

Université de Caen

LMNO

La formule de Rosenbluth (1950)

C. LONGUEMARE

2 et 9 avril 2013

Marshall Rosenbluth

*During his first post-doctoral position at Stanford University (1949 - 1950), he derived the Rosenbluth formula, which was the basis of the analysis used by Robert Hofstadter in his **Nobel prize-winning experimental investigation of electron scattering.***

*Hofstadter refers to this in his 1961 Nobel Lecture : "This behavior can be understood in terms of the theoretical scattering law developed by M. Rosenbluth in 1950".**

*The Nobel Prize in Physics 1961 was divided equally between Robert Hofstadter **for his pioneering studies of electron scattering in atomic nuclei and for his thereby achieved discoveries concerning the structure of the nucleons** and Rudolf Ludwig Mössbauer.*

* http://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_Rosenbluth

Plan

- Sections efficaces et sections électromagnétiques
- La structure du noyau atomique, section de Rutherford (1907)
- Les corrections relativistes, section de Mott
- Le spin de l'électron et le spin du proton
- L'interaction électromagnétique quantique
- La diffusion des électrons sur les protons, section de Rosenbluth

Conventions

- Les indices d'espace-temps sont $\mu = 0, 1, 2, 3$; la métrique g est telle que $g_{\mu\nu} = 1, -1, -1, -1$.
- Les unités sont telles que $\hbar = 1$ et $c = 1$. De plus, en l'électromagnétisme, on choisira :

$$\epsilon_0 = 1 = \mu_0 \quad e^2 = 4\pi\alpha \quad \alpha^{-1} = 137,0..$$

- La charge électronique sera négative et notée $e = -|e|$
- L'impulsion d'une particule libre est notée $\vec{p}$ éventuellement p_μ ;
 $p.x = p_0x_0 - p_ix_i = p_\mu x^\mu$
- L'énergie positive d'une particule est $\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$; l'énergie de l'état relativiste d'une particule est $E = p_0 = \pm\omega_p$
- La normalisation (relativiste) des états est choisie telle que la densité volumique soit :

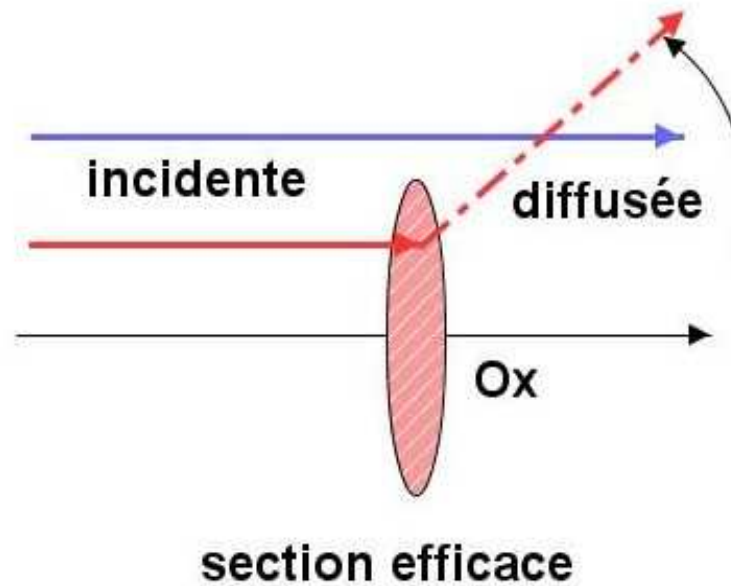
$$\phi_p^\dagger(x)\phi_p(x) = 2\omega_p$$

- Les transformations de Fourier de l'espace-temps physique $x = (x_0, \vec{x})$

$$f(x) = \int \exp(-iqx) f(q) \frac{1}{2\pi} dq \quad \hat{f}(q) = \int \exp(iqx) f(x) dx$$

L'onde plane est telle que $\phi_p(x) \sim \exp(-ip.x)$ et $\hat{\phi}_p(q) \sim 2\pi\delta(p - q)$

Section efficace



La section efficace totale (partielle) :

