

Université de Caen

LMNO

Calcul de la correction de vertex **introduction à QED**

C. LONGUEMARE

19 jan. & 16 fév. 2016

Plan

1. Forme générale du courant électromagnétique
2. Graphes de Feynman et l'amplitude quantique à l'ordre α
3. Le cas de la correction de vertex
4. Le moment magnétique μ à l'ordre 2*

$$\mu = g \frac{e}{2m} s$$

référence	pages
[1]	615 et 620
[2]	347 et 335
[3]	159

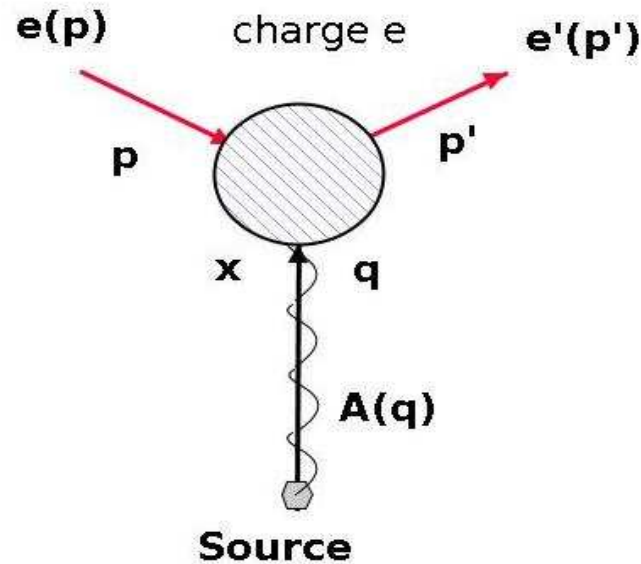
$$g = -2 \left(1 + A_1 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots \right)$$

$$A_1 = 0,5 \quad A_2 = -0,328847.. \quad A_3 = 1,181241 \quad A_4 = -1,728 \text{ réf [10]}$$

*. g est le facteur de Landé, s le spin de la particule (unité $\hbar$)

Le courant électromagnétique

Considérons la diffusion d'un électron sur un champ électromagnétique "externe" $A^\mu(x)$



- L'espace de Fock , c'est l'espace des spineurs à un électron

$$\psi(x) = \exp(-ipx) u(p) \quad \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$$

- Amplitude de transition entre deux états asymptotiques propres de p

$$\mathcal{M} \in \mathcal{C} = -ie \int J_\mu(x) A^\mu(x) d^4x = -ie \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) \hat{A}_\mu(q) \quad q = p' - p$$

- La probabilité de transition entre un état initial vers un état final soit $|\mathcal{M}|^2$ est accessible à l'expérimentation.

Symétries de l'interaction électromagnétique

Considérons la diffusion d'un électron sur un champ électromagnétique $A^\mu(x)$

— Amplitude à l'ordre 1 par rapport à e

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu \quad q = p' - p$$

— Opérateurs dans l'espace des spineurs dimension 2^4

$$\Gamma^\mu = 1 \quad \gamma^\mu \quad \sigma^{\mu\nu} \quad \gamma^\mu \gamma_5 \quad \gamma_5$$

— Parité + renversement du temps + conjugaison de charge

$$\Gamma^\mu(p', p) = F_1(q^2) \gamma^\mu + i F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \quad \text{avec } F_{1/2} \in \mathcal{R}$$

— Propriétés des spineurs de Dirac $\bar{u}'(p')$ et $u(p)^*$

$$\begin{aligned} \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) &= \bar{u}'(p') \left(F_1 \gamma^\mu + i F_2 \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \right) u(p) \\ &= \bar{u}'(p') \left((F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{1}{2m} F_2 (p' + p)^\mu \right) u(p) \end{aligned}$$

