

Université de Caen

LMNO

Les spineurs de Dirac

C. LONGUEMARE

11 juin 2013

Plan

- Notations relativistes et conventions
- Les ondes et la transformation de Fourier
- L'équation de Dirac
- Les ondes planes fermioniques
- La conjugaison de charge et les positons
- Les courants fermioniques
- Transformations de Lorentz des spineurs
- Amplitudes fermioniques et calcul des transitions

sur le même sujet :

<http://en.wikipedia.org/wiki/Spinor>

<http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/laville/spineurs.pdf>

<http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/spinors.pdf>

- Les indices d'espace-temps sont $\mu = 0, 1, 2, 3$.
la métrique g est telle que $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ $\epsilon_{0123} = 1 = -\epsilon^{0123}$.
- Les coordonnées covariantes x_μ et contravariantes x^μ
 $x_\mu y^\mu$ est un invariant de Lorentz.
- L'impulsion d'une particule libre sera notée $\vec{p}$ et la quadri-impulsion p_μ ;
 $p \cdot x = p_0 x_0 - p_i x_i = p_\mu x^\mu$
- La mécanique quantique se "résume" à $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et $E = \hbar \omega$ ou $i\hbar \partial = p$
- Les unités sont telles que $\hbar = 1$ et $c = 1$.
En l'électromagnétisme,
la charge électronique négative sera notée $e = -|e|$, de plus, on choisira
 $\epsilon_0 = (c^2 \mu_0)^{-1} = 1$ $\alpha^{-1} = 137,0..$ $e^2 = 4\pi\alpha$
- L'énergie positive d'une particule libre est $\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$; l'énergie de l'état relativiste d'une "particule" est $p_0 = \pm \omega_p$
- La normalisation (relativiste) des états est choisie telle que la densité volumique soit :

$$\phi_p^\dagger(x) \phi_p(x) = 2\omega_p \quad \text{la densité volumique est relative}$$

- notations pour les nombre $\mathbb{C}$ et les matrices :

z^* conjugué de $z \in \mathbb{C}$

$A^\dagger$ hermitique de A

$\tilde{A}$ transposé de A

A^* conjuguée complexe de A

- notations pour l'algèbre de Dirac et les matrices :

σ^μ matrices $\vec{\sigma}$ de Pauli + l'identité (base des matrices hermitiennes)

γ^μ matrices gamma de Dirac telles que $g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$

σ_i matrices sigma de Pauli (hermitique) telles que $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma_5$

$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ conjugué (adjoint) de Dirac du spineur ψ

$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

soit un quadrivecteur a de composantes a^μ alors $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$

Ondes quantiques

- Ondes quantiques : $\phi(x) \in \mathbb{C}$ dans l'espace-temps physique $x = (x_0, \vec{x})$

Phase : argument de $\phi(x) = \text{Arg } \phi(x)$

Surface d'onde telle que : $\text{Arg } \phi(x) = \text{cte}$

Direction de propagation de l'onde $\vec{\nabla} \text{Arg } \phi(x)$

- Les transformations de Fourier $x = (x_0, \vec{x}) \rightarrow (q_0, \vec{q})$

$$f(x) = \int \exp(-iqx) \hat{f}(q) \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q \quad \hat{f}(q) = \int \exp(iqx) f(x) d^4 x$$

- L'onde plane est telle que

$$\phi_p(x) = N \exp(-ip.x)$$

$$\hat{\phi}_p(q) = N(2\pi)^4 \delta^4(p - q)$$

- Une onde "physiquement" acceptable vérifie une équation dynamique (équation de dispersion)

$$p^0 = \omega(\vec{p}) \quad \text{exemple} \quad \omega(\vec{p}) = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

L'équation de Dirac des fermions libres

Les matrices sigma de Pauli :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Les équations de Klein-Gordon et de Dirac s'écrivent :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \text{ avec } \partial^\mu \partial_\mu \equiv \partial_0^2 - \nabla^2 = -\square$$

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi(x) = (i \not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

les matrices gamma de Dirac

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{soit} \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu}$$

$$\beta = \gamma_0 \quad \text{et} \quad \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0^\dagger = \gamma_0 \gamma^\mu$$

- La représentation non-relativiste de Pauli-Dirac (exemple)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} ; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

4

Les ondes planes fermioniques (représentation de Pauli-Dirac)

$$\psi(x) = \psi_p \exp(-ip x) \text{ avec } p^0 = \pm \omega_p \text{ et } \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

- Equation de Dirac

$$(\not{p} - m) \psi_p = \begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -p_0 - m \end{pmatrix} \psi_p = 0 \quad (1)$$

- Quatre solutions d'impulsion $\vec{p}$ avec la normalisation $N = \sqrt{\omega + m} \in \mathbb{R}$:

$$p_0 = + \omega_p > 0 \Rightarrow \psi_p = u^{1,2}(p) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\omega + m} \chi \end{pmatrix}$$

$$p_0 = - \omega_p < 0 \Rightarrow \psi_p = u^{3,4}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\omega + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

χ est libre à 2 composantes d'où les indices (1,2) ou (3,4) pour les solutions $p^0 > 0$ respectivement $p^0 < 0$, c'est l'espace du spin du fermion.

