

L'équation de Dirac et l'algèbre $R_{1,3}$

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

17 juin 2008

Version 19/06/2008

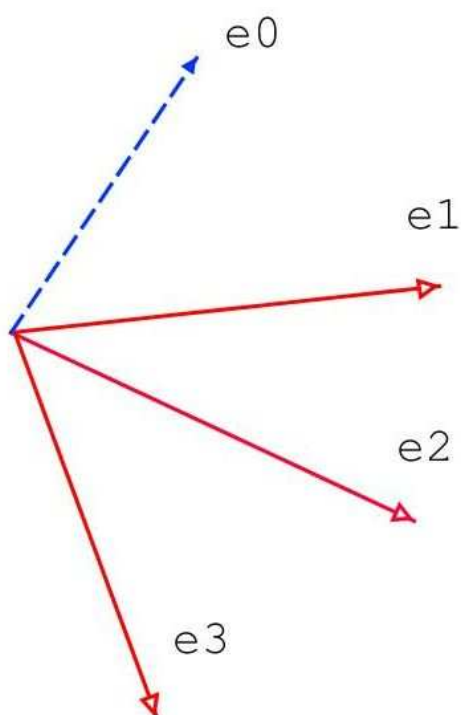


Figure 1: L'espace de Minkovski

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu les 17 juin 2008 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville. Le séminaire présente et commente un article de P. Renaud intitulé : "Derivation of the Dirac equation" et proposé pour publication à "Foundations of Physics" (Gerard 't Hooft éditeur).

*UNIVERSITE DE CAEN année 2007-2008

SOMMAIRE

1	Rappels et notations	4
1.1	Les notations tensorielles	4
1.2	Propriétés de l'algèbre $R_{1,3}$	5
1.3	Quelques relations et remarques	6
1.4	Propriétés du pseudoscalaire e	6
1.5	Les sous-espaces de quaternions	8
1.5.1	L'espace $\mathcal{H}$ des quaternions	8
1.5.2	Les sous-espaces de quaternions dans $R_{1,3}$	8
1.5.3	L'opérateur de Dirac dans $R_{1,3}$	8
2	L'article de P. RENAUD	10
2.1	Les principes et objectifs	10
2.2	Les choix	10
2.3	Le spin 1/2 au repos	11
2.4	Les anti-particules	12
2.5	La conservation de la probabilité	12
3	Conclusion	12

List of Figures

1	L'espace de Minkovski	1
2	L'espace physique $R^{1,3}$	4

1 Rappels et notations

1.1 Les notations tensorielles

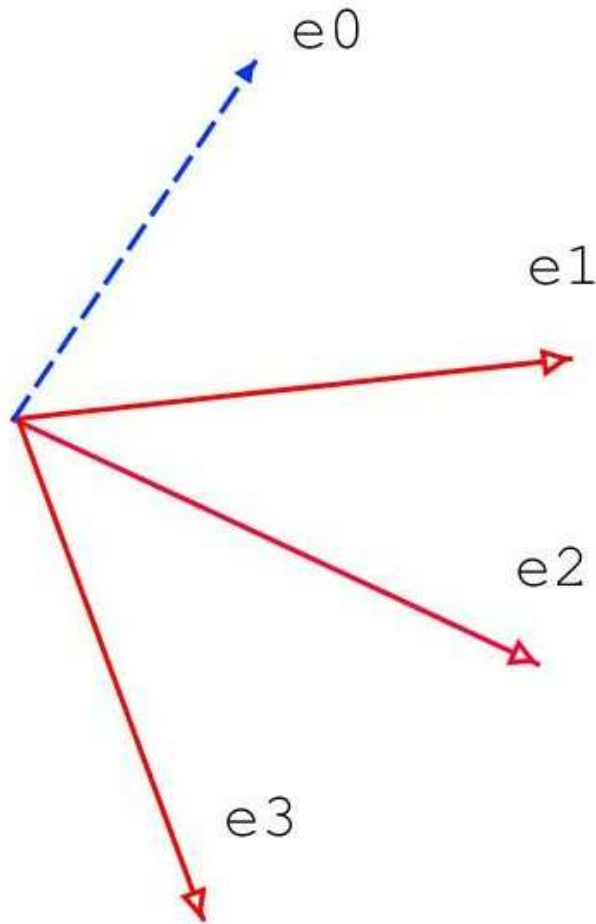


Figure 2: L'espace physique $R^{1,3}$

- Les indices en lettres grecques (μ) seront prises pour 0,1..3 et en lettres latines (i) seront pour 1,..3.