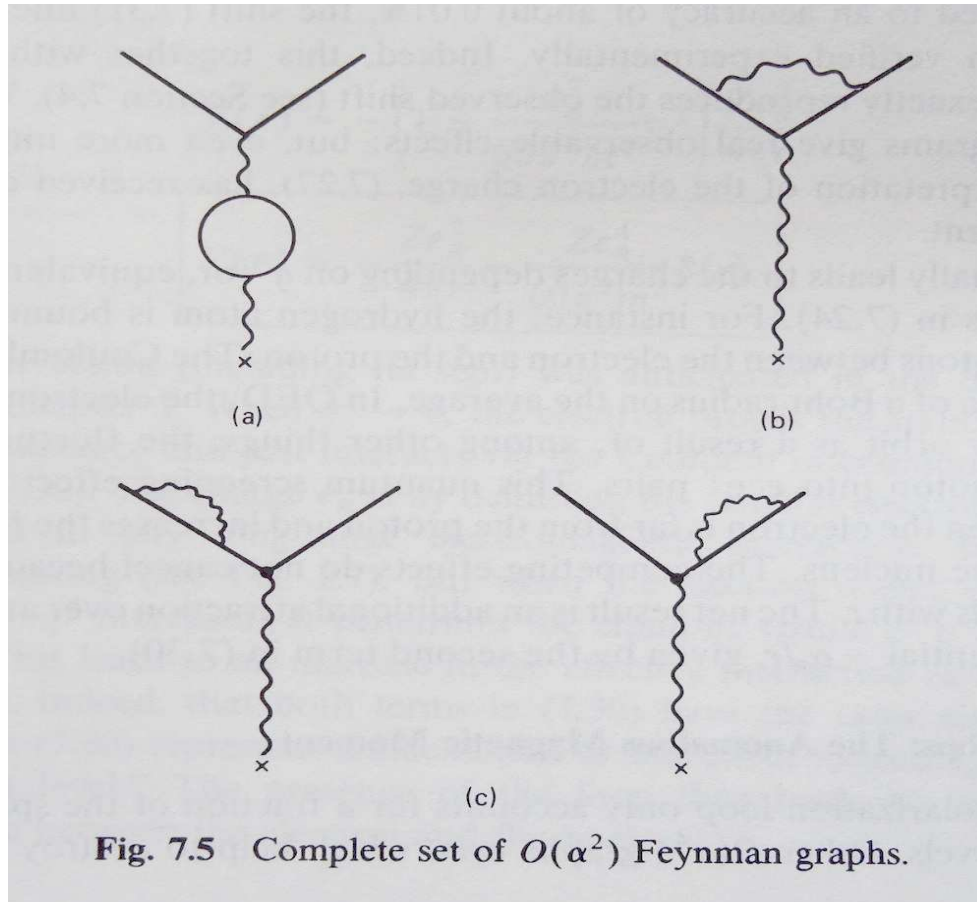
pour e^-	$F_1(0)$	$F_2(0)$
ordre 1	1	0
ordre +2	0	$\frac{\alpha}{2\pi}$

— Lien avec le facteur de Landé pour l'électron

$$g = -2 (F_1(0) + F_2(0)) = -2 (1 + 0.001162 + \dots)$$

$$* . \quad \bar{u}'(p') \gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}'(p') ((p' + p)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu) u(p)$$

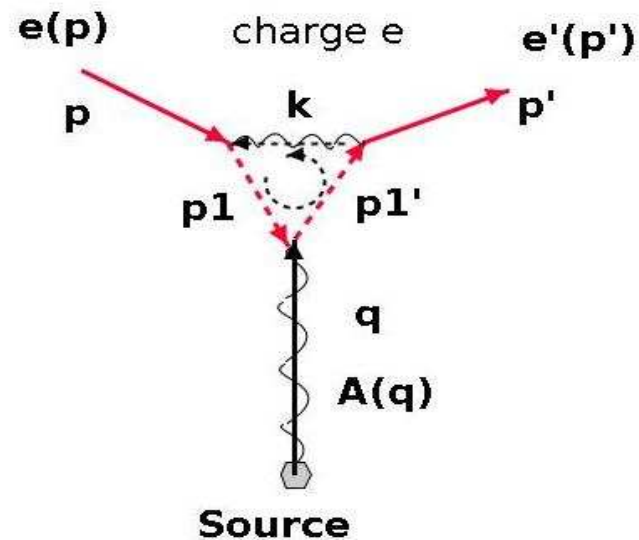
Graphes de QED au + 2ième ordre



*

*. référence 3 page 160

Correction de vertex au 2ieme ordre



Cinématique : $p_1 = p + k$ $q = p' - p$ $p'_1 = p' + k$

cte	$e^2 = 4\pi\alpha$
masse de l'électron	m
masse du photon	$m_0 = 0$

— Règles de Feynman $\rightarrow$ amplitude quantique $\mathcal{M}_2$

$$\mathcal{M}_2 = (-ie)^3 \int (\bar{u}'(p') \gamma^\nu iG(p'_1) \gamma^\mu iG(p_1) \gamma^\lambda u(p)) iD_{\nu\lambda}(k) \hat{A}_\mu(q) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$G(p) = 1/(p \cdot \gamma - m + i0) \quad D_{\mu\rho}(q) = -g_{\mu\rho}/(q^2 - m_0^2 + i0)$$

— Soit $\Gamma_2^\mu(p', p)$ et $\mathcal{M}_2$

$$\mathcal{M}_2 = -ie \bar{u}'(p') \Gamma_2^\mu(p', p) u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

$$\Gamma_2^\mu(p', p) = i(-ie)^2 \int \gamma^\nu G(p'_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma_\nu (k^2 - m_0^2 + i0)^{-1} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