$$N_{dif} = \mathcal{F} \sigma(a + b \rightarrow f)$$

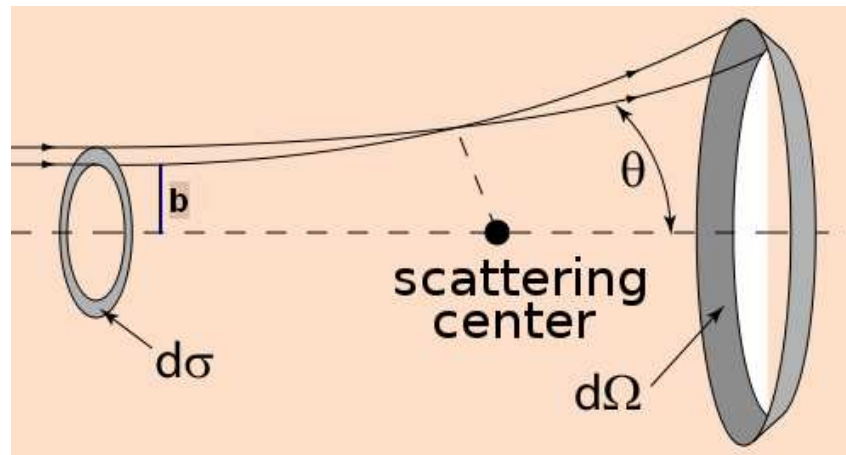
Dans un milieu de densité de cibles ρ

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0) \exp(-\rho \sigma x) \quad \text{ou} \quad d\mathcal{F}(x) = -\mathcal{F}(x) \rho \sigma dx$$

Rappelons la formule de Rutherford (classique) :

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \frac{2bE_0}{\kappa} \quad \text{avec } \kappa = z_1 z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = z_1 z_2 \alpha \hbar c \quad (1)$$

où b est la paramètre d'impact et θ l'angle de diffusion



La section efficace différentielle classique : $d\sigma = 2\pi b db = \pi db^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(z_1 z_2 \frac{\hbar c}{4E_0} \frac{\alpha}{\sin^2(\theta/2)} \right)^2 \quad \text{avec } E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Démonstration en physique newtonienne classique

Remarque : La démonstration la plus "physique" de cette formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{p}} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) dt \quad \text{avec } \vec{f}(t) = \frac{\kappa}{r^2} \vec{u}$$

$$\text{la loi des aires :} \quad dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad \text{avec } L = -mv_0 b$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_i^f \left(\frac{mr^2}{L} \right) \vec{f}(t) d\theta = \frac{\kappa}{v_0 b} \int_i^f \vec{u} d\theta$$

$$\Delta \vec{p} = m v_0 (\cos(\theta_0) + 1, \sin(\theta_0))$$

$$\text{et avec } \vec{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

On en déduit sans difficulté la formule 1 ci-dessus à partir de

$$mv_0 (\cos(\theta_0) + 1) = \frac{\kappa}{v_0 b} \sin(\theta_0)$$

Démonstration en mécanique quantique (équation de Schrödinger)

Soit à calculer la section efficace de diffusion d'un alpha (z_1) sur une charge (z_2) ponctuelle fixée à l'origine du référentiel du laboratoire.

Les étapes de la démonstration

- L'équation de Schrödinger de l'électron sans spin en présence de la charge Z à l'origine.

$$i\partial_0\psi(x) = [H_0 + H_{int}(x)]\psi(x)$$

avec pour l'interaction :

$$H_{int}(x) = z_1 |e| A_0(\vec{x}) = (z_1 z_2) \left(\frac{\alpha \hbar c}{r} \right) \quad \text{avec } r < R_{at}$$

- Recherche la solution stationnaire qui correspond aux contraintes physiques

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_d(x) \quad i\partial_0\psi(x) = \omega\psi(x) \quad \psi(x) = \exp(-i\omega t) \psi(\vec{x})$$

- L'équation de Schrodinger devient :

$$(E - H_0) \psi(\vec{x}) = (E - H_0) \psi_d(\vec{x}) = H_{int}(\vec{x})\psi(\vec{x}) \quad (2)$$

