la pesanteur

- La masse contenue dans une sphère de rayon r est :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (2)$$

Pour décrire la structure mécanique, il convient de résoudre simultanément les équations (1) et (2). Une conséquence de l'équilibre mécanique (1+2) est l'équation 3 :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi \mathcal{G} \rho \quad (3)$$

Il sera nécessaire de vérifier que les solutions de l'équation 3 satisfont (1+2) !

L'équilibre mécanique est conditionné par deux fonctions inconnues, la pression et la densité ; la thermodynamique doit permettre d'introduire la température et les questions d'énergie en particulier l'énergie interne (gravitationnelle et thermique).

- Le modèle polytropique

La pression est supposée proportionnelle à une puissance γ de la densité : C est la constante polytropique et l'indice polytrophe est n

$$P = C \rho^\gamma \quad \text{avec } \gamma n = 1 + n \quad (4)$$

L'hypothèse polytropique est portée dans l'équation d'équilibre mécanique en fonction de x et y :

$$\begin{aligned} x &= \lambda r \\ \rho &= \rho_c y^n \\ \text{avec } P &= C(\rho_c)^\gamma y^{n+1} \end{aligned}$$

la densité centrale est ρ_c et λ une échelle de longueur arbitraire. Par un choix judicieux de λ , l'équation est sans dimension :

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n \quad \text{équation de Lane-Emden} \quad (5)$$

$$\lambda^2 = \rho_c^{\frac{n-1}{n}} \frac{4\pi\mathcal{G}}{C(n+1)} \quad (6)$$

Deux conditions aux limites suffisent pour déterminer la solution :

$$y(0) = 1; y'(0) = 0$$

- L'équation de Lane-Emden

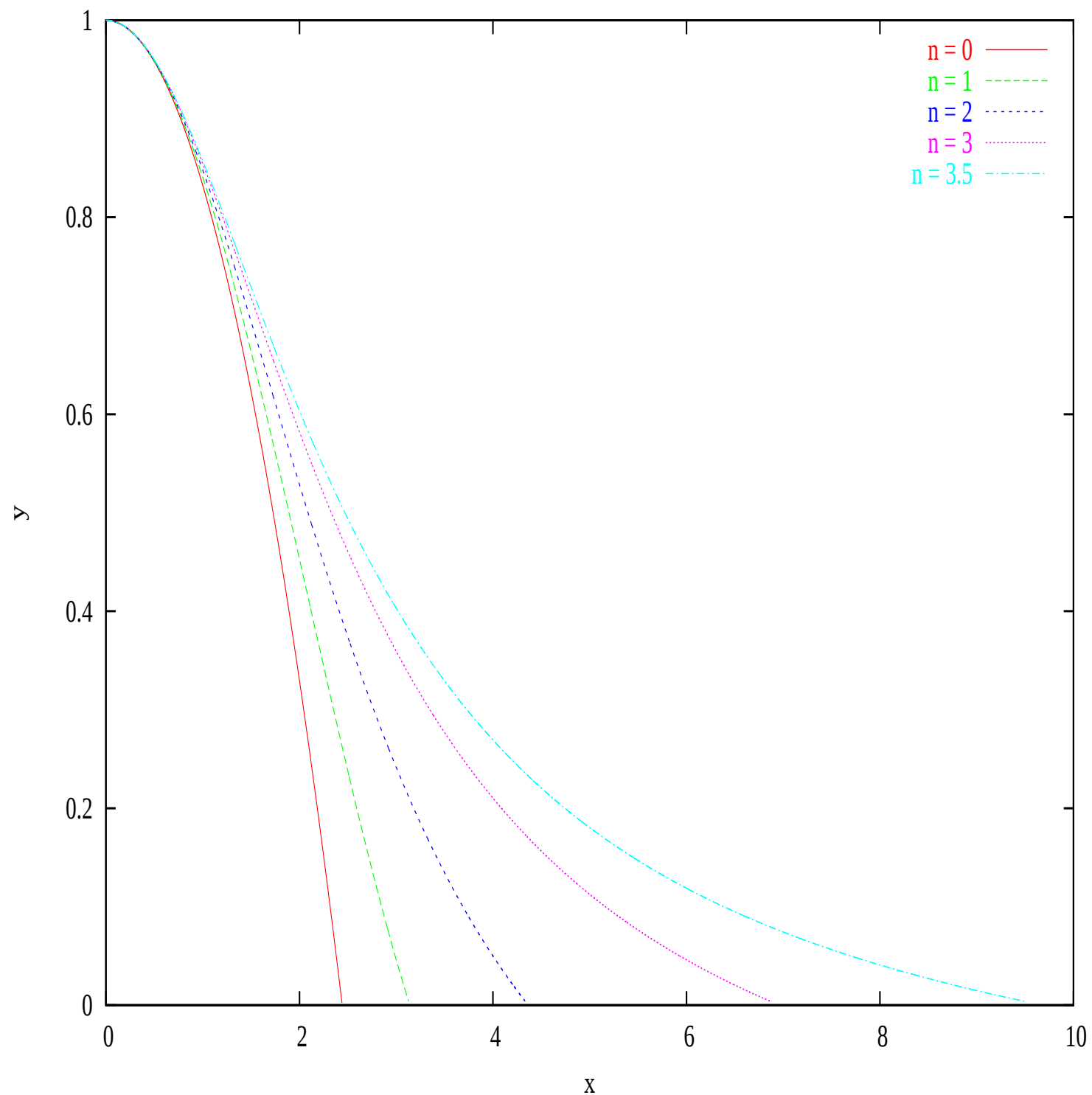
Pour les valeurs $n = 0, 1, 5$, l'équation admet des solutions analytiques élémentaires. Par exemple