— Dans l'espace des transformées de Fourier, les propagateurs électro-niques :

$$G(p) = (p \cdot \gamma + m) / (p^2 - m^2 + i0)$$

— Pour le Calcul de $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ à l'ordre 2 nous avons

$$\Gamma_2^\mu = i \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Num}{Den} d^4 k = \left((F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{1}{2m} F_2 (p' + p)^\mu \right)$$

$$Num = \gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$Den = (k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)(k^2 - m_0^2 + i0)$$

Principe du calcul

1. Ecrire le numérateur pour de séparer $F_1 F_2$

$$Num = (A(k)\gamma^\mu + B^\mu(k))$$

2. Soit la transformée de Fourier de l'opérateur $\Gamma(k)$ soit

$$\Gamma(k) = \frac{Num}{Den(k)} \rightarrow \hat{\Gamma}(z) = \int \frac{Num}{Den(k)} \exp(ikz) d^4k$$

3. On commencera par calculer la TF de $f(k)$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{Den(k)} \rightarrow \hat{f}(z) = \int \frac{1}{Den(k)} \exp(ikz) d^4k$$

4. En dérivant on calculera les termes de Γ_2 en prenant la TF en $z = 0$

$$-i\partial_\mu \hat{f}(z) = \int \frac{k_\mu}{Den(k)} \exp(ikz) d^4k$$

$$(-i\partial_\nu)(-i\partial_\mu) \hat{f}(z) = \int \frac{k_\mu k_\nu}{Den(k)} \exp(ikz) d^4k$$

$$i \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{(A(k)\gamma^\mu + B^\mu(k))}{Den} d^4k = \left((F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{(p' + p)^\mu}{2m} F_2 \right)$$

Calcul du numérateur

— Soit à évaluer

$$\bar{u}'(p')(Num)u(p) = \bar{u}'(p') (\gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu) u(p)$$

— Le numérateur (grand total) * :

$$(Num) = 4 \{ \gamma^\mu ((p_1 \cdot p'_1) - k^2/2) - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \}$$

donc

$$(Num) = A(k) \gamma^\mu + B^\mu(k)$$

$$A = 4 \left((p \cdot p') + (k \cdot (p + p')) + k^2/2 \right)$$

$$B^\mu = 4 \left(-(k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \right)$$

*. On montre : appendice 1

Evaluation de $\hat{f}(z)$

— Soit à évaluer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(k) = \frac{1}{Den(k)} \rightarrow \hat{f}(z) = \int \frac{1}{Den(k)} \exp(ikz) d^4k$$

$$Den(k) = a_1 a_2 a_3$$

$$a_1 = (k^2 + 2(p'.k) + i0) \quad a_2 = (k^2 + 2(p.k) + i0)$$

$$a_3 = (k^2 - m_0^2 + i0)$$

— Le calcul de la fonction $\hat{f}(z)$ conduit à * :

$$\hat{f}(z) = \pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) \Pi_j d\alpha_j \quad j = 1, 2, 3$$

$$x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\text{avec } \tilde{p} = \alpha_2 p' + \alpha_3 p$$

$$\psi(z) = -\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1} (\tilde{p} + \frac{z}{2})^2$$

— Dimensions (physiques) : $\alpha_j, x_0 \sim E^{-2}$ et $\tilde{p} \sim E^{-1}$

*. On montre : appendice 2

Quelques relations utiles

— conservation de la 4 impulsion $p' - p = p'_1 - p_1 = q$

q	$= p' - p$	transfert de 4 impulsion
p'_1	$= p' + k$	e^- virtuel
p_1	$= p + k$	e^- virtuel
q^2		$= 2m^2 - 2(p'.p)$
$(p' + p)^2$	$4m^2 - q^2$	$= 2m^2 + 2(p'.p)$
x_0		$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
$\tilde{p}$	$= \alpha_2 p' + \alpha_3 p$	$= \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}(p' + p) + \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}(q)$
$(\tilde{p}.\gamma)$		$= \alpha_2 + \alpha_3 \ m$
$(\tilde{p})^2$		$= (\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2$
$(\tilde{p}.(p' + p))$		$= \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}(p' + p)^2$
$\psi(z)$		$= -\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})^2$
$\psi_\mu(z)$	$\partial_\mu \psi(z)$	$= -x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})_\mu$
$\psi_{\mu\nu}(z)$	$\partial_\nu \partial_\mu \psi(z)$	$= -\frac{1}{2x_0} g_{\mu\nu}$