Les courants fermioniques

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x) = (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger(\gamma^0\gamma^i)\psi)$$

- le courant est réel : $j^{\mu*}(x) = j^\mu(x) \in \mathbb{R}$
- ce courant est conservé par exemple pour un fermion libre

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

- la densité volumique $= \psi^\dagger\psi(x)$ (extension des hypothèses quantiques)
- pour une onde plane fermionique

$$j^\mu(x) = \left(\frac{p^\mu}{m}\right) \bar{\psi}\psi(x)$$

La conjugaison de charge et les positons

- Spineurs de positons ? Construction à partir des solutions $p^0 < 0$

$$\psi(x) = u^{3,4}(-p) \exp(-i(-p)x) = v^{1,2}(p) \exp(+ipx)$$

- Equation de Dirac pour les spineurs associés aux positons

$$(\not{p} + m)v(p) = 0$$

- et la conjugaison de charge (électromagnétique) ?*

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \psi_c = 0 \text{ avec } \psi_c = D\psi^*$$

avec D telle que $\gamma^\mu{}^* = -D^{-1}\gamma^\mu D$

représentation de Pauli-Dirac $D = i\gamma^2$

- conjugaison de charge des ondes planes fermioniques

$$\psi_c = D \left(u^1(p) \exp(-ipx) \right)^* = u^4(-p) \exp(ipx) = v^1(p) \exp(ipx)$$

*question de G Laville : invariance relativiste de D ? et γ^5 ? à voir

- Transformation de Lorentz des spineurs

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x) \text{ avec } x' = \Lambda x$$

- Invariance de l'équation de Dirac impose

$$S^{-1}\gamma_\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$$

- On montre avec ϵ antisymétrique (Réf 2 pages 112 :113 exercice 5.12)

au voisinage de l'identité (groupe de Lorentz restreint)

$$S_L = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \quad \text{si} \quad \Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + g_{\rho\nu} \epsilon^{\mu\rho}$$

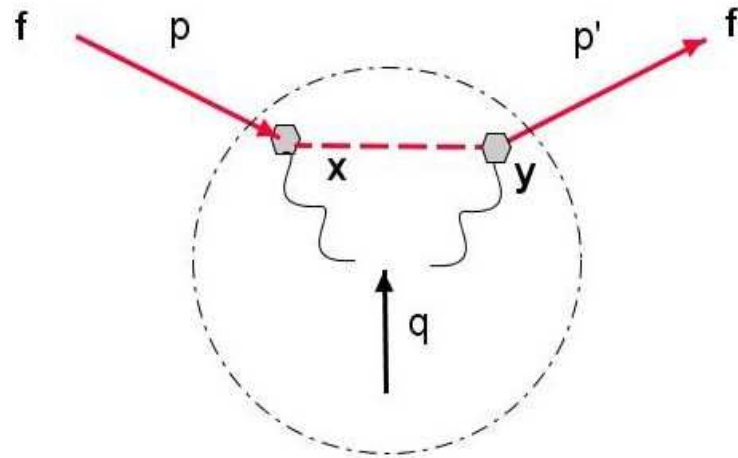
pour la parité $S_P = \gamma^0$

- L'algèbre de Clifford des matrices γ conduit à 16 opérateurs : scalaires , vecteurs, bi-vecteurs pseudo-vecteur pseudo-scalaire qui permettent de construire des interactions.

$$1 \quad \gamma^\mu \quad \sigma^{\mu\nu} \quad \gamma^\mu \gamma^5 \quad \gamma^5$$

Algèbre de Clifford par rapport aux transformations de Lorentz.

Amplitudes fermioniques et calcul des transitions



- L'amplitude réduite pour la transition $f \rightarrow f'$ avec $q = p' - p$:

$$\mathcal{M}_{f,i} = \bar{u}(p') \hat{V}(q) u(p) \quad \text{avec} \quad \hat{V}(q) = \int_{y \equiv 0} \exp(iqx) V(x) d^4x$$

- Exemple

L'interaction électromagnétique pour $e + p \rightarrow e' + p'$ (formule de Rosenbluth*)

$$\hat{V}(q) = (e\gamma^\mu) \frac{\hat{J}_\mu(q)}{-q^2}$$

* <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana> 2013

- Probabilité de la transition [†]

$$\mathcal{M}_{f,i}^* \mathcal{M}_{f,i} = \text{Tr} \left(u(p') \bar{u}(p') \hat{V}(q) u(p) \bar{u}(p) (\gamma^0)^{-1} \hat{V}^\dagger(q) (\gamma^0)^\dagger \right)$$