$$x^0 = c t$$

- la mètrique de l'espace sera notée $g_{\mu\nu}$ et sera telle que

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) = \Phi(e_\mu, e_\nu)$$

où Φ est la forme quadratique invariante. On utilisera également pour simplifier l'écriture

$$g_{\mu\mu} = \mathbf{g}_\mu = Q(e_\mu) = \Phi(e_\mu, e_\mu)$$

- Les composantes contravariantes (covariantes) des vecteurs de l'espace seront notées

$$A^\mu \quad \text{tel que } A = A^\mu e_\mu \quad \text{et} \quad A_\mu = \Phi(e_\mu, A) = g_{\mu\nu} A^\nu$$

La transformation de Lorentz de ces quadrivecteurs se fera au moyen des matrices (4,4) de Lorentz notées Λ

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

L'invariance de Lorentz du carré des vecteurs imposera la conservation la métrique de l'espace-temps

$$A^2 = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu = (A^0)^2 - (A^i)^2$$

- L'opérateur gradient admet une forme covariante et une forme contravariante

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

- le quadri-potiel électromagnétique A^μ permet de construire un tenseur électromagnétique antisymétrique qui n'est autre que le champ électromagnétique classique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

avec $A^\mu = (V, c\vec{A})$.

$F_{0,i} = E_i$
$F_{i,j} = \epsilon_{ijk} B_k$

- On peut construire un autre tenseur électromagnétique antisymétrique qui inverse l'électrique et le magnétique

$$\tilde{F}_{\rho,\sigma} = \epsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} F_{\mu,\nu}$$

$\tilde{F}_{0,i} = B_i$
$\tilde{F}_{i,j} = -\epsilon_{ijk} E_k$

avec $\epsilon_{0123} = +1$

$$\epsilon_{i_0 i_1 \dots i_n} = (-1)^p \epsilon_{01 \dots n} : \text{Levi-civita symbol } (p \text{ is the parity of the permutation})$$

1.2 Propriétés de l'algèbre $R_{1,3}$

Définition intrinsèque d'un quadri-vecteur :

$$A = A^\mu e_\mu$$

Propriétés multiplicatives des vecteurs de base

e_{ij}	1	e_0	e_1	e_2	e_3
1	1	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	1	$-e_{10}$	$-e_{20}$	$-e_{30}$
e_1	e_1	e_{10}	-1	e_{12}	e_{13}
e_2	e_2	e_{20}	$-e_{12}$	-1	$-e_{32}$
e_3	e_3	e_{30}	$-e_{13}$	e_{32}	-1

L'algèbre $R_{1,3}$ sur un espace de dimension 4 est de dimension $2^4 = 16$
On notera

$$e = e_{0123}$$

Les éléments de cette algèbre sont notés q elle comprend :

$q =$	1	e_μ	$e_{\mu\nu}$	$e_{\mu\nu\rho}$	$e = e_{0123}$
dimension	1	4	6	4	1
parité totale	1	-1	+1	-1	+1
reversion $\tilde{q}$	1	1	-1	-1	+1
au carré q^2	1	$\mathbf{g}_\mu$	$-\mathbf{g}_\mu \mathbf{g}_\nu$	$-\mathbf{g}_\mu \mathbf{g}_\nu \mathbf{g}_\rho$	-1

Les composantes $e_{\mu\nu}$ $e_{\mu\nu\rho}$ $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ sont antisymétriques par rapport aux indices ! Par rapport à la parité totale, la partie paire de l'algèbre est notée $R_{1,3}^+$, elle est de dimension 8.