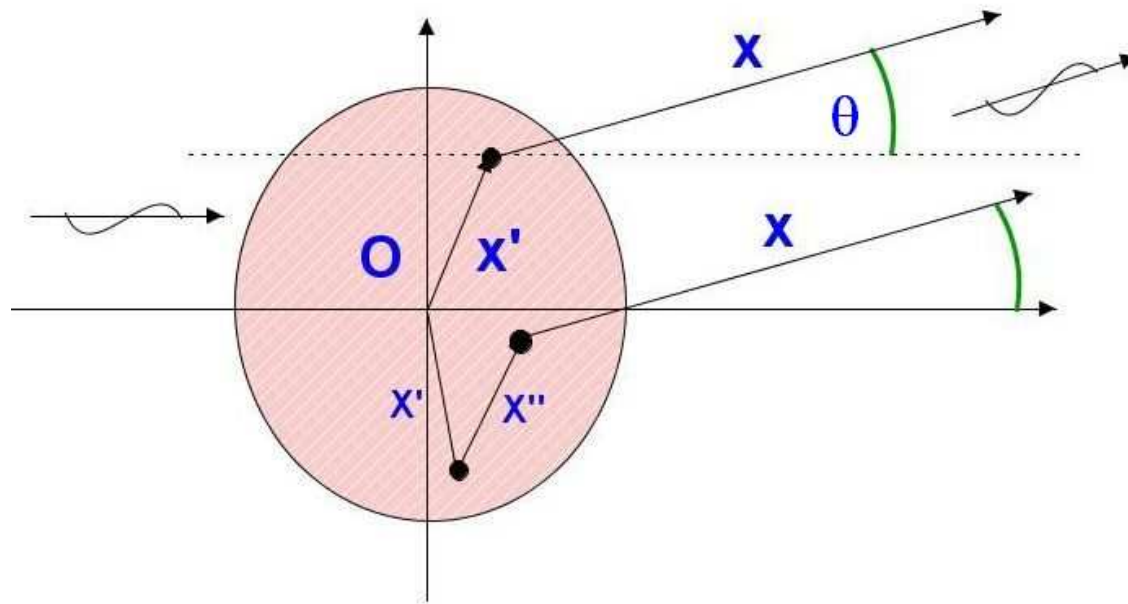


figure : 1er ordre et deuxième ordre

- au premier ordre (approximation perturbative) avec $E = \frac{p^2}{2m}$

$$(E - H_0) \psi_d(\vec{x}) = H_{int}(\vec{x}) \psi_0(\vec{x})$$
- asymptotiquement pour $r \rightarrow \infty$ $\psi(\vec{x}) \propto \exp(ip x) + f(\theta) \frac{\exp(ip r)}{r}$
 $f(\theta)$ est l'amplitude de diffusion quantique.

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (3)$$

Calcul de l'amplitude $f(\theta)$ à l'approximation de Born (réf 1 page 590)

- Fonctions de Green $G(\vec{x})$ solutions de

$$(E - H_0) G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \Rightarrow G(\vec{x}), G^+(\vec{x}) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \left(\frac{\exp(\pm i p r)}{r}\right)$$

$$G^+(\vec{x}) = G(\vec{x})^* \sim \left(\frac{\exp(-i p r)}{r}\right)$$

- L'onde diffusée

$$\psi_d(\vec{x}) = \int G(\vec{x} - \vec{x}') H_{int}(\vec{x}') \psi_0(\vec{x}') d^3 x'$$

- l'amplitude à l'infini pour $\vec{x} = r \vec{n} \rightarrow \infty$ et avec $\vec{p}' = p \vec{n}$

$$G(\vec{x} - \vec{x}') \sim \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \exp i(p r - \vec{p}' \cdot \vec{x}')$$

$$\psi(\vec{x}) \sim \exp(ipx) + f(\theta) \frac{\exp(i p r)}{r}$$

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \int \exp(-i \vec{q} \cdot \vec{x}') H_{int}(\vec{x}') d^3 x' \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$$

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \hat{H}_{int}(\vec{q}) \quad (4)$$

Application au potentiel coulombien Cacul de la section efficace (réf 1 page 646)

- l'interaction dans le système d'unités $\hbar = c = 1$

$$H_{int}(\vec{x}) = z_1 z_2 \frac{\alpha}{r}$$

- l'amplitude est

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) (z_1 z_2) \frac{4\pi\alpha}{\vec{q}^2}$$

si la charge est distribuée

$$f(\theta) \rightarrow f(\theta) \times F(\vec{q}) \quad \text{facteur de forme}^*$$

- Le transfert d'impulsion $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$

$$\vec{q}^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 2p^2 (1 - \cos\theta) = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$$

- la section efficace

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| -\frac{2m\alpha(z_1 z_2)}{\vec{q}^2} \right|^2 |F(\vec{q})|^2 = \left(\frac{\alpha(z_1 z_2)}{4E_0 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 |F(\vec{q})|^2$$

La section efficace a la dimension de E^{-2} ce qui est correct dans le système d'unité employé ici, $\hbar c E^{-1}$ est une longueur qui décroît avec l'énergie .

* si $\rho(\vec{x})$ est la distribution spatiale de la charge électrique $F(\vec{q}) = \hat{\rho}(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) \exp(i \vec{q} \cdot \vec{x}) d^3x$ avec $F(\vec{0}) = 1$

- Retour aux unités macroscopiques pour faire une application numérique dans le cas de l'expérience de Rutherford

$$H_e + Au \rightarrow H_e + Au \text{ à environ } E_0 \sim 10 \text{ MeV}$$

$$\hbar c = 197,10^{-13} \text{ MeV.cm} \quad \alpha = 1/137,0$$

$$z_1 z_2 = 2 \times 79 \quad m = 3,727 \text{ MeV}/c^2$$

$$d\sigma = \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} d\Omega \times 0,32 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \sim \text{barn}$$