- Si l'on n'observe pas les spins, il faut sommer les probabilités sur les états finals et faire la moyenne sur les états initiaux équiprobables

$$\sum_{spins} u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m \quad \text{idem avec } p'$$

- Application à l'électrodynamique au 1er ordre

$$\mathcal{M}_{f,i}^* \mathcal{M}_{f,i} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\not{p}' - m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 \right) \hat{J}_\mu(q) \hat{J}_\nu^*(q) \left| \frac{e}{-q^2} \right|^2$$

- Calcul de trace, on démontre

$$\text{Tr } 1 = 4$$

$$\text{Tr } \text{nombre impaire de } \gamma = 0$$

$$\text{Tr } \not{a} \not{b} = 4(a.b)$$

$$\text{Tr } \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = 4((a.b)(c.d) - (a.c)(b.d) + (a.d)(b.c))$$

$$\text{Tr } \gamma^5 = 0$$

- ainsi

$$\text{Tr} \left((\not{p}' - m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 \right) = 4(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - ((p.p') - m^2) g^{\mu\nu})$$

$$^\dagger \text{Remarque : } A_{ij} A_{i,j}^* = \text{Tr } A A^\dagger$$

De l'équation de Dirac à l' équation de Pauli (la limite NR)

L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants * :

$$\{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m \} \psi(x) = 0$$

Conséquence : on multiplie à gauche par $(\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) + m)$

$$(i \not{\partial} - e \not{A} + m)(i \not{\partial} - e \not{A} - m)\psi(x) = 0$$
$$\left((i\partial - eA)^2 - m^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi(x) = 0$$

où l'on voit que

- le spin n'interagit qu'avec le champ $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}} \sim F_{\mu\nu}$
- le mouvement dépend encore du potentiel A (expérience de Böhm Aharonov ...)

Vers **l'équation stationnaire** de Schrödinger : avec $i\partial_0 = E \sim m$ et $p_j = i\partial_j$

$$\left((E - eV - m)(E - eV + m) - (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi_E(\vec{x}) = 0$$

*avec $e = - |e|$ et $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$

A la limite N.R. ($E - m \sim eV \ll m$) , on trouve l'équation de Pauli.

$$\left((E - eV - m)(2m) - (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi_E(\vec{x}) = 0$$

$$E \psi_E(\vec{x}) = \left(m + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eV + \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi_E(\vec{x})$$

Considérons le couplage du spin au champ magnétique : si $(ijk) = +$

$$F_{ij} = -F_{ji} = -B^k \quad \sigma^{ij} = \Sigma^k \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2\vec{\Sigma} \cdot \vec{B}$$

Σ^k est le générateur des rotations du spin ($\in$ transformations de Lorentz) .

Dans la représentation NR $\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$

Conclusion

Enfinement on retrouve l'équation de Pauli qui semble assez confuse si on la compare à l'équation initiale . Cette équation est à la base de la physique atomique... [†]

$$E \psi_E(\vec{x}) = \left(m + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eV - \frac{e}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} \right) \psi_E(\vec{x})$$

[†] En champ magnétique uniforme à l'échelle atomique $\vec{A} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \wedge \vec{B}) \rightarrow$ interaction orbitale $-\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$

Appendice 1 Propriétés des matrices de Dirac

Propriétés indépendantes de la représentation

- $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$ relation fondamentale liée au groupe de Lorentz.
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \times 1$
- $\text{Tr } 1 = 4$
- $\text{Tr } \gamma^\mu = 0$:
en utilisant la relation fondamentale qui conduit à $4\gamma^\mu + \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = 2\gamma^\mu$ par contraction .
- $(\gamma^5)^2 = 1$ $i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^5 = 1$ $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ $\gamma^5 = -\gamma_5$: définition de γ^5
- $\text{Tr } \gamma^5 = 0$: définition de γ^5 et anticommutation des γ^μ
- Tr nbre impair de matrices $\gamma = 0$:
Lemme : Tr (nbre impair de matrices γ) $\gamma^5 = 0$ anticommutation de γ^5
Les propriétés ci-dessus permettent de transformer un produit d'un nombre impair de matrices γ en un produit d'un autre impair de γ multiplié par γ^5

$$(\gamma\gamma\ldots\gamma) = i(\gamma\gamma\ldots\gamma)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5$$

- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$
- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots = 4 (\sum_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \pm g^{\mu'\nu'} g^{\rho'\sigma'} \dots)$ nombre de termes $= \frac{2k!}{k!2^k}$
exemple pour $2k = 4$ il y a 3 termes et pour $2k = 6$ il y a 15 termes

références

- 1 G. Laville & Cl. Longuemare, <http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana>, - , 2008.
- 2 F. Halzen & al., *Quarks and leptons* , John Wiley Inc., 1984.
- 3 L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge UP., 1985.
- 4 S.J. Chang, *Introduction to Quantum Field Theory*, World Scientific Inc., 1990.