$$n=0 \quad y(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$$

$$n=5 \quad y(x) = \left[1 + \frac{x^2}{3}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

L'équation a été résolue numériquement par la méthode d'Euler, pour un indice polytrophe variable. La figure (1) présente le comportement de la solution pour différents indices.

figure 1



La surface de l'étoile est définie par la première racine x_1 de l'équation $y(x) = 0$. A la surface, densité et pression s'annulent car la surface du système est en contact avec le vide.

Pour des valeurs de n supérieures à 5, la fonction $y(x)$ ne s'annule pas. Quand n tend vers 5, x_1 tend vers l'infini. Si n tend vers 0, λ tend vers 0.

Le domaine des valeurs de n est donc physiquement limité à l'intervalle $[0, 5[$.

n	0	1	2	3	3,5	5
x_1	2,449	3,141	4,351	6,894	9,534	∞
y'_1	-0,817	-0,318	-0,27	-0,0424	-0,021	0

- Signification "thermodynamique" de la relation polytropique : Celle-ci décrit les transformations possibles du plasma au sein de l'étoile. Exemples :
 - $n = -1$, la pression est constante, les parties locales de l'étoile sont reliées par une transformation isobare.
 - $n = 0$, il s'agit d'une transformation isotherme d'un gaz parfait
 - $n = \frac{3}{2}$, il s'agit d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait ($\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$).

- **Résumé du modèle**

Le modèle polytrophe dépend des paramètres suivants : l'indice polytrophe n , la constante polytrophe C , le paramètre d'échelle λ , la masse M et le rayon R . A partir de ces paramètres, la pression totale P et la densité ρ sont déterminées.

Les équations d'équilibre (3) et (4) conduisent aux contraintes ci-dessous :

$$x_1 = \lambda R \quad (7)$$

$$4 \pi \mathcal{G} \rho_c^{\frac{n-1}{n}} = C (n+1) \lambda^2 \quad (8)$$

$$-\mathcal{G} M R^{-2} = C (n+1) \rho_c^{\frac{1}{n}} \lambda y_1' \quad (9)$$

L'équation 8 vient du choix de λ (équation 6) et 9 est conséquence de l'équation 1 à la limite $r = R$. A partir des équations (8) et (9), la relation 10 est déduite :

$$\rho_c = -\frac{x_1}{3y_1'} \bar{\rho} \quad (10)$$

$\bar{\rho}$ est la densité moyenne tirée de M et R .

Si M , R et n sont connus :

$$M, R \text{ et } n \Rightarrow P(r) \text{ et } \rho(r)$$

- x_1 et y'_1 sont connus de l'équation de Lane-Emden 5
- λ est connu 7
- la densité moyenne et centrale sont déterminées 10 ainsi que la constante polytrophe C , la distribution de densité et de pression en fonction de la distance 8 , 4.

La température $T(r)$ qui caractérise l'équilibre thermique local, peut être reliée à la pression et la densité par la thermodynamique ou la physique statistique . $T(P, \rho)$ est la **fonction d'état** (locale) qui dépend de l'état du plasma en r , exemples :

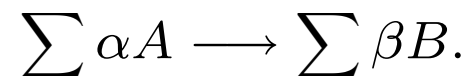
- gaz parfait classique d'électrons et de noyaux plus ou moins lourds
- gaz de photons à haute température (corps noir)
- gaz dégénérés d'électrons ou de neutrons (principe de Pauli, statistique de Fermi et effets quantiques)

La nucléosynthèse

- Généralités

La nucléosynthèse stellaire est un ensemble de processus nucléaires qui conduisent à partir d'hydrogène et d'hélium, à des noyaux plus lourds par, essentiellement, des réactions de fusion exothermiques avec les noyaux présents dans le plasma.

- Les réactions exothermiques éventuelles sont empêchées par la barrière coulombienne. Elles se produisent néanmoins par effet tunnel, avec un taux qui varie fortement avec de la température.