- La section efficace de Rutherford diverge à $\theta = 0$; ceci est dû à la portée infinie du potentiel coulombien. En réalité, le potentiel du noyau atomique est écranté par les électrons de l'atome à une distance R_{at} de l'ordre de l'Angström; donc, pour des valeurs de $|\vec{q}|$ inférieures à $\hbar R_{at}^{-1}$, la diffusion ne se produit plus, en conséquence :

$$|\vec{q}| = 2p \sin(\theta/2) > \frac{\hbar}{R_{at}} \sim 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}/c \text{ avec } R_{at} \sim 10^{-10} \text{ m}$$

Remarque Le paramètre "naturel" d'intégration de la section efficace est le transfert d'impulsion $|\vec{q}|$ qui varie sur l'intervalle $[\frac{\hbar}{R_{at}}, 2p]$

- Quand l'énergie est assez grande et pour les plus grandes valeurs de $|\vec{q}| \sim \frac{\hbar}{R_N} \sim 200 \text{ MeV}/c$, la structure nucléaire "apparaît" : la diffusion Rutherford est dite anormale à cause de l'interaction nucléaire forte !

L'amplitude de Born par les principes de la MQ (cas à 3D)

- L'équation 2 de l'onde diffusée avec $E = \frac{p^2}{2m}$

$$(E - H_0) \psi_d(\vec{x}) = H_{int}(\vec{x}) \psi_0(\vec{x}) \quad (5)$$

- Fonctions de Green $G(\vec{x})$ solution de

$$(E - H_0) G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \Rightarrow G(\vec{x}) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \exp(+ipr)$$

- **L'onde diffusée** au premier ordre (approx de Born)

$$\psi_d(\vec{x}) = \int G(\vec{x} - \vec{x}') H_{int}(\vec{x}') \psi_0(\vec{x}') d^3x'$$

- **L'amplitude quantique** au premier ordre de $\psi'_0(\vec{x})$ dans $\psi_d(\vec{x})$ avec *

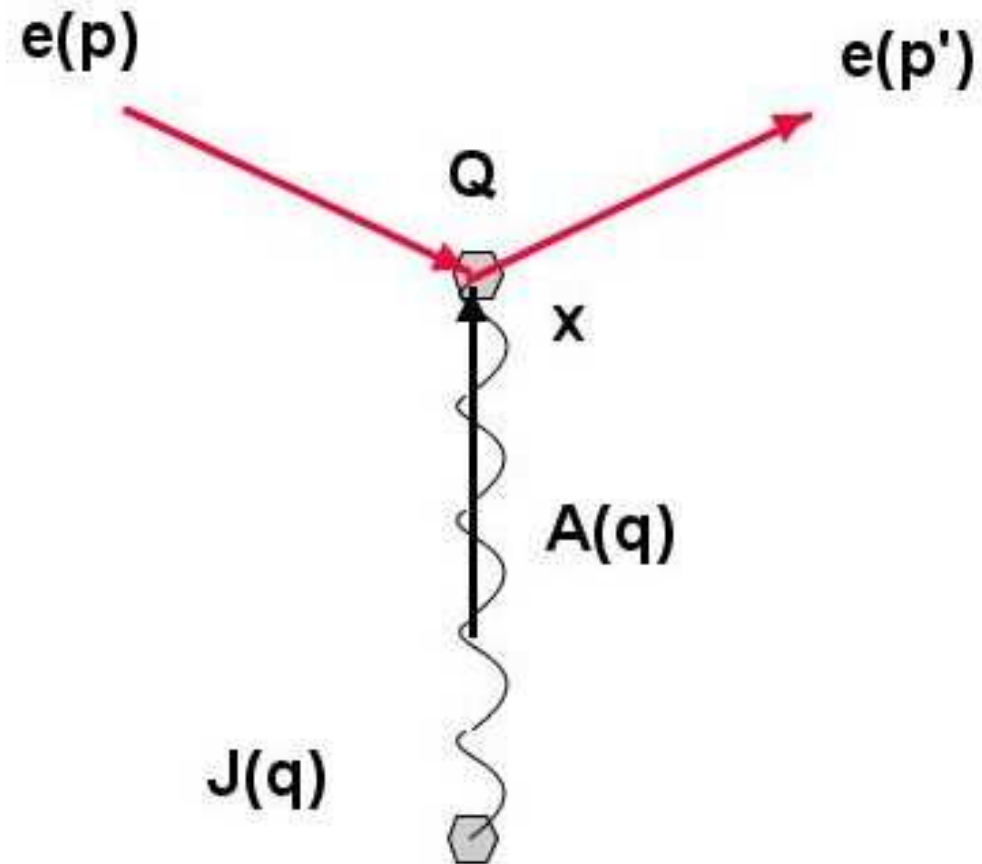
$$A(\vec{q}) = \int \psi'_0(\vec{x})^+ \psi_d(\vec{x}) d^3x = \int \psi'_0(\vec{x})^+ G(\vec{x} - \vec{x}') H_{int}(\vec{x}') \psi_0(\vec{x}') d^3x' d^3x$$

$$A(\vec{q}) = \int \psi'_0(\vec{x}')^+ H_{int}(\vec{x}') \psi_0(\vec{x}') d^3x' = \hat{H}_{int}(\vec{q})^\dagger \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$$