Considérons $\Gamma_2^\mu(k)$

$$\Gamma_2^\mu = \left(i \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4}\right) \times \int \frac{A(k)\gamma^\mu + B^\mu(k)}{Den(k)} d^4k$$

$$B^\mu(k) = 4\{-(k.\gamma)(p + p')^\mu + mk^\mu - (k.\gamma)k^\mu\}$$

$$A(k) = 4\{(p'.p) + (k.(p' + p)) + \frac{1}{2}k^2\}$$

— Nous utilisons les notations suivantes

$$\hat{f}(z) = \pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) \prod_j d\alpha_j$$

avec $\psi(z) = -\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})^2$

$\hat{f}(z)$		$\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) \prod_j d\alpha_j$
$\hat{f}_\nu(z)$	$= -i\partial_\nu \hat{f}(z)$	$..(\psi_\mu(z))..$
$\hat{f}_{\nu\mu}(z)$	$= -\partial_\nu \partial_\mu \hat{f}(z)$	$..(-i\psi_{\mu\nu}(z) + \psi_\mu(z)\psi_\nu(z))..$

— Nous savons que la contribution de B^μ à Γ_2 est (à un facteur près)

$$= 4[-(\hat{f}_\nu.\gamma^\nu)(p + p')^\mu + m\hat{f}^\mu - \hat{f}^{\mu\nu}.\gamma_\nu] \text{ en } z = 0$$

— Idem la contribution de $A(k)\gamma^\mu$ à Γ_2 est (à un facteur près)

$$= 4[(p'.p) + (\hat{f}_\nu.(p + p')^\nu) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(f_{\mu\nu})] \text{ en } z = 0$$

— soit

$$= 4\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(0) + i0) \Pi_j d\alpha_j \times \{$$

$$[-(\psi_\nu(0) \cdot \gamma^\nu)(p + p')^\mu + m\psi^\mu(0) - ((-i\psi^{\mu\nu}(0) + \psi^\mu(0)\psi^\nu(0)) \cdot \gamma_\nu)]$$

$$+ \gamma^\mu [(p' \cdot p) + (\psi_\nu(0) \cdot (p + p')^\nu) + \frac{1}{2}g_{\rho\nu}(-i\psi^{\rho\nu}(0) + \psi^\rho(0)\psi^\nu(0))]\}$$

notons que

$$(i\frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4})(4\pi^2) = \frac{-i\alpha}{\pi}$$

— En remplaçant $\psi_\nu(0)$ $\psi_{\mu\nu}(0)$ par leur valeur (table ci-dessus) :

$$\{[m(\alpha_2 + \alpha_3)x_0^{-1}(p + p')^\mu - mx_0^{-1} \tilde{p}^\mu - \frac{i}{2} x_0^{-1}\gamma^\mu - m(\alpha_2 + \alpha_3)x_0^{-2}\tilde{p}^\mu]$$

$$+ \gamma^\mu [(p' \cdot p) - x_0^{-1}(\tilde{p} \cdot (p + p')) + x_0^{-1}i + \frac{1}{2}x_0^{-2}\tilde{p}^2]\}$$

1. Regroupant les termes en $(p' + p)^\mu$ avec $\tilde{p}^\mu \rightarrow \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} (p' + p)^\mu$

$$.... \times m(p + p')^\mu \left[h_0(x_j, q^2) = \frac{\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)}{2x_0^2} \right]$$

ce qui montre que la contribution en $(p' + p)^\mu$ est

$$= 4\pi^2 m(p + p')^\mu \int_0^\infty x_0^{-2} [h_0(x_j, q^2)] \exp i(\psi(0) + i0) \Pi_j d\alpha_j$$

avec

$$\psi(0) = x_0(-x_1 m_0^2 - x_0^{-2} \tilde{p}^2) = x_0(-x_1 m_0^2 - ((x_2 + x_3)^2 m^2 - x_2 x_3 q^2))$$

2. Regroupant les termes en γ^μ

$$(p' + p)^2 = 4m^2 - q^2$$

$$\text{avec } (\tilde{p})^2 = (\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2$$

$$(p' \cdot p) = m^2 - \frac{1}{2} q^2$$

ce qui montre que la contribution en γ^μ est

$$= 4\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} h_1(\alpha_j, q^2) \exp i(\psi(0) + i0) \Pi_j d\alpha_j$$

$$\text{avec } h_1(\alpha_j, q^2) = ((p' \cdot p) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2x_0} (p + p')^2 + \frac{i}{2x_0} + \frac{1}{2x_0^2} \tilde{p}^2$$

3. Regroupant les termes en $q^\mu = (p' - p)^\mu$ avec $\tilde{p}^\mu \rightarrow \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} q^\mu$

$$\dots \times m q^\mu \left[\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2x_0^2} (x_0 + \alpha_2 + \alpha_3) = h_2(\alpha_j, q^2) \right]$$

ce qui montre que la contribution en q^μ est

$$= 4\pi^2 m q^\mu \int_0^\infty x_0^{-2} h_2(\alpha_j, q^2) \exp i(\psi(0) + i0) \Pi_j d\alpha_j$$

ce terme ne contribuera pas à Γ_2 à cause de l'échange $2 \leftrightarrow 3$

Calcul de F_2

— on continue avec le changement de variable ci-dessous $\alpha_j \rightarrow x_j$

$$x_j = \frac{\alpha_j}{x_0} \text{ avec } x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