- Si $\frac{dN}{dt}$ est le nombre de réactions par unité de volume et de temps, la variation de la concentration pour les noyaux A et B est donnée par :

$$\frac{d[A]}{dt} = -\alpha \frac{dN}{dt} \quad \frac{d[B]}{dt} = \beta \frac{dN}{dt}$$

et la durée de vie de A est :

$$\tau_A^{-1} = -\frac{1}{[A]} \frac{d[A]}{dt}$$

- Les réactions de fusion se produisent quand la température est suffisamment élevée, un critère de comparaison pouvant être la même valeur du facteur de Gamov $\text{prob}(\bar{\beta})$.

$$T \propto (Z_1 Z_2)^{2/3} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

Réaction	Température (10^6 K)	(B_C)MeV
$p + p$	15	0,54
$p + D$	19	0,48
${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$	114	1,50
${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$	151	1,36
${}^4\text{He} + {}^8\text{Be}$	318	2,40

*

Pour fabriquer les éléments au delà du carbone, il faut passer par la réaction dite à 3α



*La demi-vie de ${}^8\text{Be}$ est $9,68 \cdot 10^{-17}\text{s}$: ${}^8\text{Be} \rightarrow 2\alpha$

Celle-ci n'est efficace qu'à des températures de l'ordre de 120 millions de kelvins et sous condition que le béryllium existe dans le plasma stellaire.

A partir de ces remarques deux cycles peuvent être identifiés : le cycle proton - proton (15 millions de kelvins) et le cycle du carbone (CNO) (150 millions de kelvins).

- Cycle proton - proton Le cycle p-p se décompose en trois branches. On présente graphiquement l'ensemble des réactions sur la figure (2) et dans la table nous ne présentons que la branche 1 qui fournit les 3/4 de l'hélium généré par le cycle p-p

	Interaction	Réaction	Q (en MeV)
1	W	$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$	0,424
	E.M.	$p + D \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5,493
	S	${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$	12,85

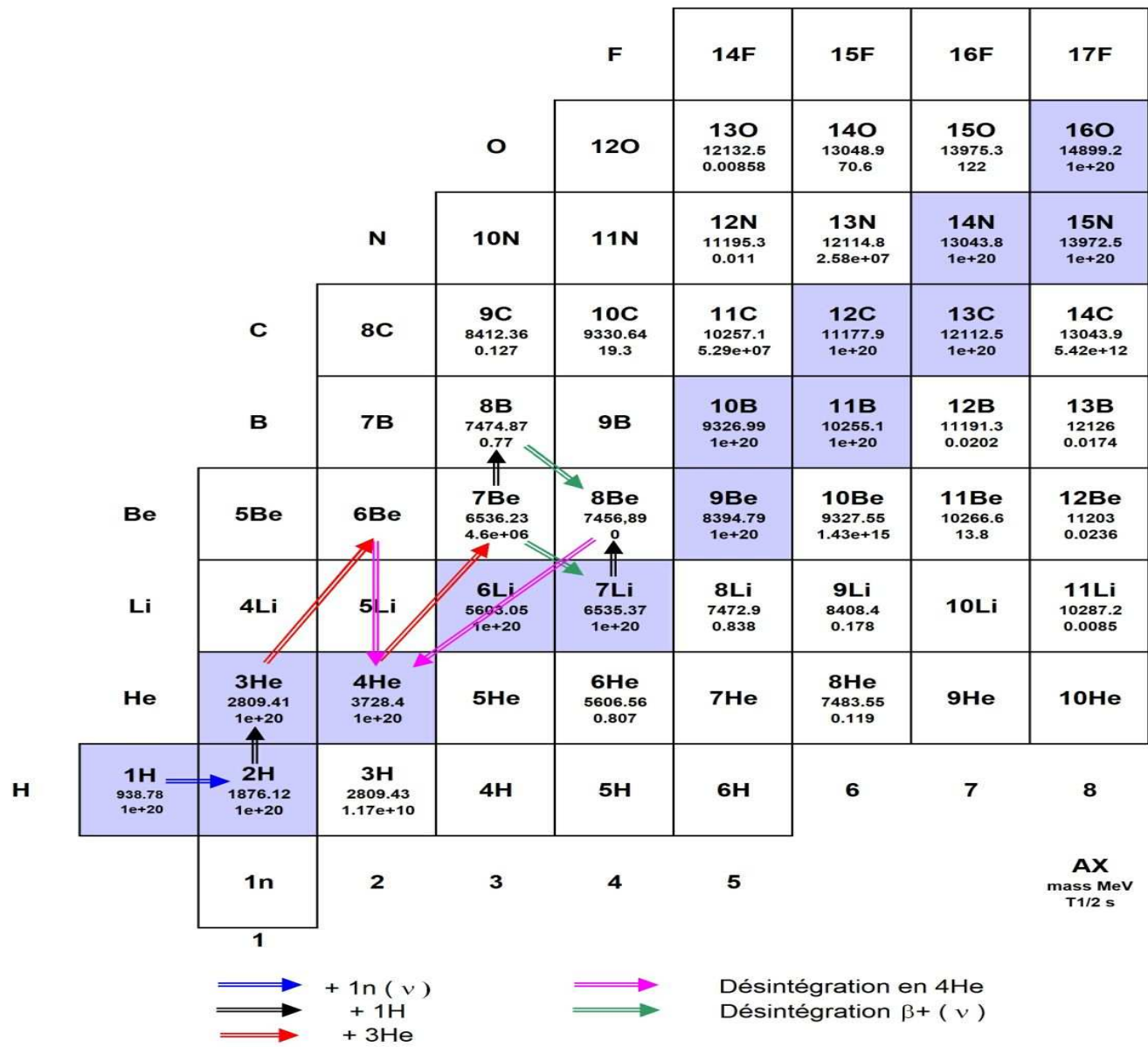


Figure 2

Ce processus va durer des milliards d'années, car il est conditionné par la réaction $p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$.