* $\psi'_0(\vec{x}) \sim \exp(i\vec{p}' \cdot \vec{x})$ et $\psi_0(\vec{x}) \sim \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$

† attention ! onde convergente $\int \psi'_0(\vec{x})^+ G(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = \psi'_0(\vec{x}')^+$
 car $\int G^+(\vec{x} - \vec{x}') \psi_0(\vec{x}) d^3x = \psi_0(\vec{x}')$

L'électron relativiste dans un champ électrostatique



Démonstration en physique "relativiste" (équation de Dirac)

Soit à calculer la section efficace de diffusion d'un électron de spin 1/2 sur une charge $Z | e |$ ponctuelle située à l'origine du référentiel du laboratoire.

Les étapes de la démonstration

- Le lagrangien libre de l'électron

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)((p.\gamma) - m)\psi(x)$$

- L'équation libre de Dirac

$$((p.\gamma) - m)\psi(x) = 0$$

- L'interaction de l'électron avec un champ extérieur A_μ (principe d'interaction minimale)

$$((p.\gamma) - e(A.\gamma) - m)\psi(x) = 0$$

- La forme hamiltonienne de cette équation

$$i\partial_0\psi(x) = [-i\partial_j\gamma^0\gamma^j + e\gamma^0(A.\gamma) + \gamma^0m]\psi(x)$$

donc pour l'interaction :

$$H_{int}(x) = e A_\mu(x) \gamma^0 \gamma^\mu = e A_0(\vec{x}) \quad (6)$$

- L'amplitude de transition au premier ordre

$$\begin{aligned} A_{f,i} &= -i \int \psi'^+(x) (H_{int}(x)) \psi(x) d^4x \\ &= -i \int \exp(i(p' - p)x) A_\mu(x) d^4x \times u(p')^+ (e \gamma^0 \gamma^\mu) u(p) \\ &= -i \hat{A}_0(q) \times \bar{u}(p') (e \gamma^0) u(p) \end{aligned}$$

avec

$$q = p' - p \quad \text{et} \quad \hat{A}_0(q) = \int \exp(iqx) A_0(x) d^4x$$

- Dans le cas d'une charge Q électrique ponctuelle statique

$$A_0(x) = \frac{Q}{4\pi |\vec{x}|} \quad \vec{A}(x) = \vec{0}$$

Les équations conduisent à

$$\hat{A}_0(q) = 2\pi \delta(q^0) \frac{Q}{\vec{q}^2} \quad \text{avec} \quad |\vec{q}|^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$$

- L'amplitude de transition A_{fi}

$$\begin{aligned} A_{f,i} &= -i\hat{A}_0(q) \times \bar{u}(p')^\dagger (e \gamma^0) u(p) \\ &= -i 2\pi\delta(q^0) \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \end{aligned}$$

Dans ce cas l'amplitude de transition (réduite) est :

$$\mathcal{M}_{f,i} = \frac{Qe}{\vec{q}^2} \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

- Finalement, en prenant correctement en compte les normalisations , on calcule la section efficace quantique au premier ordre coulombien en sommant le spin final et en moyennant sur le spin initial si l'électron incident est non-polarisé :

$$\sigma = \mathcal{F}^{-1} \int 2\pi\delta(q^0) \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\omega'} \quad (7)$$

avec $\mathcal{F} = 2\omega v = 2p$.

- L'intégration sur d^3p' est simple à cause de la conservation de l'énergie ($q^0 = 0$)

$$d\sigma = \mathcal{F}^{-1} 2\pi \frac{1}{2} \sum_{spin} | \mathcal{M}_{f,i} |^2 \frac{p \omega}{(2\pi)^3 2\omega} d\Omega'$$

$$d\sigma = \frac{1}{2 (4\pi)^2} \left(\frac{Q_e}{\vec{q}^2} \right)^2 \sum_{spin} | \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) |^2 d\Omega'$$

- Enfin la somme sur les spins : Nous utilisons une formule connue des ondes planes de spineurs :

$$\sum_{spin} (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p))^* (\bar{u}(p') \gamma^\nu u(p)) = \text{trace}[u(p') \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu]$$

$$= 4(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - ((p' \cdot p) - m^2) g^{\mu\nu})$$

$$\sum_{spin} | \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) |^2 = 4[\omega^2 + p^2 \cos(\theta) + m^2] = 8\omega^2 (1 - v^2 \sin^2(\theta/2))$$