— on intègre sur $x_0 \in [0, \infty]$ et x_1, x_2 sur $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$

$$= 4\pi^2 m (p + p')^\mu \int_{x_i} \int_0^\infty h_0(x_j, q^2) \exp(ix_0(\tilde{\psi}(0) + i0)) dx_0 dx_1 dx_2$$

$$\tilde{\psi}(0) = (-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)$$

$$|J| = x_0^2 \quad J \text{ est le jacobien}$$

$$= i 4\pi^2 \frac{m}{2} (p + p')^\mu \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3)}{\tilde{\psi}(0)} dx_1 dx_2$$

avec une intégration dans le domaine $0 \leq x_3 = 1 - (x_1 + x_2) \leq 1$

$$= i 4\pi^2 \frac{1}{2m} (p + p')^\mu \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3) m^2}{\tilde{\psi}(0)} dx_1 dx_2$$

— Résultat pour $F_2(q^2)$ avec $e^2 = 4\pi\alpha$

$$\Gamma_2^\mu = \frac{i(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Num}{Den} d^4k = \left((F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{1}{2m} F_2 (p' + p)^\mu \right)$$

$$\Gamma_2^\mu = \frac{(p + p')^\mu}{2m} \left(\frac{-i\alpha}{\pi} i \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3) m^2}{\tilde{\psi}(0)} dx_1 dx_2 \right)$$

$$F_2 = -\frac{\alpha}{\pi} \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3) m^2}{(-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)} dx_1 dx_2$$

— Dans le cas statique avec : $q^2 = 0$ et $m_0 = 0$

$$F_2(0) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi}$$

— Le moment magnétique interne à l'ordre 2

$$\mu = g \frac{e}{2m} s \quad g = -2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2(\dots) \right)$$

Calcul de $F_1 + F_2$

$$\Gamma_2^\mu = \frac{i(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Num}{Den} d^4k = \left((F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{1}{2} F_2 (p' + p)^\mu \right)$$

— on continue avec le changement de variable

$$\alpha_j \rightarrow x_j \quad \text{avec } x_j = \frac{\alpha_j}{x_0} \text{ avec } x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

— on intègre sur $x_0 \in [0, \infty]$ et x_1, x_2 sur $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$

$$= 4\pi^2 \int_{x_i} \int_0^\infty h_1(x_j, q^2) \exp ix_0(\tilde{\psi}(0) + i0) \left| \frac{J}{x_0^2} \right| dx_0 dx_1 dx_2$$

avec $\tilde{\psi}(0) = (-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)$ et

$$\begin{aligned} h_1(x_j, q^2) &= \left[(m^2 - \frac{q^2}{2}) - (x_2 + x_3)(2m^2 - \frac{q^2}{2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} ((x_2 + x_3)^2 m^2 - x_2 x_3 q^2) \right] + \frac{i}{2 x_0} \\ &= \tilde{h}_1(x_j, q^2) + \frac{i}{2 x_0} \end{aligned}$$

$$(F_1 + F_2) = \frac{-i\alpha}{\pi} \int_{x_i} \int_0^\infty h_1(x_j, q^2) \exp(ix_0(\tilde{\psi}(0) + i0)) dx_0 dx_1 dx_2$$

— Si on soustrait la valeur de la correction à $q = 0$ on obtient une valeur finie qui dépend de q^2 et qui varie avec l'énergie.

— On intègre sur x_0

$$(F_1 + F_2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_i} \left[\frac{\tilde{h}_1(x_j, q^2)}{\tilde{\psi}(0)} + \int_0^\infty \frac{1}{2 x_0} \exp(ix_0(\tilde{\psi}(0) + i0)) dx_0 \right] dx_1 dx_2$$

avec $\tilde{\psi}(0) = (-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)$ et

$$\tilde{h}_1(x_j, q^2) = (m^2 - \frac{q^2}{2}) - (x_2 + x_3)(2m^2 - \frac{q^2}{2}) + \frac{1}{2} ((x_2 + x_3)^2 m^2 - x_2 x_3 q^2)$$

$$F_2 = -\frac{\alpha}{\pi} \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3) m^2}{\tilde{\psi}(0)} dx_1 dx_2$$

— Divergences au voisinage de $x_0 = 0$ résolue par soustraction

$$F_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left[\dots + \int_0^\infty \frac{1}{2 x_0} dx_0 \dots \right]$$

$$F_1(q^2) \rightarrow F_1(q^2) - F_1(0)$$

— Divergence "infra-rouge" au voisinage de $q^2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial q^2}(F_1 + F_2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_i} \left[\frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{\tilde{h}_1(x_j, q^2)}{\tilde{\psi}(0)} \right) + \int_0^\infty \frac{x_2 x_3}{2 \tilde{\psi}(0)} \right] dx_1 dx_2$$

— Finalement (référence 2 page 342)

$$\Gamma^\mu(p', p) = \left(F_1 \gamma^\mu + i F_2 \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \right)$$

avec

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{m_0} - \frac{3}{8} \right)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Conclusion

Pour être complet sur le sujet, il faudrait

- Etudier le terme $F_1(q^2)$ qui est divergent ...
- Etudier la variation de $F_1(q^2)$ avec q^2 qui conduit au comportement asymptotique du couplage électromagnétique (à haute énergie).
- Discuter en général de la renormalisation de QED.