$R_{1,3}^+$	1	$e_{\mu\nu}$	e
dimension	1	6	1
reversion $\tilde{q}$	1	-1	+1
au carré q^2	1	$-\mathbf{g}_\mu \mathbf{g}_\nu$	-1

1.3 Quelques relations et remarques

- On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} e_{ijk}^2 &= +1 & e_{0jk}^2 &= -1 \\ e_{ij}^2 &= -1 & e_{0j}^2 &= +1 \end{aligned}$$

- Formules générales de la multiplication par un vecteur de base e_μ :

$$\begin{aligned} e_\mu e_\nu &= g_{\mu\nu} + e_{\mu\nu} \\ e_\mu e_{\nu\rho} &= g_{\mu\nu} e_\rho - g_{\mu\rho} e_\nu + e_{\mu\nu\rho} \\ e_\mu e_{\nu\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} e_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} e_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} e_{\nu\rho} + e_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

1.4 Propriétés du pseudoscalaire e

- e joue le rôle de γ_5 ou de i dans la théorie des spineurs complexes de Dirac

$$e^2 = -1$$

- e anticommute avec les vecteurs de base

$$e_\mu e + e e_\mu = 0$$

- action de la multiplication par e sur les composantes de $R_{1,3}$

$e \times$	1	V	bi-V	tri-V	Pseudo
	e	tri-V	bi-V	V	-1

- Action de la multiplication à droite par e

$\times e$	1					
	e					
$\times e$	e_0	e_1	e_2	e_3		
	$-e_{123}$	$-e_{023}$	e_{013}	$-e_{012}$		
$\times e$	e_{01}	e_{02}	e_{03}	e_{12}	e_{13}	e_{23}
	e_{23}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_{03}$	e_{02}	$-e_{01}$
$\times e$	e_{123}	e_{023}	e_{013}	e_{012}		
	e_0	e_1	$-e_2$	e_3		
$\times e$	e					
	-1					

- Formules générales de la multiplication par e :

$$\begin{aligned} 3! e e_\mu &= \epsilon_\mu^{\nu\rho\sigma} e_{\nu\rho\sigma} \\ 2! e e_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} e_{\rho\sigma} \\ 1! e e_{\mu\nu\rho} &= \epsilon_{\mu\nu\rho}^{\sigma} e_\sigma \end{aligned}$$

- Une remarque importante dans la discussion de P. Renaud :

$$e_{ij} = e_{0k} e = -e_{k0} e \quad \text{si } (ijk) = +1$$

- La reversion $a \rightarrow \tilde{a}$

opération élémentaire : $(e_i \tilde{e}_j) = e_j e_i = -e_i e_j$

Définition générale : $\tilde{e}_{ijk\dots m} = e_{m\dots kji} = (-1)^{n(n-1)/2} e_{ijk\dots m}$

n	$d = 2^n$	$\tilde{e}_{i_1\dots i_n} = e_{i_1\dots i_n} \times$
1	2	+
2	4	-
3	8	-
4	16	+
5	32	+
6	64	-
7	128	-

- L'opération bar (conjugué de) $\psi = \sum a e \rightarrow \bar{\psi} = \sum a^* \tilde{e}$

1.5 Les sous-espaces de quaternions

1.5.1 L'espace $\mathcal{H}$ des quaternions

Ce sont les nombres complexes à 3D dans $R_{0,3}$ avec les vecteurs de base $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. L'algèbre de Clifford dans $R_{0,3}$ est en principe de dimension $2^3 = 8$ mais l'algèbre des quaternions n'est que de dimension 4 car cette algèbre est fermée par la relation

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji} = \epsilon_k \quad \text{si } (ijk) = +1$$

Propriétés multiplicatives des vecteurs de base sont définies ci-dessous

	1	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
1	1	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
ϵ_1	ϵ_1	-1	ϵ_3	$-\epsilon_2$
ϵ_2	ϵ_2	$-\epsilon_3$	-1	ϵ_1
ϵ_3	ϵ_3	ϵ_2	$-\epsilon_1$	-1