- Enfin on obtient la section différentielle de Mott (réf 2 page 173)
en remplaçant $Q_e = -Ze^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha \omega}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 (1 - v^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (8)$$

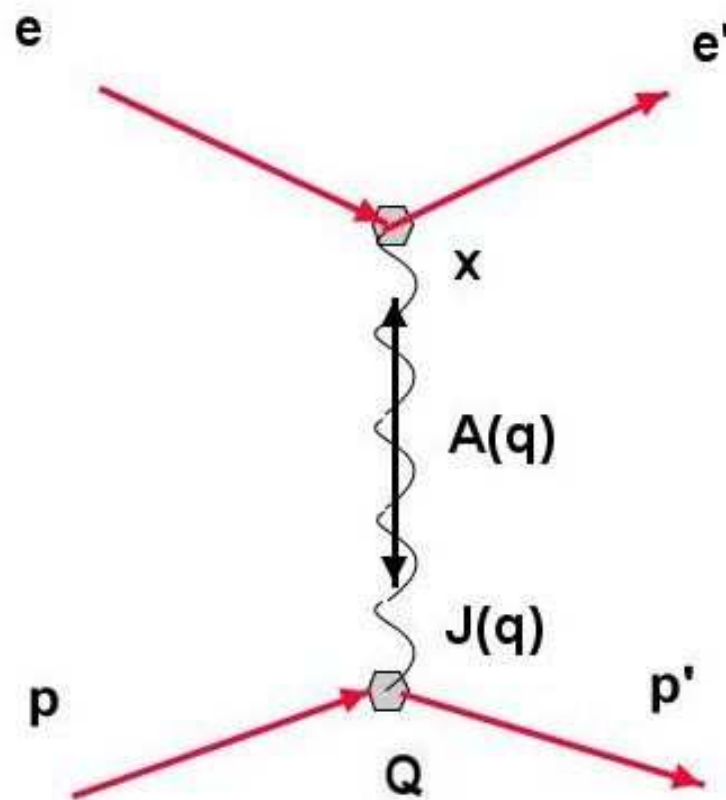
A la limite non-relativiste on retrouve la section de Rutherford $\omega \sim m$ et $v \sim 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

A la limite ultra-relativiste $m \sim 0$, $v \sim 1$ et $\omega \sim p$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2\omega} \right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}$$

Diffusion électromagnétique d'un électron sur un proton



$$e^- + p \rightarrow e'^- + p'$$
$$p'_e - p_e = p - p' = q$$

L'interaction d'un électron avec un proton

Les étapes de la démonstration

- Le lagrangien libre de l'électron

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}_e(x)((p.\gamma) - m)\psi_e(x)$$

- L'équation libre de l'électron

$$((p.\gamma) - m)\psi_e(x) = 0$$

- L'interaction de l'électron avec un champ extérieur A_μ (principe d'interaction minimale)

$$((p.\gamma) - e(A.\gamma) - m)\psi_e(x) = 0$$

- La forme hamiltonienne de cette équation

$$i\partial_0\psi_e(x) = [-i\partial_j\gamma^0\gamma^j + e\gamma^0(A.\gamma) + \gamma^0m]\psi_e(x)$$

donc pour l'interaction :

$$H_{int}(x) = e A_\mu(x)\gamma^0\gamma^\mu \quad (9)$$

- L'amplitude de transition au premier ordre (figure ci-dessus)

$$\begin{aligned}
 A_{f,i} &= -i \int \psi_e'^{\dagger}(x) (H_{int}(x)) \psi_e(x) d^4x \\
 &= -i u(e')^{\dagger} (e \gamma^0 \gamma^{\mu}) u(e) \int \exp(i(p_e' - p_e)x) A_{\mu}(x) d^4x \\
 &= -i \bar{u}(e') (e \gamma^{\mu}) u(e) \hat{A}_{\mu}(q) \quad \text{avec}
 \end{aligned}$$

$$q = p_e' - p_e \quad \text{et} \quad \hat{A}_{\mu}(q) = \int \exp(iqx) A_{\mu}(x) d^4x$$

- Le champ de photons virtuels rayonnés par la source $J(x)$ (relations de Maxwell)

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu}(x) = J_{\nu}(x) \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

par transformation de Fourier , on obtient l'équation suivante sur le champ $A_{\mu}(q)$

$$(-iq)^2 A_{\nu} - (-iq)_{\nu} (-iq)^{\mu} \hat{A}_{\mu}(q) = \hat{J}_{\nu}(q)$$