- **Chaine 3α** A des températures de l'ordre de 100 millions de kelvins dans un plasma d' ${}^4\text{He}$, la réaction à trois corps qui transforme l'hélium en carbone est possible. Ceci se fait par l'intermédiaire de la réaction ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$, réaction endothermique en principe difficile ($Q = -90\text{ keV}$). A haute température, cette réaction va permettre néanmoins le passage au carbone par fusion globalement exothermique .

	Interaction	Réaction	Q (en MeV)
	S	${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \leftrightarrow {}^8\text{Be}$	-0,090
	S	${}^4\text{He} + {}^8\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C}$	7,39

- **Cycle CNO** A la suite d'une contraction, la température du coeur s'élève à environ 120 millions de kelvins et le plasma stellaire s'enrichit en ${}^{12}\text{C}$. Les réactions empêchées par la barrière coulombienne se produisent car la température est maintenant suffisante. On présente graphiquement l'ensemble des réactions sur la figure (3) et dans la table ci-dessous.

	Interaction	Réaction	Q (en MeV)
1	E.M.	$^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$	1,883
2	W	$^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	2,3
3	E.M.	$^{13}\text{C} + p \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$	1,77
4	E.M.	$^{14}\text{N} + p \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$	2,027
5	W	$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	2,8
6	S	$^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$	1,99
6b	EM	$^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$	12,0

Le carbone sert de catalyseur pour achever la production d'hélium à partir de l'hydrogène jusqu'à son épuisement. A ce stade, la seule fusion active est celle de l'hélium en carbone, azote et oxygène.

L'étoile va ainsi produire des noyaux de plus en plus complexes, éventuellement jusqu'à l'élément le plus stable : le fer. La fusion vers des éléments plus lourds n'est pas possible car les réactions sont endothermiques

[†]La demi-vie de ^{13}N (^{15}O) est 598 s (122 s) . ^{16}O est stable.