Dans l'annexe 4, nous avons regroupé les formules mathématiques qui aident à la résolution de ce programme.

références

- 1 L. Landau & E. Lifchitz *Electrodynamique quantique* MIR Edt 1976
- 2 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory* Macgraw Hill 1980
- 3 F. Halzen & al. *Quarks and leptons* John Wiley 1984
- 4 L.H. Ryder *Quantum Field Theory* Cambridge U.P. 1985
- 5 B. de Wit & al. *Field theory in particle physics* North holland 1986
- 6 S.J. Chang *Introduction to Quantum Field Theory* World Scientific 1990
- 7 I. Aitchison & al. *Gauge theories in particle physics* Inst of Physics 2004
- 8 [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur_de_Landé](http://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur_de_Landé)
- 9 H. Bethe & E Salpeter *Quantum mechanics of one and two electron atoms* Springer verlag 1957
- 10 [https ://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magnétique_anomal](https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magnétique_anomal)
- 11 G.B. Folland *Quantum Field Theory : A Tourist Guide for Mathematicians*
*** 2008

Appendice 1

Calcul du numérateur de $\Gamma_2^\mu(p', p)$

— Amplitude quantique $\mathcal{M}_2$ avec $e^2 = 4\pi\alpha$

$$\mathcal{M}_2 = -ie \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

$$\Gamma_2^\mu(p', p) = i(-ie)^2 (2\pi)^{-4} \int \gamma^\nu G(p'_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma_\nu \times (k^2)^{-1} d^4k$$

$$\Gamma_2^\mu(p', p) = F_1(q^2) \gamma^\mu + i F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m}$$

Γ_2^μ est une matrice (4,4) sans dimension physique $\propto \alpha$

— Pour le Calcul de $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ à l'ordre 2 nous avons

$$\Gamma_2^\mu = i \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Num}{Den} d^4k = \left(F_1(q^2) \gamma^\mu + i F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \right)$$

— Numérateur et dénominateur

$$Num = \gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$Den = (k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)(k^2 + i0)$$

— Algèbre de Dirac : $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$

Propriétés des matrices γ de Dirac

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad 2i \sigma^{\mu\nu} q_\nu = -[\gamma^\mu, (\gamma \cdot q)]$$

$$\gamma_\mu \sigma^{\mu\nu} = 3i\gamma^\nu = -\sigma^{\mu\nu} \gamma_\mu \quad \text{Tr } 1 = 4 \quad \text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^\nu \gamma_\nu = 4 \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = 4 g^{\mu\rho}$$

$$\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu = -2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma + 2\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu$$

$$(a.\gamma)^2 = a^2$$

$$(a.\gamma)\gamma^\nu = -\gamma^\nu(a.\gamma) + 2 a^\nu$$

— Calcul du Numérateur

$$Num = \gamma^\nu((p'_1.\gamma) + m)\gamma^\mu((p_1.\gamma) + m)\gamma_\nu = A + B + C$$

$$A = \gamma^\nu(p'_1.\gamma)\gamma^\mu(p_1.\gamma)\gamma_\nu$$

$$B = m \gamma^\nu \gamma^\mu (p_1.\gamma) \gamma_\nu + m \gamma^\nu (p'_1.\gamma) \gamma^\mu \gamma_\nu$$

$$C = m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu$$

$$\text{avec} \quad p_1 = p + k \quad p'_1 = p' + k \quad q = p' - p$$

— les termes en m^2

$$C = m^2(-2\gamma^\mu)$$

— les termes en m

$$\begin{aligned} B &= (\gamma^\nu \gamma^\mu (-\gamma_\nu (p_1.\gamma) + 2 p_1^\nu) + (-(p'_1.\gamma) \gamma^\nu + 2 (p'_1)^\nu) \gamma^\mu \gamma_\nu) \\ &\quad (+2\gamma^\mu (p_1.\gamma) + 2 (p_1.\gamma) \gamma^\mu) + (2(p'_1.\gamma) \gamma^\mu + 2\gamma^\mu (p'_1.\gamma)) \\ &= 4m (p_1 + p'_1)^\mu \end{aligned}$$