1.5.2 Les sous-espaces de quaternions dans $R_{1,3}$

- Le sous-espace engendré par 1 et $e_{ij} = \epsilon_k$ si $(ijk) = +1$ est isomorphe à $\mathcal{H}$ en effet :

$$\begin{aligned} e_{ij}^2 &= -1 \\ e_{ij}e_{jl} &= -e_{il} = e_{li} \end{aligned}$$

- Le sous-espace engendré par (1 et $e_{0k}e$) est isomorphe à $\mathcal{H}$ car :

$$e_{0k}e = e_{ij} = \epsilon_k \quad (ijk) = +1$$

- Le sous-espace engendré par (e et e_{0k}) est associé à $\mathcal{H}e$ (avec $(ijk) = +1$)

$$\begin{aligned} e_{0i}^2 &= +1 \\ e_{0i}e_{0j} &= -e_{ij} = \epsilon_k \\ e_{0k}e &= e_{ij} = \epsilon_k \end{aligned}$$

	e	e_{01}	e_{02}	e_{03}
e	-1	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
e_{01}	ϵ_1	1	$-\epsilon_3$	$+\epsilon_2$
e_{02}	ϵ_2	$+\epsilon_3$	1	$-\epsilon_1$
e_{03}	ϵ_3	$-\epsilon_2$	$+\epsilon_1$	1

1.5.3 L'opérateur de Dirac dans $R_{1,3}$

L'opérateur de Dirac est un invariant dans les transformations de Lorentz, on le note d , cest un vecteur dans l'algèbre de Clifford $R_{1,3}$

$$d = e_\mu \partial^\mu = e_0 \partial_0 - e_i \partial_i$$

Propriétés

- $d^2 = -\square$

$$d^2 = (e_\mu \partial^\mu)(e_\nu \partial^\nu) = (g_{\mu\nu} + e_{\mu\nu}) \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_i^2$$

- Soit un vecteur A de l'algèbre (on pourrait aussi considérer eA un trivecteur).

$$\begin{aligned} dA &= \text{scalaire} + \text{bivecteur} = (e_\mu \partial^\mu) (e_\nu A^\nu) \\ \text{le scalaire est } L &= g_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = \partial_\mu A^\mu \quad \forall \mu\nu \\ \text{le bivecteur est } F &= e_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \end{aligned}$$

- Lien avec les équations de Maxwell : si A est quadripotentiel électromagnétique alors,

$$\begin{aligned} A &= (e_\mu A^\mu) \quad \text{avec } A^\mu = (V, c\vec{A}) \\ \text{Le bivecteur est le champ EM} &= F = e_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \mu < \nu \\ \text{Le scalaire} &= L = \partial_\mu A^\mu \end{aligned}$$

Si l'on accepte la condition de Lorentz ($L = 0$) dans des unités convenables, les 4 équations de Maxwell qui relient les champs aux charges électriques s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} dF &= J \\ \text{avec } F &= e_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \text{ et } J = e_\mu J^\mu \end{aligned}}$$

J est un vecteur de l'algèbre ; il représente physiquement le courant de charges **électriques** qui est la source du champ ; on peut remarquer que ce courant est conservé par construction .

$$d(dF) = (d^2)F = dJ \Rightarrow \text{la partie scalaire de } dJ = 0$$

En principe dF conduit vers un vecteur et un tri-vecteur mais il résulte de l'équation ci-dessus que la partie tri-vectorielle est nulle et donc dF est un vecteur ¹. L'ensemble des huit équations de Maxwell sont rappelées ci-dessous.

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{et} \quad \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0}$$

$$\text{avec } F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \text{ et } \tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Soit en clair

$$\begin{aligned} \text{div}(D) &= \rho & \text{rot}(H) - \frac{\partial D}{\partial t} &= j \\ \text{div}(B) &= 0 & \text{rot}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad D = \epsilon_0 E \quad B = \mu_0 H$$

On déduit immédiatement des équations ci-dessus les équations des potentiels retardés de Liénard-Wiechert

$$\boxed{\square A = -J}$$

En statique on vérifie l'équation de Poisson

$$\triangle A^0 = -J^0 = -\rho$$

¹Pour être complet sur ces questions il faudrait introduire un potentiel trivectoriel de type eA et aussi des charges magnétiques pseudoscalaires ??? à voir ...

