

Introduction aux ondes gravitationnelles *

C. LONGUEMARE

20 mai 2014
version 2.0



*. ce modeste travail, malgré ses imperfections, est dédié à ma très chère compagne de toujours dont c'est l'anniversaire aujourd'hui.

Plan

1. Electrostatique et gravitation statique
2. Action des forces électriques et gravitationnelles
3. Généralisations relativistes
4. Géodésiques
5. Les sources des champs EM et GR
6. Les ondes électromagnétiques
7. Les ondes gravitationnelles
8. Vers une théorie lagrangienne de la gravitation
9. Le photon et le graviton (d'après Feynman)
10. Extensions - conclusions
11. Annexe 1 Constantes et conventions
12. Annexe 2 Equation des ondes gravitationnelles
13. Annexe 3 Géodésiques

Electrostatique et gravitation-statique

- Modalités de l'interaction classique

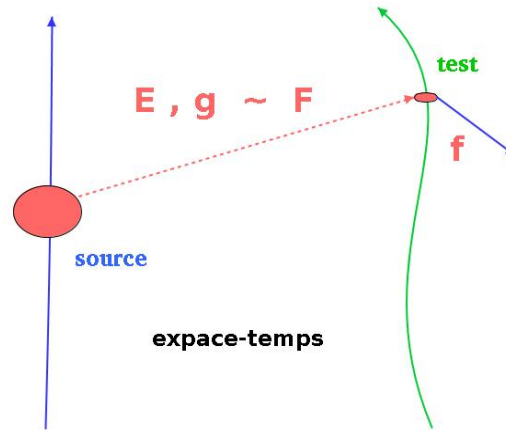


figure 1

- Le champ de la source

$$\Delta V = -\mathcal{K} \rho \quad \vec{E} \text{ ou } \vec{g} = -\text{grad } V \quad \mathcal{K} = \epsilon_0^{-1} \text{ ou } = -G$$

pour une source ponctuelle

$$V = \frac{\mathcal{K}}{4\pi r} \times Q \text{ ou } M$$

- L'action sur la cible : la force classique

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q \text{ grad } V \text{ ou } \vec{F} = m\vec{g} = -m \text{ grad } V$$

- Le lagrangien du principe de moindre action : $\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - (U(x) + mc^2) \quad U(x) = qV \text{ ou } = mV$$

$$d\mathcal{A} = \mathcal{L} dt = -mc ds \text{ avec } ds = \sqrt{(c^2 - \frac{2U}{m}) dt^2 - dx^2}$$

Action des forces relativistes

— La force électromagnétique de Lorentz sur la charge q

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

— Equations relativistes avec $c = 1$

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - dx^2$$

• L'intervalle de temps "propre" sur une trajectoire

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt \text{ soit } dt = \gamma d\tau$$

• La 4-vitesse sur une trajectoire

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v}) : p_\mu = m v_\mu$$

• La loi dynamique :

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_\mu v^\mu = 0$$

Action des forces électromagnétiques

- Le potentiel électromagnétique $A^\mu = (V(x), \vec{A}(x))$
 - Le tenseur électromagnétique à 6 composantes ($\equiv \vec{E}$ et $\vec{B}$) :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1)$$

$$E_i = (F^{i0}) \quad B_k = (-F^{ij}) \quad \text{si } \epsilon_{ijk} = 1$$

- La force électromagnétique

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu = q F_{\mu\nu} v^\nu \quad (2)$$

$$\ddot{x}_\mu = \left(\frac{q}{m} F_{\mu\nu}\right) \dot{x}^\nu$$

avec $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$

- formulation non covariante (dans le laboratoire)

$$\mathcal{F}_i = q (F_{i0} \cdot V^0 + F_{ij} \cdot V^j) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Action des forces gravitationnelles

- Hypothèses : celles de la géométrie différentielle de Riemann : $\exists$ une métrique symétrique définie en tout point M de la variété.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \geq 0 \quad dM = e_\mu dx^\mu$$

$$\text{Notation : } \partial_\mu O = O_{,\mu}$$

- Le symbole de Christoffel $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$

$$de_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho dx^\nu e_\rho \quad \text{ou} \quad \dot{e}_\rho = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu e_\mu$$

noté également

$$\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma}) = \Gamma_{\nu\rho}^\mu$$

et obéissant à l'équation

$$2 g_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\nu}^\mu = (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma})$$