— terme en pp'

$$A = (-(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\nu + 2 (p'_1)^\nu) \gamma^\mu (-\gamma_\nu (p_1 \cdot \gamma) + 2 p_{1\nu})$$

$$-2(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 2\gamma^\mu (p'_1 \cdot \gamma) (p_1 \cdot \gamma) - 2(p'_1 \cdot \gamma) (p_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu$$

les deux derniers termes ci-dessus

$$-2(-(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu + 2(p'_1)^\mu) (p_1 \cdot \gamma) - 2(p'_1 \cdot \gamma) (-\gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 2p_1^\mu)$$

$$= +4(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) - 4((p'_1 \cdot \gamma) p_1^\mu + (p'_1)^\mu (p_1 \cdot \gamma))$$

total des termes en pp'

$$A = +2(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 4((p'_1 \cdot \gamma) p_1^\mu + (p'_1)^\mu (p_1 \cdot \gamma))$$

En appliquant l'équation de Dirac aux spineurs externes :

à gauche $(p'_1 \cdot \gamma) = (k \cdot \gamma) + m$ à droite $(p_1 \cdot \gamma) = (k \cdot \gamma) + m$

$$A = +2((k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((k \cdot \gamma) + m) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 4((k \cdot \gamma) + m) (p_1^\mu + (p'_1)^\mu)$$

$$D = +2((k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((k \cdot \gamma) + m)$$

$$D = +2((k \cdot \gamma) + m)((-k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu + 4(k \cdot \gamma) k^\mu = 2(-k^2 + m^2) \gamma^\mu + 4(k \cdot \gamma) k^\mu$$

Le numérateur (grand total) :

$$+4 \{ \gamma^\mu ((p_1 \cdot p'_1) - k^2/2) + (k \cdot \gamma) (k - (p_1 + p'_1))^\mu + m k^\mu \}$$

— Soit pour le numérateur*

$$(Num) = \gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$= +4 \{ \gamma^\mu ((p + k \cdot p' + k) - k^2/2) - (k \cdot \gamma)(k + (p + p'))^\mu + m k^\mu \}$$

$$(Num) = 4 \{ ((p + k \cdot p' + k) - k^2/2) \gamma^\mu - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \}$$

— Le numérateur (grand total) :

$$(Num) = A(k) \gamma^\mu + B^\mu(k)$$

donc

$$A = 4 \left((p \cdot p') + (k \cdot (p + p')) + k^2/2 \right)$$

$$B^\mu = 4 \left(-(k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \right)$$

*. référence [2] page 339

Appendice 2

Evaluation de $\hat{f}(z)$

— Notations

cte	$e^2 = 4\pi\alpha$
masse de l'électron	m
masse du photon	$m_0 = 0$

Cnématique

$$p_1 = p + k \quad p'_1 = p' + k \quad q = p' - p = p'_1 - p_1$$

$$(Num) = 4 \left\{ \gamma^\mu ((p + k) \cdot p' + k) - k^2/2 - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \right\}$$

$$Den = (k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)$$

— Principe du calcul de $\Gamma_2(z)$ / référence 2 page 339

1. Formules utiles : Voir appendice 4
2. Introduction des intégrations sur

$$\alpha_j \in [0, \infty] \quad j = 1, 2, 3 \text{ et avec } x_0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\int_k \frac{h(k)}{a_1 a_2 a_3} d^4 k = i^3 \int \int \int_0^\infty d\alpha_i \int_k h(k) \exp i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) d^4 k$$

$$a_1 = (k^2 - m_0^2 + i0), \quad a_2 = (k^2 + 2(p' \cdot k) + i0), \quad a_3 = (k^2 + 2(p \cdot k) + i0)$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) = (x_0 k^2 + 2k \cdot (\alpha_2 p' + \alpha_3 p) - \alpha_1 m_0^2 + i0)$$

3. on passe à $\hat{f}(z)$

$$h(k) = \exp(ikz) \quad k = (k_0, \vec{k}) \text{ et } z = (z_0, \vec{z})$$

$$\hat{f}(z) = \int_k \frac{\exp(ikz)}{Den} d^4k$$

$$\hat{f}(z) = i^3 \int_0^\infty d\alpha_i \int_k \exp i(kz + x_0 k^2 + 2k \cdot (\alpha_2 p' + \alpha_3 p) - \alpha_1 m_0^2 + i0) d^4k$$

4. on introduit un changement de variable

$$k \rightarrow k + x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})$$

$$\hat{f}(z) = (-i)^3 \int_0^\infty d\alpha_i \int_k \exp i(x_0 k^2 - \alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})^2 + i0) d^4k$$

voir annexe 3

$$\int_k \exp i(x_0 k^2 + i0) d^4k = -i(\frac{\pi}{x_0})^2$$

Soit la formule de base de la réf 2 page 339 ()

$$\hat{f}(z) = \pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) d\alpha_i$$

avec

$$\psi(z) = (-\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})^2)$$

Appendice 4

Quelques notes mathématiques utiles*

— Quelques formules d'intégration utiles

1. Fonction de Heaviside $\Theta(t)$

$$\Theta(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{x - i0} dx \quad \Theta(t) = 1 \text{ ou } 0 \text{ si } t > 0 \text{ ou } t < 0$$