Equation que l'on peut écrire formellement

$$\hat{A}^{\mu}(q) = [-q^2 g_{\nu}^{\mu} + q_{\nu} q^{\mu}]^{-1} \hat{J}_{\nu}(q)$$

$$\text{si condition de Lorentz} \quad \hat{A}^{\mu}(q) = [-q^2]^{-1} g^{\mu\nu} \hat{J}_{\nu}(q)$$

- L'amplitude de transition devient pour $q = p'_e - p_e = p - p'$

$$A_{f,i} = -i \bar{u}(e')(e\gamma^\mu)u(e) \frac{g_{\mu\nu}}{-q^2} \hat{J}^\nu(q)$$

- Le courant électromagnétique du proton ? Le proton est un fermion de spin 1/2, il peut être décrit par un spineur de Dirac ; son quadri-vecteur courant est de la forme :

$$\hat{J}_\mu(q) = +ie \bar{u}'(p)(\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M} q_\nu F_2(q^2))u(p) \quad (10)$$

Ce courant est conservé : $q_\mu J^\mu(q) = 0$ et satisfait aux symétries : parité et renversement du temps.

- Dans le laboratoire, la section efficace est donnée par la formule de Rosenbluth .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\omega \sin^2(\theta/2)}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) (k_1(q^2) \cos^2(\theta/2) - k_2(q^2) \sin^2(\theta/2)) \quad (11)$$

avec un électron ultrarelativiste (sans masse)

$$q^2 = (p - p')^2 = (p'_e - p_e)^2 = -4\omega\omega' \sin^2(\theta/2) = -2M(\omega - \omega')$$

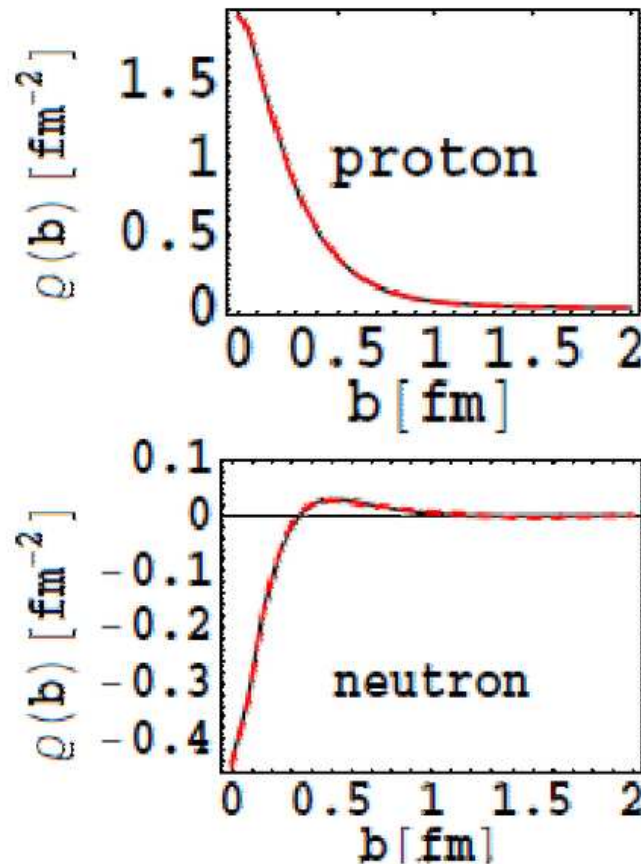
$$k_1 = F_1^2 + \frac{q^2}{4M^2} F_2^2$$

$$k_2 = \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2$$

$k_1(q^2)$ et $k_2(q^2)$ contiennent les informations sur la structure électromagnétique de la cible .

- Le proton (neutron) n'est pas ponctuel (une particule de Dirac) :