Equation des géodésiques : annexe 3

— Equation d'Euler-Lagrange : soit $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x, \dot{x}, \tau) d\tau$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

— La distance parcourue

$$f = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

— L'équation de Euler-Lagrange

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} (-g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \frac{d \ln(f)}{d\tau} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$$

— Si $\tau \equiv s$ alors $f = 1$

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu = -\frac{1}{2} (-g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

En résumé

— L'action des forces E M avec $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$

$$\ddot{x}_\mu = \left(\frac{q}{m} F_{\mu\nu} \right) \dot{x}^\nu \quad (3)$$

$$\frac{q}{m} F \sim \frac{q}{m} \frac{\partial A}{\partial x} \sim \frac{q}{m} (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})$$

— L'action des forces G R

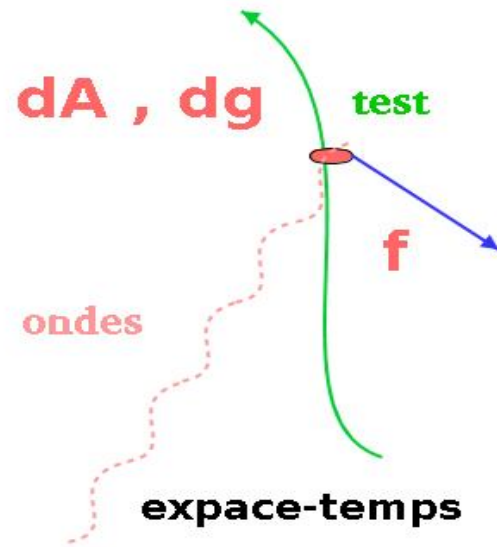
$$\ddot{x}_\mu = - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \quad (4)$$

$$g \Gamma \sim \frac{\partial g(x)}{\partial x} \sim \frac{1}{2} (-g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu})$$

— En conséquence :

$\partial A_\mu(x)$	interaction E M	vecteur (4 D)
$\partial g_{\mu\nu}(x)$	interaction G R	tenseur-sym (10 D)

Exemple : le cas statique *



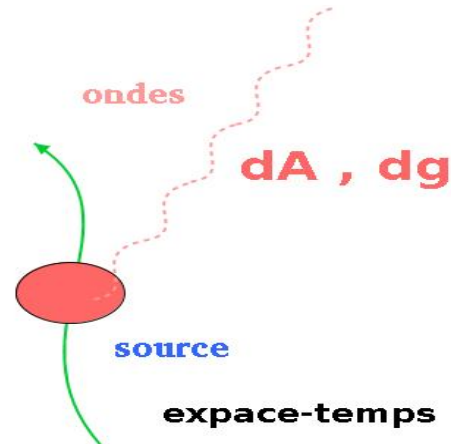
$$\partial_0 = 0$$

- EM $A_0 = V(\vec{x}) \quad \ddot{\vec{x}} = -\frac{q}{m} \vec{grad} V$
- GR $g_{00} = 2 V(\vec{x}) \quad \ddot{\vec{x}} = -\vec{grad} V \quad \dagger$

*. $V(\vec{x})$ a la dimension d'une vitesse au carré (pour G R)

†. équation indépendante de m

Les sources des champs EM et GR classiques



— Les 8 équations de Maxwell qui portent sur $A^{\mu,\rho\sigma} = \partial^\rho \partial^\sigma (A^\mu(x))$

J_μ est la source du champ EM (5)

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \quad (-m^2 A_\mu) \quad [1]$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [2]$$

— Les 10 équations d'Einstein sur $g^{\mu\nu,\rho\sigma} = \partial^\rho \partial^\sigma (g^{\mu\nu}(x))$

$T_{\mu\nu}$ est la source de gravité et Λ ? la masse des ondes G ? (6)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr} (R) = a T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad [3]$$

$$\text{Tr} (R) = R^\mu_\mu \quad R_{\mu\nu} = \text{tenseur de Ricci} \quad a = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}$$

— mais $\exists$ un facteur $\sim 10^{-40}$ entre GR et EM !!!