2. Intégration sur les complexes

$$\frac{1}{(a_1 + i0)} = (-i) \int_0^{\infty} \exp i(\alpha_1(a_1 + i0)) d\alpha_1$$

application

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i0} = \int_0^{\infty} \exp(i\alpha(p^2 - m^2 + i0)) d\alpha$$

3. deuxième formule réf 2 page 296

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha k^2) dk = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(on intègre sur C la nouvelle variable $\sqrt{\alpha} k = \sqrt[2]{i} x$)
dans l'espace à 4 D avec la signature $+- --$

$$A_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha k^2) d^4k = (e^{i\pi/4})(e^{-i\pi/4})^3 \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 = -i \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$$

*. référence 1 pages 702 référence 2 pages 295 et 304

4. Exemple : le cas qui nous intéresse avec $n = 3$

$$\hat{f}(z) = \int_{n=3} = \int_{R^4} \frac{(Num)}{Den} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$Num = \exp(ikz)$$

$$Den = a_1 a_2 a_3 = (k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 + 2(p'.k) + i0)(k^2 + 2(p.k) + i0)$$

$$\hat{f}(z) = \frac{(-i)^3}{(2\pi)^4} \int_{R^4} \int_0^\infty \exp i(kz + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + i0) d^4 k d\alpha_j$$

Changements de variable

$$\tilde{p} = \alpha_1 p' + \alpha_2 p \text{ et } x_0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

L'argument de l'exponentielle devient

$$arg = kz + x_0 k^2 + 2(k.\tilde{p}) - m_0 \alpha_1$$

$$k \rightarrow k + x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})$$

$$arg = x_0 k^2 - x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})^2 - m_0^2 \alpha_1$$

$$\hat{f}(z) = \frac{(-i)^3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \exp i(-x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})^2 - m_0^2 \alpha_1 + i0) d\alpha_j$$

$$\times \int_{R^4} \exp i(x_0 k^2 + i0) d^4 k$$

$$\int_{R^4} \exp i(x_0 k^2 + i0) d^4 k = -i(\frac{\pi}{x_0})^2$$

soit

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

$$\text{avec } x_2 = \alpha_2/x_0 \quad x_3 = \alpha_3/x_0 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\psi(z) = x_0 \left(-(x_2 p + x_3 p + \frac{z}{2x_0})^2 - m_0^2 x_1 \right)$$

— Calcul des intégrales de Feynman[†]

1. Lemme 1

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 a_1 + x_2 a_2)^2} \delta(x_1 + x_2 - 1)$$

2. Conséquence (référence 2 page 350)

$$\frac{1}{(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \lambda)} \delta(x_1 + x_2 - 1)$$

3. Généralisation : (domaine d'intégration des x_i)

$$\text{si } 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1 - x_1 \quad 0 < x_{n-1} < (1 - \dots - x_{n-2})$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^{\max} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}}{(x_1 a_1 + x_2 a_2 \dots + x_n a_n)^n}$$

4. Application

$$\int \frac{d^4 k}{a_1 a_2 \dots a_n} = \int_0^{\max} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \int \frac{d^4 k}{(x_1 a_1 + x_2 a_2 \dots + x_n a_n)^n}$$

†. (référence 1 pages 702)

5. Démonstration du théorème général par récurrence

$$I_n = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1 \dots - x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{(a_1 x_1 \dots + a_n x_n)^n}$$

$$\text{avec } x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$I_n = \frac{1}{a_1 \dots a_n}$$

- Primitive par rapport à x_{n-1}

$$F(x_{n-1}) = \frac{1}{-(n-1)(a_{n-1}-a_n)} (a_1 x_1 + \dots a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n)^{-n+1}$$

$$\Delta F = [F(x_n = 0) - F(x_{n-1} = 0)]$$

$$\Delta F = \frac{1}{(n-1)(-a_{n-1}+a_n)} \left\{ \frac{1}{(a_1 x_1 \dots + a_{n-1} x_{n-1})^{n-1}} - \frac{1}{(a_1 x_1 \dots + a_n x_n)^{n-1}} \right\}$$

avec $x_{n-1} = 1 - x_1 \dots - x_{n-2}$ et $x_n = 1 - x_1 \dots - x_{n-2}$

- intégration sur x_{n-1} en utilisant la propriété à l'ordre $n-1$:

$$I_n = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1 \dots} dx_{n-2} \Delta F$$

$$I_n = (n-1) \frac{1}{(n-1)(-a_{n-1}+a_n)} \left\{ \frac{1}{a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 \dots a_{n-2} a_n} \right\}$$

$$I_n = \frac{1}{a_1 \dots a_n}$$