	Dirac p	Exp	Dirac n	Exp
$F_1(0)$	1	1	0	0
$F_2(0)$	0	1,7928	0	-1,9130

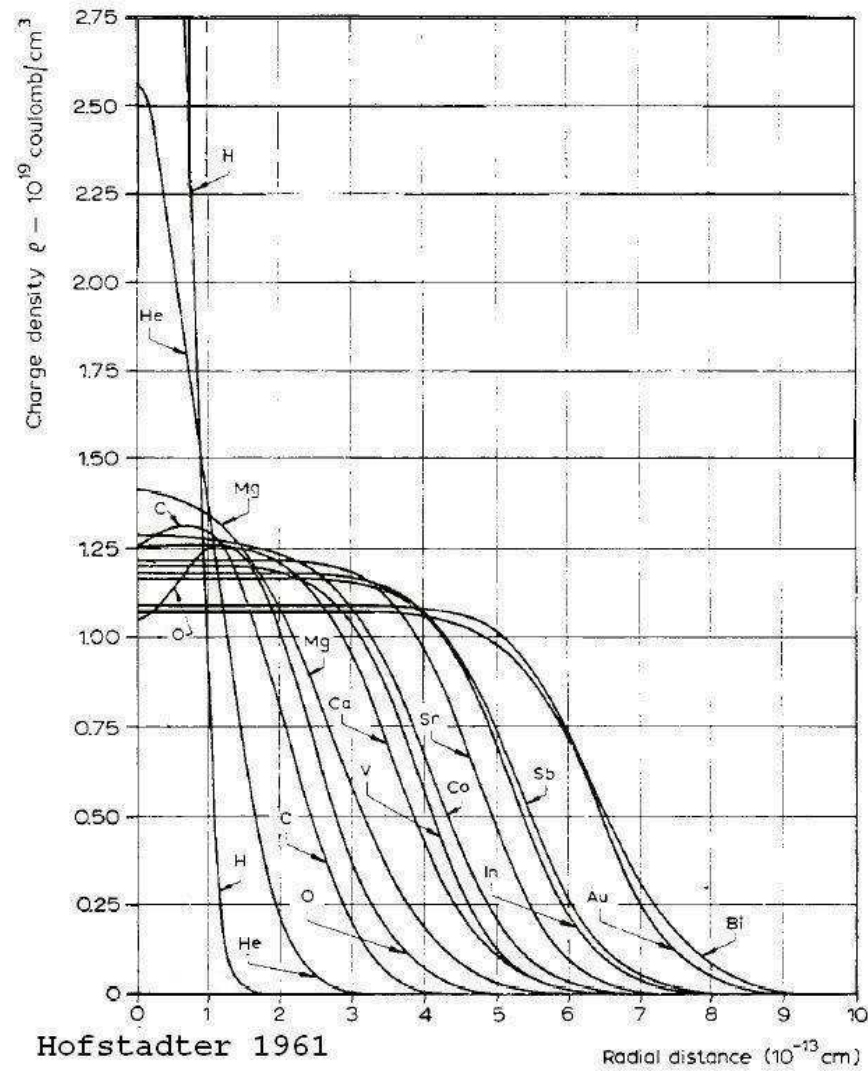


The proton and neutron transverse charge distributions

$$fm = 10^{-13} cm = fermi = femtometer = 10^{-15} m$$

Conclusions

- La formule de Rosenbluth a joué un rôle fondamental dans l'analyse de la diffusion des électrons sur les protons et les noyaux $E_e \sim 1 \text{ GeV}$ (1950-60)
- Elle a conduit à une extension qui a permis l'analyse des interactions inélastiques des électrons (connue sous le nom de "deep inelastic scattering") et ainsi à la mise en évidence des quarks constituant les nucléons (protons ou neutron) $E_e \sim 10 \text{ GeV}$ (1960-70)
- Sur le modèle de Rosenbluth , on a pu construire l'analyse de la diffusion des neutrinos sur les nucléons (1965-1975) pour les processus quasi-élastiques et inélastiques : ceci a permis de "voir" les quarks avec leur charge faible.



Distribution spatiale de la charge électrique des noyaux de l'hydrogène (H) au Bismuth (Bi) d'après Hofstadter (les distances en $fm = 10^{-13} \text{ cm}$)

- **L'amplitude**

$$a + b \rightarrow f$$

- l'amplitude de transtion

$$\langle f | \mathcal{S} | i \rangle = A_{fi}$$

soit

$$A_{f,i} = \delta_{f,i} - i T_{f,i}$$

- Si $i \neq f$ l'invariance par translation d'espace-temps impose

$$T_{f,i} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \mathcal{M}_{f,i}$$

$\mathcal{M}_{f,i}$ est l'amplitude de transition réduite.

- le nombre de transitions observées (dans les conditions de normalisation) est

$$N_{f,i} = |T_{f,i}|^2$$

– les sections efficaces

$$a + b \rightarrow f$$

- le flux total des particules incidentes est

$$\mathcal{F}_a = T (2\omega_a v_a)$$

- le nombre de cibles fixes est

$$N_b = V (2\omega_b)$$

- le nombre de transitions observées est

$$N_{f,i} = |T_{f,i}|^2 = \sigma_{fi} \mathcal{F}_a N_b$$

Dans le cadre des conventions , la section efficace et l'amplitude quantique sont liées par l'équation suivante :

$$\sigma_{\text{totale}} = \mathcal{F}^{-1} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \times |\mathcal{M}_{f,i}|^2 \quad (12)$$

avec $\mathcal{F} = (2\omega_a v_a)(2\omega_b)$ avec $\omega_b = m_b$

références

- 1 Landau & Lifchitz , *Mécanique quantique vol 3*, re-Ed MIR 1988
- 2 F. Halzen & al., *Quarks and leptons* , John Wiley Inc., 1984.
- 3 L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge UP., 1985.