Les ondes électromagnétiques

— Potentiels retardés et la condition de Lorentz

1. équation [5-1] : dynamique des ondes EM

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \partial^2 A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = J_\nu$$

2. condition de Lorentz (invariance de jauge)

$$\partial^\mu A_\mu = 0$$

— Equation de d'Alembert + équation [5-2]

$$-\square A_\nu = J_\nu \quad -\square = \partial^2$$

recherche des solutions par transformation de Fourier

$$\hat{A}_\nu(q^2) = -\frac{1}{q^2} \hat{J}_\nu(q^2)$$

— Les potentiels retardés :

$$A^\nu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J^\nu\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Une image

- Les Ondes de gravité à la surface globalement courbe de l'océan.

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{avec } h \ll g \quad g_{\mu\nu,\rho} = 0$$



Les ondes gravitationnelles

- Les 10 équations de la gravitation relativiste réf[6]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr } R = a T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (7)$$

- avec les éléments de géométrie différentielle

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad \text{Riemann}$$

$$R_{\sigma\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \quad \text{Ricci}$$

- Les ondes $h_{\mu\nu}(x)$ avec $h \ll g$ $g_{\mu\nu,\rho} = 0$ (Annexe 2)

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

$$R_{\sigma\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} = -\frac{1}{2} \partial^2 h_{\nu\sigma} + \dots$$

- Equation des ondes gravitationnelles

$S_{\mu\nu} \neq T_{\mu\nu}$ est **la source** des ondes

$\Lambda \neq 0$ est la "masse" des ondes gravitationnelles (cte cosmologique) ?

$$\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} = a S_{\mu\nu} + \Lambda h_{\mu\nu} \quad (8)$$

Vers une théorie Lagrangienne de la gravitation

— Equation d'Euler-Lagrange : soit $\mathcal{A} = \int_1^2 \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau) d\tau$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

— Le lagrangien complet inclut le Lagrangien libre + interaction :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\dot{x}) + \mathcal{L}_i(x, \dot{x})$$

$\mathcal{L}_0$ décrit la propagation libre $\mathcal{L}_i$ décrit l'interaction

— Avec Feynman * réf [2] page 243 : .

$$\mathcal{L}_0 \sim \frac{1}{2} (h^{\mu\nu, \lambda} h_{\mu\nu, \lambda}) + \frac{\rho}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$\mathcal{L}_i \sim a \rho h_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Soit très grossièrement pour l'interaction

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\mu\nu}} \sim a \rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \sim a S^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} \sim a (h_{\mu\nu})^{, \rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \sim a \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

*. Feynman envisage le cas d'une interaction avec un boson neutre (ici nous prenons le point de vue d'une interaction non-relativiste)

Le photon et le graviton (d'après Feynman réf[2])

— L'exemple de l'électromagnétisme (invariance de Jauge)

$$A_\mu = \epsilon_\mu \exp(ikx) \quad \hat{J}_\mu(p) \exp(ipx) \quad i\partial \rightarrow i\partial - e A$$

$$\mathcal{L}_i = J_\mu A^\mu$$

— La gravitation

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \exp(ikx) \quad \hat{S}_{\mu\nu}(p) \exp(ipx) \text{ etc ...}$$