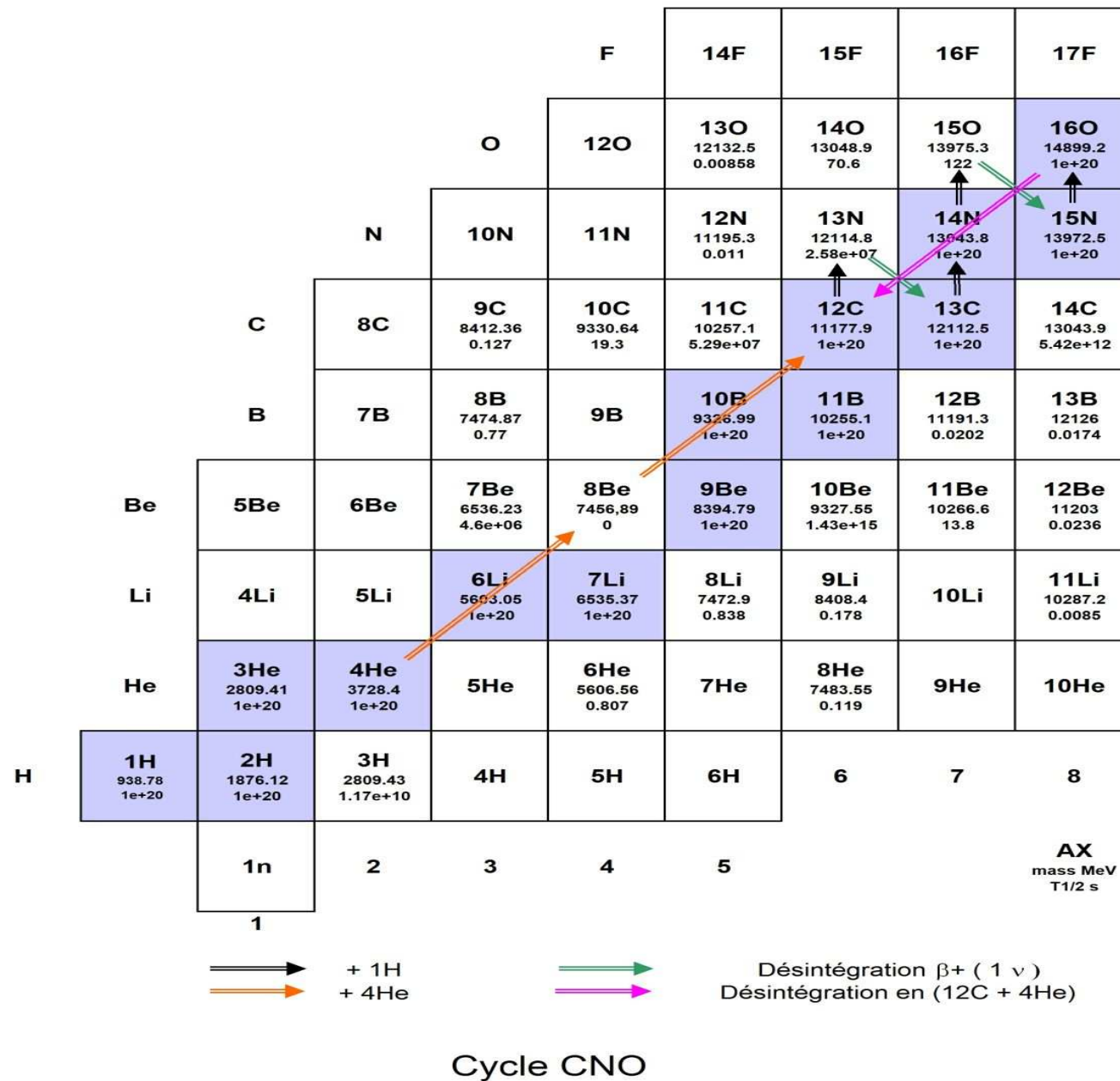


Figure 3

- Composition du plasma stellaire

Il est composé de noyaux (hydrogène et noyaux lourds), de rayonnement γ et d'électrons. La densité de masse ρ ne fait intervenir que les noyaux, tandis que la densité de particules ρ^* fait intervenir noyaux et électrons qui dans des cas limites peuvent être relativistes.

- L'équation d'état thermodynamique porte sur P, T, ρ

La pression totale P est la somme des pressions partielles des particules P_G et de la radiation P_R .

$$P = P_G + P_R$$

A haute température les particules sont classiques et se comportent comme un gaz parfait non-relativiste

$$P_G = k_B \rho^* T$$

où ρ^* qui est la densité des particules (électrons et noyaux); on introduira la masse moyenne des particules $\mu = \rho / \rho^*$

La pression de radiation est celle d'un corps noir

$$P_R = aT^4$$

où a est une constante déduite de la constante de Stefan-Boltzmann : $a = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c}$.

- L'hypothèse d'Eddington revient à poser

$$P_G = \beta P \text{ donc } P_R = (1 - \beta)P$$

et à supposer β constant pour une étoile donnée.

- Il en résulte que l'étoile est polytrophe avec un indice **$n=3$** .

$$P = C \rho^{\frac{4}{3}} \quad T^4 = (1 - \beta) \frac{P}{a}$$

$$\text{avec } C = \left[\frac{(1-\beta)}{a} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{k_B}{\mu \beta} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (11)$$

- Pour le soleil (équations 9 et 11) on détermine $1 - \beta = 0,003$ *

*Sobolev page 499 d'après Chandrasekhar table 56

- Résultats pour un soleil moyen en fonction de (R, M, μ) et **$n=3$** .

$$R_{\odot} = 696 \cdot 10^6 \quad M_{\odot} = 2, \cdot 10^{30} \quad \mu_{\odot} = 1, \cdot 10^{-3}$$

μ 10^{-3}	$1 - \beta$ 10^{-3}	ρ_c 10^3	P_c 10^{16}	T_c 10^6
1	2,9	76,	1,2	19,
0,5 1,5	0,2 14,	76, "	1,2 "	9,7, 29,

$M_{\odot}$	$1 - \beta$	ρ_c	P_c	T_c
0,5 1 5	0,7 2,9 54,	38, 76, 380	0,3 1,2 31,	9,7 19, 90,

$R_{\odot}$	$1 - \beta$	ρ_c	P_c	T_c
0,5 1 5	2,9 2,9 2,9	610, 76, 0,6	20, 1,2 0,02	39, 19, 3,9

Valeurs habituellement admises pour $\odot$ avec $n = 3,34$

$\mu_{\odot}$	$1 - \beta$	ρ_c	P_c	T_c
0,62	3,	150,	3,4	15,6

- Questions d'énergie

- L'énergie gravitationnelle

Pour une étoile polytrophe on démontre que [†]

$$E_G = -\frac{3}{2(5-n)} \mathcal{G} \frac{M^2}{R} = -\frac{3}{4} \mathcal{G} \frac{M^2}{R} \text{ (pour } n = 3\text{)}$$

Pour le soleil $E_G = -0,3 \cdot 10^{42} \text{ J}$

- la nucléosynthèse intervient pour modifier la valeur de μ la masse moyenne des particules. par exemple si le plasma est composé d'isotopes (A,Z) alors

$$\mu = \mathcal{N}^{-1} \frac{A}{(1+Z)}$$

$\mu \mathcal{N}$ varie de 0,5 à 2, $10^{-3} \text{ kg.mole}^{-1}$ quand on passe de l'hydrogène aux noyaux lourds.

- le théorème du Viriel permet de relier l'énergie potentielle gravitationnelle à l'énergie d'agitation thermique des particules massives.

$$E_G = -2 E_T$$

[†]Réf Sobolev page 494

- Le transport de l'énergie du centre à la périphérie de l'étoile est dominé par le transport radiatif sur la séquence principale mais il est également conductif et convectif. C'est une **question essentielle** de la physique stellaire que nous n'abordons pas dans ces notes.

Généralités

Diagramme de Hertzsprung - Russell (L_0, T_0)

Le diagramme de Hertzsprung-Russell classe les étoiles selon leur luminosité L_0 et leur température de surface T_0 mesurée par λ_0 la longueur d'onde moyenne du spectre (la couleur) (figure 4).

Empiriquement, on peut différencier plusieurs zones :

- La séquence principale dont le soleil fait partie, est la zone où les étoiles transforment leur hydrogène en hélium, d'abord par le cycle p-p et ensuite par le cycle CNO.
- Les géantes rouges, phase future des étoiles de la séquence principale.
- Les naines blanches, résidus des géantes rouges, possèdent une luminosité plus faible associée à une température plus élevée.
- Les géantes bleues sont des objets pathologiques très massifs où la température superficielle est élevée.

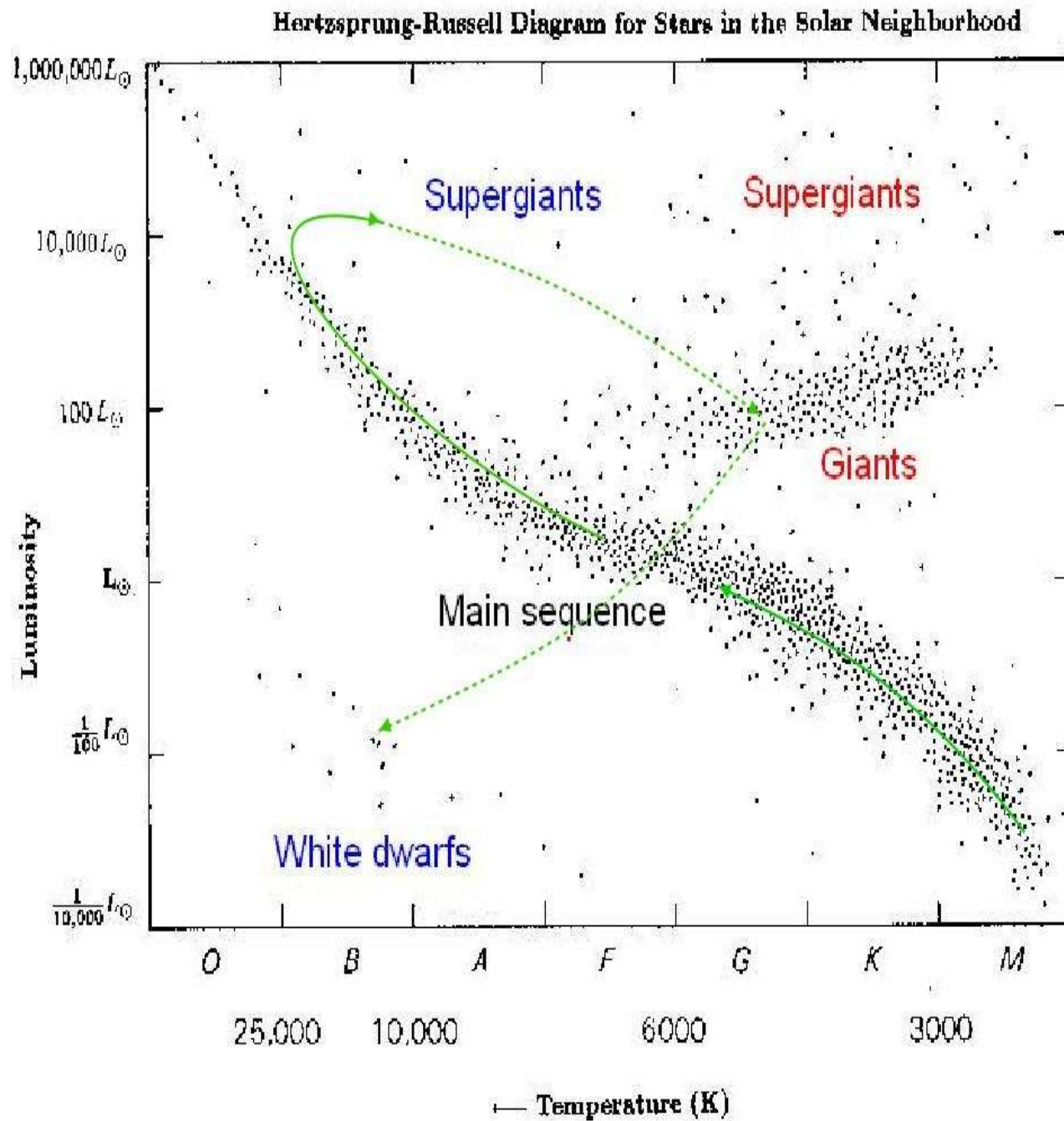


Figure 4

En s'appuyant sur la théorie du rayonnement thermique, une approche simplifiée de l'émission stellaire permet d'écrire :

$$L_0 = 4\pi R^2 \times \sigma T_0^4 \quad \text{avec} \quad \frac{hc}{\lambda_0} = 2,8 k T_0$$

où λ_0 est la longueur d'onde moyenne soit la "couleur" de l'étoile.

Dans le diagramme de H-R , les étoiles de même rayon se groupent sur des droites telles que :

$$\log(L_0) = 4 \log(T_0) + 2 \log(R) \text{ en unités solaires}$$

L'évolution d'une étoile dépend de sa masse car, plus une étoile est massive, plus la température interne est élevée et donc plus les fusions nucléaires sont rapides.

1 La séquence principale

A mesure que l'hydrogène brûle, la composition change et la température augmente à rayon constant ce qui renforce la luminosité. Sur le diagramme, l'étoile se déplace vers la droite en haut de la séquence principale. Puis le rayon augmente car la mécanique stellaire devient instable pendant la synthèse d'éléments de plus en plus lourds.

2 Les géantes rouges

Les géantes rouges sont l'état à venir des étoiles de la séquence principale. A l'épuisement de l'hydrogène, le coeur de l'étoile commence à brûler l'hélium en carbone ; il se réchauffe considérablement ce qui provoque la dilatation des couches supérieures relativement froides. L'étoile devient une géante rouge qui se transforme en un objet compact par effondrement gravitationnel quand les réactions nucléaires ne sont plus possibles.

3 Les objets compacts

a Naines blanches

Elles ont une masse de l'ordre de la masse solaire avec des densités élevées de l'ordre de :

$$\bar{\rho} = 10^6 \text{ g/cm}^3 \quad M \leq M_{\odot}$$

Comme elles ne sont plus le siège de réactions nucléaires, c'est la pression du gaz électronique dégénéré qui stoppe son effondrement. La chaleur résiduelle reçue de la contraction se dissipe, les naines blanches deviennent brunes et leur température décroît lentement. De façon imagée, on peut dire qu'une naine blanche est un "atome" lié par la gravitation.

b Etoiles à neutrons

Quand une étoile massive atteint le stade du fer, la synthèse de tout autre élément plus lourd est impossible car les réactions sont toutes endothermiques. Il n'y a plus assez d'énergie pour empêcher l'étoile de s'effondrer. La température s'élève à nouveau et la disparition des électrons par capture électronique accélère la chute de la pression (disparition des électrons). L'implosion du coeur jusqu'à la densité nucléaire est catastrophique et crée une onde de choc par rebond qui expulse les couches externes de la supergéante.

$$\rho_N = 1,6 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3 \quad M \geq M_{\odot}$$

C'est une supernova (figure 5). Au centre subsiste un reliquat de petite taille qu'on appelle étoile à neutrons, bien que le système n'ait plus rien d'une étoile. Avec un rayon d'environ 1 km et une densité de l'ordre de un milliard de tonnes par centimètre cube, c'est un noyau atomique lié par la gravitation à l'échelle macroscopique.

c Trous noirs

Les étoiles à neutrons ne sont pas la seule issue d'une supernova. Il est probable que si l'étoile est hypergéante, c'est à dire de masse très élevée, elle se transforme en trou noir qui est une sphère dont la surface devient singulière pour la gravitation.

$$M \geq M_l = \left(\frac{c^2}{2G}\right)^{3/2} \times \left(\frac{4\pi}{3}\rho_N\right)^{-1/2} = 6,8 \cdot 10^{30} \text{kg} = 3,4 \times M_{\odot}$$

C'est la **limite d'Oppenheimer-Volkoff**

SN 1987A

The light show isn't over!