2 L'article de P. RENAUD

2.1 Les principes et objectifs

Le but est de construire une théorie des particules de spin 1/2 en utilisant l'algèbre de Clifford réelle $R_{1,3}$ plutôt que l'algèbre des spineurs complexes de Dirac.

Comment la masse intervient-elle ? par analogie avec l'électromagnétisme de Maxwell (photon de spin 1) ou les particules de spin 1 massive (équation de Proca) que l'on réduit à :

$$\begin{aligned} dA &= F \\ dF &= -m^2 A + J \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d^2 A = -m^2 A + J$$

avec $d^2 = \partial_0^2 - \partial_i^2$

remarque : Page 6 ligne 15 : la masse est équivalente à une source .

Quel sera l'espace de représentation des particules (page 6 ligne 38) ; qu'est-ce que A ?

- Les particules de spin 1 (photons ou photons massifs) :

So what elements of $R_{1,3}$ will d operate on ? An answer to this question can be obtained by considering the dimensions of the spaces concerned. This is another area where a consideration of Maxwell's equations proves useful. Maxwell's equations describe spin-1 particles and the fundamental spin-1 representation of the Lorentz group is 6-dimensional

- particule de Dirac (spin 1/2) dans $R_{1,3}$

So group theory tells us where we should be looking for solutions to Maxwell's equations. Can it now help us to describe spin-1/2 particles? We can argue as before, but now considering spin-1/2 representations of the Lorentz group and $SU(2)$. The spin-1/2 representations of $SU(2)$ are two (complex) dimensional which, unlike the spin-1 case, cannot be rotated to real two-dimensional representations. So we have to be content with regarding them as four-dimensional real spaces and putting them together now leads to finding an eight-dimensional space to describe our Dirac spinors.

2.2 Les choix

There are two obvious candidates for this space in the Clifford algebra $R_{1,3}$, the subspaces $R_{1,3}^+$ and $R_{1,3}^-$. It seems likely that this choice is not important and we therefore choose $R_{1,3}^+$

$$\phi \in R_{1,3}^+ \quad \text{donc} \quad \phi(x) = f(x) + f^{\mu\nu}(x)e_{\mu\nu} + g(x) e$$

Les équations intuitées de l'électromagnétisme pour ces particules sont :

$$\begin{aligned} d\phi &= F \\ dF &= -m^2 \phi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d^2 \phi = -m^2 \phi$$

Une autre hypothèse est nécessaire (page 7):

we need some information about the introduced term F . Since F depends linearly on ϕ , the simplest assumption we could make, is that it is a constant (in space) multiple of ϕ ² :

$$F(x) = m\phi(x)\nu$$

²Notations de P Renaud / notations utilisée ici $\lambda = m\nu$ et $j \rightarrow F$

Conséquences :

L'équation de Dirac prend la forme $d\phi = m\phi\nu$

$$\nu^2 = -1$$

$$\nu \in R_{13}^- = \text{vecteur} + \text{trivecteur} = (\alpha + \beta e)$$

$$\nu = (\cos(\theta) + \sin(\theta)e)\mu$$

$$\mu \text{ est un vecteur du genre space tel que } \mu^2 = -1$$

remarque 1 :

Comparing this with the classical Dirac equation, we see that ν takes the place of i .

remarque 2 :

the choice of ν is, to that extent, arbitrary. But a Lorentz transformation will not change the parameter θ .

2.3 Le spin 1/2 au repos

L'équation "de Dirac" devient :

$$e_0 \partial_0 \phi = m\phi\nu$$

Cherchons des solutions exponentielles, solutions propres de l'opérateur ∂_0 (avec $x^0 \equiv t$) :

$$\phi = \phi_0 \exp(u mt)$$

avec ϕ_0 et u appartiennent à R_{13}^+ et $u^2 = -1$

Alors

$$\phi = \phi_0 (\cos(mt) + u \sin(mt)) \quad [1]$$

et l'équation de Dirac impose :

$$\phi_0 u = e_0 \phi_0 \nu \quad [2]$$

Cherchons $u \in R_{13}^+$ avec $\nu \in R_{13}^-$ tels que

$$u^2 = -1 = \nu^2$$

L'équation 1 ci-dessus implique (page 10 ligne 10) :

$$(\nu u)^2 = 1 \Rightarrow \nu u = u \nu$$

C'est à dire la commutation de ν et u . L'auteur en déduit (page 10 ligne 16) :

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\mu_0^2}} e_{123} \vec{\mu}$$

avec $\nu = (\cos\theta + e \sin\theta) \mu$ $\phi = \phi_0 \exp(u mt)$ solution de [2]
 $\phi_0 \in R_{13}^+$

The spin-1/2 nature of these solutions is now clear. For a fixed choice of u , the solutions are invariant under left multiplication by elements of H , and so, form a (real) 4-dimensional space invariant under the group action of $H1$. As we remarked in section 2, this provides the natural geometric setting for describing the spin-1/2 representation of $SO(3)$.

Exemple : page 10 ligne 35 Cas particulier (pas de composante temporelle pour ν)

$$\nu = (\cos(\theta) + e \sin(\theta)) \vec{\mu}$$

$$u = e_{123} \vec{\mu}$$

$$\phi_0 = q (1 \pm e)(\cos(\theta/2) - e \sin(\theta/2)) \quad q \in \mathcal{H}$$

2.4 Les anti-particules

page 12 ligne 12

$$d(\phi e) = m(\phi\nu)e = m(\phi e)(-\nu)$$

page 12 ligne 19

$$\nu \rightarrow \nu' = \nu(\cos\theta + e \sin\theta)$$

which in the case $\theta = 0$, i.e. leaves a particle unchanged while in the case $\theta = \pi$, takes $\nu \rightarrow -\nu$ and so changes a particle to its anti-particle.

2.5 La conservation de la probabilité

La définition d'une probabilité à partir de ϕ n'est pas évidente, pas davantage celle d'un courant de probabilité conservé

$$\phi = f + f^{\mu\nu}e_{\mu\nu} + g e \quad \tilde{\phi}\phi \quad ?$$

page 15 ligne 28 : *The significance of this is not clear.*

Remarque :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= f - f^{\mu\nu}e_{\mu\nu} + g e \\ \tilde{\phi}\phi &= (f + ge)^2 - f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma}e_{\mu\nu}e_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Calcul de $e_{\mu\nu}e_{\rho\sigma}$ = scalaire + bivecteur + pseudoscalaire : (à vérifier)

$$e_{\mu\nu}e_{\rho\sigma} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}e_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}e_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}e_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}e_{\mu\rho} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e$$

Il me semble que les propriétés de permutation des indices impliquent l'annulation des termes bivectoriels (remarque également faite par P Renaud page 15 ligne 13) ³ et donc le produit $\tilde{\phi}\phi$ se réduit à :

$$\tilde{\phi}\phi = f^2 + 2fge - g^2 + f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - f^{\mu\nu}f_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} e$$

Le tenseur $f^{\mu\nu}$ est antisymétrique par construction, il vient :

$$\tilde{\phi}\phi = f^2 + 2fge - g^2 + 4((f^{ij})^2 - (f^{0i})^2) + 4(\epsilon_{ijk}f^{0i}f^{jk})e$$

Remarque : En électromagnétisme, la somme $f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} \propto E^2 - B^2$ est le lagrangien du champ, il obéit au principe de moindre action tandis que le pseudoscalaire vaut $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}$.

3 Conclusion

L'équation de Dirac et son opérateur $\mathbf{d}$ constituent des questions historiques, fascinantes à la limite de la physique et des mathématiques.

³La partie bivectorielle donne : $e_{\nu\sigma} (f^{\nu\mu} - f^{\mu\nu})(f_{\mu}{}^{\sigma} - f^{\sigma}{}_{\mu})$ et la partie pseudoscalaire : $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} e$