$$\mathcal{L}_i = ?$$

La gravité quantique

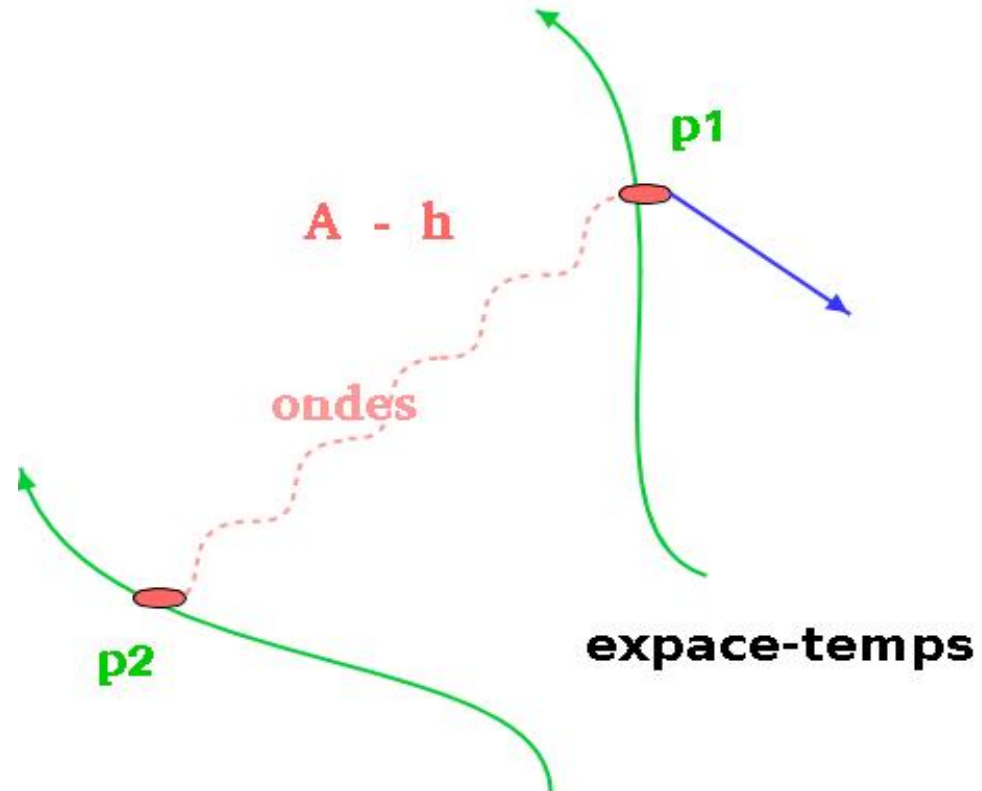


figure 3
tout un programme autour du graviton.

La gravité quantique et les théories de jauge

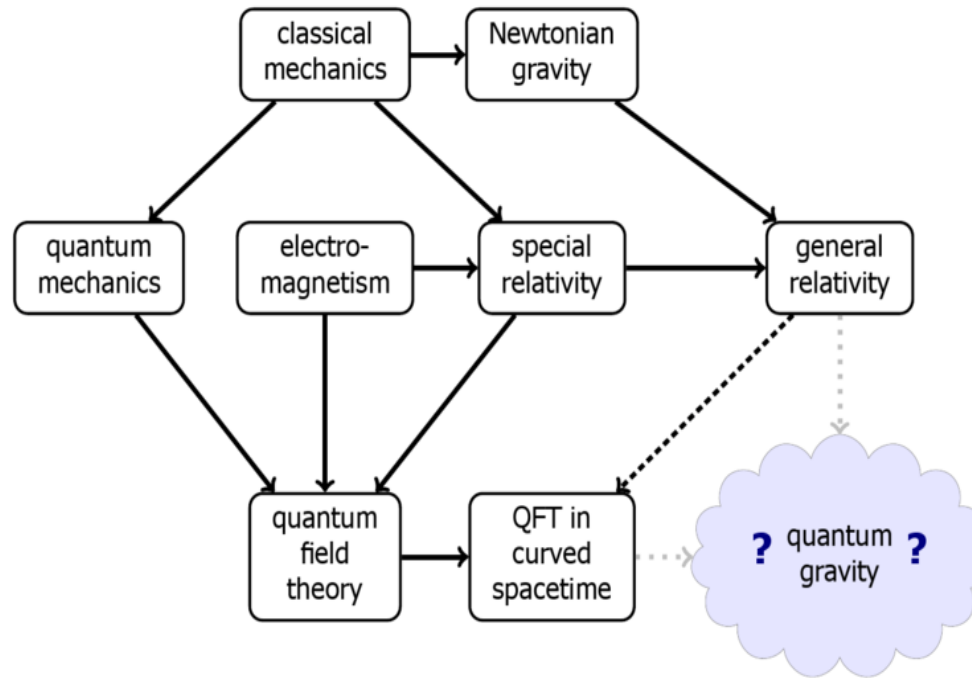


figure 4 *

*. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Quantum_gravity.png

Conclusions

Pour poursuivre l'étude :

- Quantification de l'interaction des ondes gravitationnelles avec la matière ? tout un programme... ?
- Rôle de la "constante cosmologique" dans la physique des ondes gravitationnelles classiques ? références ?
- Faire le calcul complet du premier ordre : équation 8 (annexe 2 en travaux).