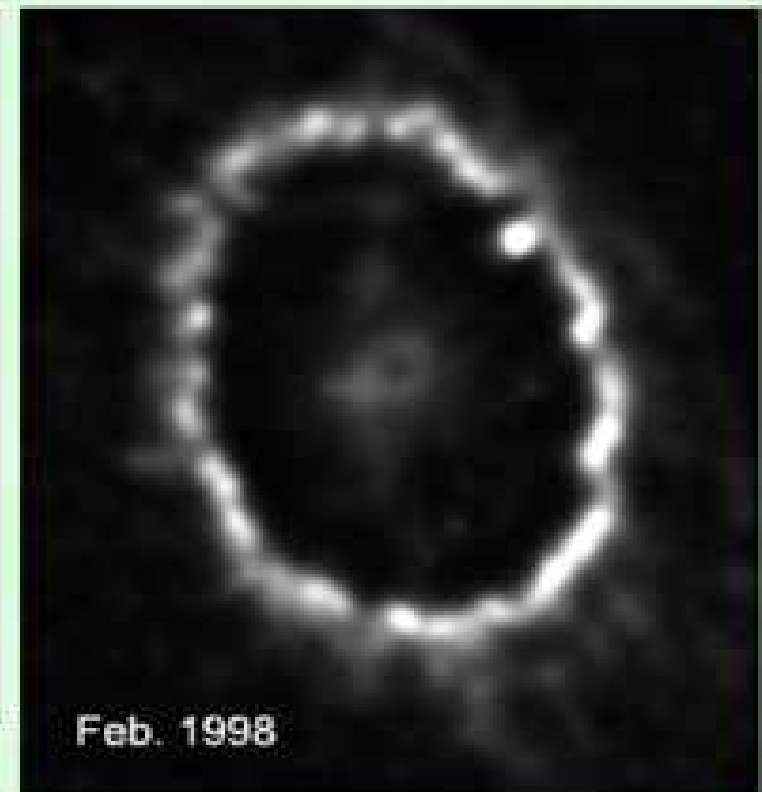
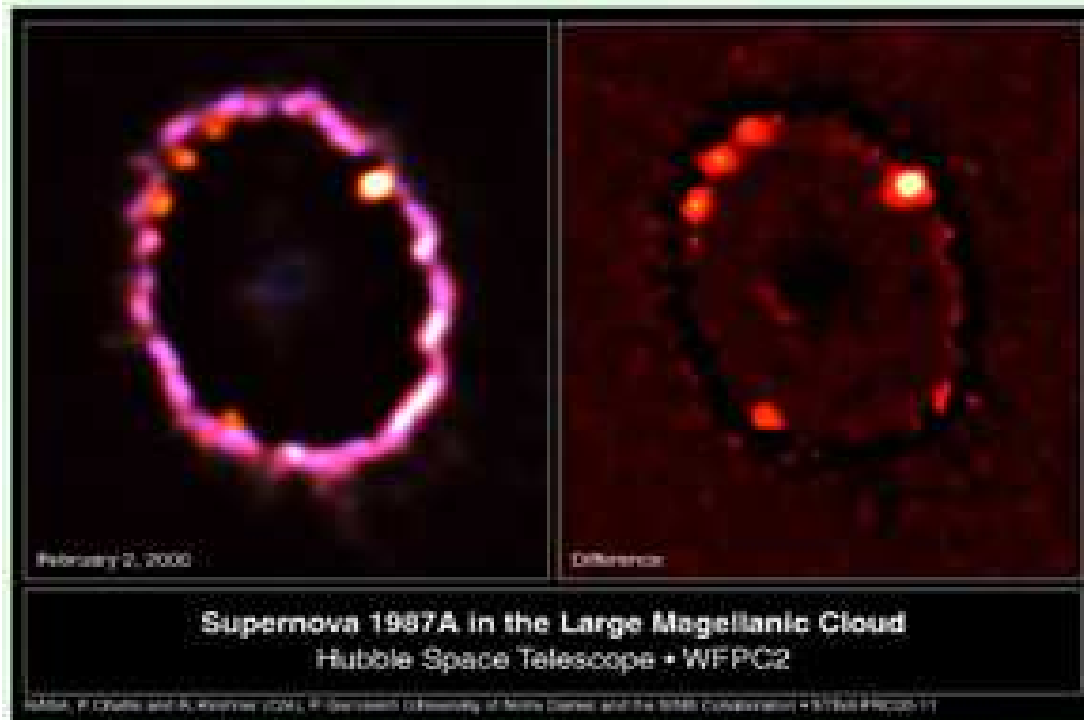


Figure 5

références

M. Schwarzschild, *Structure and evolution of the stars*, Ed Dover

E.Schatzman, *Astrophysique*, Ed Masson

M. Forestini, *Principes de structure stellaire*, Ed Gordon and B.

V. Sobolev, **Cours d'astrophysique théorique** , Ed Mir Moscou

D. Parent , *Stage Janus 2004*, LPC Caen, **Directeur de stage : C. Longuemare.**

[http ://www.einstein-online.info/spotlights/BBN](http://www.einstein-online.info/spotlights/BBN)

[http ://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html)

[http ://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/Astrophysics.html](http://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/Astrophysics.html)

[http ://www.oca.eu/guillot/DEA/](http://www.oca.eu/guillot/DEA/)

Propriétés physiques du ☉

☉		
1	abondance initiale de ^4He	27% en masse
2	Age approximatif	$4,55 \cdot 10^9$ années
3	ellipsoïde ~ sphère	$\sim 10^{-6}$
4	température à la surface	5780 K
5	Masse du soleil	$2,00 \cdot 10^{30}$ kg
5b	Rayon du soleil	$696, \cdot 10^3$ km
	densité moyenne	$1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
6	Rayon du coeur solaire	$69,67 \cdot 10^3$ km
7	température centrale	$15,6 \cdot 10^6$ K
8	densité centrale	$1,5 \cdot 10^5 \text{ kg.m}^{-3}$
9	pression centrale	$340 \cdot 10^9$ Atm
10	Constante solaire (puissance)	$C_{\odot} = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W}$
11	Emittance	$6,5 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2}$
12	distance	$150, \cdot 10^6$ km