références

- 1 L. Landau & E. Lifchitz , *Théorie des champs* , Ed MIR 1970
- 2 R. Feynman , *Leçons sur la gravitation* , Ed Odile Jacob 2001
- 3 C. Misner & al , *Gravitation* , Ed W.H. Freeman & Co 1973
- 4 C.D. Walecka , *Introduction to general relativity* , Ed World Scientific 2007
- 5 P. Dirac , *Général theory of relativity* , Ed Princeton paperback 1975
- 9 - , <http://scienceworld.wolfram.com/physics/> , www
- 10 - , http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations/ , www

Annexe 1 : notations, formulaire et constantes

c	vitesse de la lumière	1	par déf
$\hbar$	cte de Planck (bar)	1	idem
ϵ_0	permitivité du vide	1	idem
μ_0	perméabilité du vide	1	idem
$g_{\mu\nu}$	métrique	+ - - -	
$\mathcal{A}$	l'action		
$\mathcal{H}$	Constante de Hubble	$72, \pm 10,$	$\text{km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$
$\mathcal{G}$	cte de gravitation	$6,673 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
Mpc	méga parsec	$3,086 \cdot 10^{+19}$	km
A.L.	année lumière	$9,5 \cdot 10^{+15}$	m
a	$\frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}$	$2,0 \cdot 10^{-43}$	$m \ J^{-1}$
$\mathcal{L}(x)$	la densité lagrangienne		
c	vitesse de la lumière	$2,998 \cdot 10^8$	m.s^{-1}
$\hbar c$	cte de la MQ reativiste	197,	MeV.fm
$\mathcal{N}$	Nombre d'Avogadro	$6,023 \cdot 10^{23}$	

Annexe 2 : Equation des ondes gravitationnelles

développement au premier ordre

— Les 10 équations de la gravitation relativiste réf[6]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr } R = a T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (9)$$

— avec les éléments de géométrie différentielle

$$\nabla_{\sigma\nu}^{\mu} = g_{\nu}^{\mu} \partial_{\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad \text{Riemann}$$

$$R_{\sigma\nu} = \nabla_{\mu\rho}^{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \nabla_{\nu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \quad \text{Ricci}$$

— Les ondes $h_{\mu\nu}(x)$ avec $h \ll g$ $g_{\mu\nu,\rho} = 0$ au 1er ordre

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \Rightarrow g^{\mu\lambda} h_{\mu\nu}(x) = 0$$

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (h_{\mu\nu,\sigma} + h_{\mu\sigma,\nu} - h_{\sigma\nu,\mu})$$

$$\nabla_{\sigma\nu}^{\mu} = g_{\nu}^{\mu} \partial_{\sigma}$$

$$R_{\sigma\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} = -\frac{1}{2} \partial^2 h_{\nu\sigma}$$

— Equation des ondes gravitationnelles 8

$S_{\mu\nu} \neq T_{\mu\nu}$ est associé à **la source** des ondes

$$-\frac{1}{2} \partial^2 h_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} \square h_{\nu\sigma} = a S_{\nu\sigma} + \Lambda h_{\nu\sigma} \quad (10)$$

— Transformation de Fourier de l'équation d'onde

$$\left(\frac{1}{2} k^2 - \Lambda\right) \hat{h}_{\mu\nu} = a \hat{S}_{\mu\nu} \quad (11)$$

— Propagation dans le vide et "masse" du "graviton"

$$\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \Lambda h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{soit } k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = 2\Lambda$$

— La "masse" quantique des ondes gravitationnelles (graviton) est définie par la constante cosmologique :

$$m_G c^2 = \hbar c \sqrt{2\Lambda} \quad \text{dimension physique de } \Lambda \sim L^{-2} \quad (12)$$

Applications numériques

— application numérique :

a	$\frac{8\pi G}{c^4}$	$3,2 \cdot 10^{-62} \text{ m.eV}^{-1}$
densité critique	ω_c	$5,6 \cdot 10^9 \text{ eV} * \text{m}^{-3}$
2Λ	$a \omega_c$	$1,8 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$

Remarque : la densité critique d'énergie ω_c :

$$\sim 10^{-26} \text{ kg} * \text{m}^{-3} \sim 9,0 \cdot 10^{-10} \text{ J} * \text{m}^{-3} = 5,6 \cdot 10^9 \text{ eV} * \text{m}^{-3}$$

paramètre a voir table annexe 1

$$\sim 2,0 \cdot 10^{-43} \text{ m.J}^{-1} \sim 3,2 \cdot 10^{-62} \text{ m.eV}^{-1}$$

la "masse" des ondes graves avec $\hbar c = 0,197 \cdot 10^{-6} \text{ eV.m}$

$$m_G c^2 = \sqrt{2\Lambda} * (\hbar c) \sim 0,26 \cdot 10^{-32} \text{ eV}$$

La longueur compton est

$$\lambda_G = \sqrt[3]{2\Lambda} = 7,4 \cdot 10^{25} \text{ m} = 7,9 \cdot 10^9 \text{ A.L.}$$

Pour comparaison, l'électron et le proton

$$m_e c^2 = 511 \cdot 10^3 \text{ eV} \quad m_p c^2 = 938 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$\lambda_e = 3,8 \cdot 10^{-13} \text{ m} \quad \lambda_p = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

Annexe 3 : Equation des géodésiques

— Hypothèses :celles de la géométrie différentielle de Riemann

1. $\exists$ une métrique symétrique définie en tout point M de la variété q_μ

$$g_{\mu\nu}(q)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(q) dq^\mu dq^\nu \geq 0$$

$$dM = e_\mu dq^\mu$$

2. Le symbole de Christoffel $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$

$$de_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho dq^\nu e_\rho \quad \text{ou} \quad \dot{e}_\rho = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{q}^\nu e_\mu$$

$$\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial q^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\sigma} \right) = \Gamma_{\nu\rho}^\mu$$

noté également

$$\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma})$$

et obéissant à l'équation

$$2 g_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\nu}^\mu = (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\sigma})$$

3. soit un segment de courbe (paramètre τ) limité par les points M_1 et M_2

on définit l'action $\mathcal{A}$ et la "longueur" $\mathcal{D}$ de l'élément de trajectoire

$$\mathcal{A} = \int_1^2 g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu d\tau \quad \text{avec } \dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{d\tau^2}$$

$$\mathcal{D} = \int_1^2 \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} d\tau$$

on recherche par les méthodes variationnelles les courbes extrémales pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$?

4. si τ est l'abscisse curviligne sur la courbe :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 1$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}_{min} \equiv \mathcal{D}_{min}$$

5. A cause du théorème de Cauchy-Schwartz, en général, on a :

$$\mathcal{D}^2 \leq (\tau_2 - \tau_1) \times \mathcal{A}$$

Equation d'Euler-Lagrange

- Equation d'Euler-Lagrange sur une fonction $f(x, \dot{x}, \tau)$: changement de notation $q \equiv x$

$$\mathcal{A} = \int f d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- La dérivation par τ :

$$\frac{d}{d\tau} = \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Introduisons

$$\mathcal{U} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

- Application à l'"action" $\mathcal{A}$
 - Alors

$$f = \mathcal{U}^2 = g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

- L'équation d'Euler - Lagrange dans ce cas :

$$2 g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2 g_{\mu\nu,\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = g_{\rho\nu,\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

- soit

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu = -\frac{1}{2} (-g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = -g_{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$
$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (13)$$

— Application à la "distance" $\mathcal{D}$ (réf*)

— Alors

$$f = \mathcal{U} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

— La dérivation de $\mathcal{U}$:

$$d\mathcal{U}^2 = 2 \mathcal{U} d\mathcal{U}$$

— L'équation d'Euler - Lagrange sur $\mathcal{D}$ devient dans ce cas :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{d}{d\tau} \left((2 \mathcal{U})^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - (2 \mathcal{U})^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x}$$

— soit

$$(2 \mathcal{U}) \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right) = - \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U})}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x} \right)$$

— L'équation de la géodésique s'écrira donc

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U}^2)}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^2}{\partial \dot{x}} \right)$$

soit

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \frac{d \operatorname{Ln}(\mathcal{U})}{d\tau} \dot{x}^\mu$$

— ou encore plus explicitement si $\tau \equiv s$ (car $\mathcal{U}^2 = 1$) :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (14)$$

*. [http : en.wikipedia.org/wiki/Geodesics](http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics) ou [http : en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity](http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity)