

Université de Caen

LMNO

# Moment magnétique anomal des fermions de Dirac 2

**C. LONGUEMARE**

13-20 octobre 2015

## Plan

1. Généralités en théorie quantique
2. Expression générale du courant de fermions
3. L'électromagnétisme à l'ordre 2
4. Les graphes de Feynman et l'amplitude quantique
5. Le cas de la correction de vertex
6. Le moment magnétique à l'ordre 2

$$\mu = g \frac{e}{2m} s \quad g = -2\left(1 + \alpha \frac{1}{2\pi} + \alpha^2(\dots)\right)$$

références 1 pages 615 et 620 références 2 347 et 335

## Constantes et conventions

| $g_{\mu\nu}$ | métrique                    | + - - -                     | unités             |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|
| $c$          | vitesse de la lumière       | $2,998 \cdot 10^8$          | $\text{m.s}^{-1}$  |
| $\hbar$      | constante de Planck $/2\pi$ | $1,05457168 \cdot 10^{-34}$ | J.s                |
| $e$          | charge élémentaire          | $1,60217653 \cdot 10^{-19}$ | C                  |
| $\alpha$     | cte de structure fine       | $137,036^{-1}$              | 0                  |
| $m$          | électron                    | $0,510998918$               | MeV/c <sup>2</sup> |
| $M_p$        | proton                      | $938,272029$                | ...                |
| $M_n$        | neutron                     | $939,565360$                | ...                |

Nous utilisons le système d'unités des hautes énergies

$$\hbar = 1 \quad c = 1 \quad \epsilon_0 = 1$$

soit

$$e^2 = 4\pi\alpha$$

# Graphe et amplitude quantiques

Considérons la transition entre un état initial et final constatés à l'échelle macroscopique

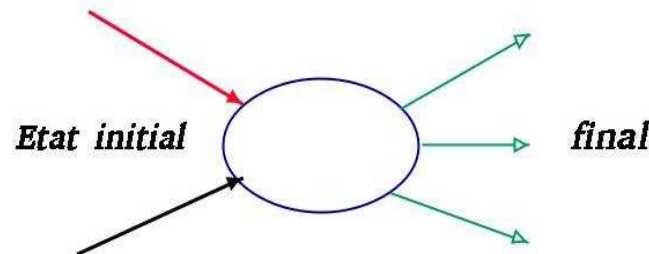


figure 3

- L'espace de Fock est l'espace des états macroscopiques de particules libres propres de  $p$  et "stationnaires" à l'infini
- L'amplitude de probabilité  
Ce qui est accessible à l'expérimentation c'est la probabilité de transition entre un état initial (de Fock) vers un autre état final de cet espace.  
Par principe de la *mécanique quantique*, cette probabilité peut s'obtenir en calculant le module au carré de l'amplitude de transition qui est un produit scalaire dans l'espace de Fock.
- La dynamique est contenue dans l'opérateur dit de "scattering"  $\mathcal{S}$ , les amplitudes de transition sont données par les éléments de  $\mathcal{S}$ .

$$A = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle = \mathcal{S}_{f,i} = \delta_{f,i} - i T_{f,i}$$

avec

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp \left( + \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}(x) d^4x \right) \quad (1)$$

$$\mathcal{S} = 1 + \frac{i}{1!} \int [\mathcal{L}_{int}(x)] d^4x + \frac{i^2}{2!} \mathcal{T} \int [\mathcal{L}_{int}(x)] [\mathcal{L}_{int}(y)] d^4y d^4x + \dots \quad (2)$$

— Le principe de moindre action est associé à la stabilité de phase de l'opérateur de "scattering"  $\mathcal{S}$  avec

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e J_\mu(x) A^\mu(x)$$

$$\mathcal{S} = 1 + (-ie) \frac{1}{1!} \int [J_\mu(x) A^\mu(x)] d^4x +$$

$$(-ie)^2 \frac{1}{2!} \mathcal{T} \int [J_\mu(x) A^\mu(x)] [J_\mu(y) A^\mu(y)] d^4y d^4x + \dots$$

# Graphe et amplitude électromagnétiques

Considérons la diffusion d'un électron sur un champ électromagnétique  $A^\mu(x)$

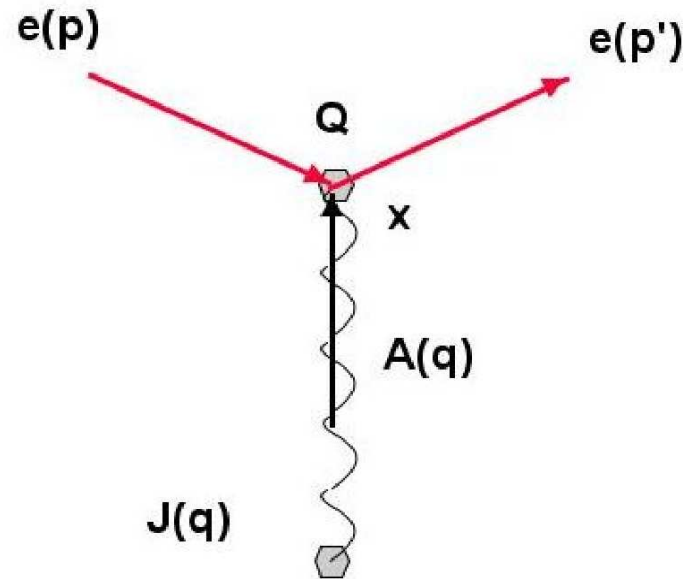


figure 4

- L'espace de Fock , c'est l'espace des spineurs à un électron  $\sim \psi(x)$
- Amplitude de transition entre deux états asymptotiques propres de  $p$

$$\mathcal{M} \in \mathcal{C} = -ie \int J_\mu(x) A^\mu(x) d^4x$$

$$\mathcal{M}_1 \in \mathcal{C} = -ie \bar{u}'(p') \gamma^\mu u(p) \hat{A}_\mu(q) \quad q = p' - p$$

## Amplitude quantique (suite)

---

— Développons  $\gamma^\mu u(p)$  avec  $q = p' - p$  et  $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$

$$\gamma^\mu (\gamma \cdot p) u(p) = m \gamma^\mu u(p) \text{ et } \bar{u}'(p') (\gamma \cdot p') \gamma^\mu = m \bar{u}'(p') \gamma^\mu$$

$$\text{donc } 2m \bar{u}'(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}'(p') ((p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu) u(p)$$

$$\mathcal{M}_1 = -ie \hat{A}_\mu(q) \times \bar{u}'(p') \gamma^\mu u(p)$$

$$= -ie \hat{A}_\mu(q) \times \bar{u}'(p') \left( \frac{1}{2m} (p + p')^\mu + \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p) \quad \text{1er ordre}$$

1. Cette expression de  $\mathcal{M}_1$  sépare l'électrique et le magnétique.
2. Si  $p' = p$  et  $q = 0$  on reste avec le premier terme
3. si la diffusion est élastique  $p'^0 = p^0$  et  $q^0 = 0$  le spin est uniquement couplé au champ magnétique

— Corrections à l'ordre 2 de QED, on attend :

$$+\mathcal{M}_2 = -ie \hat{A}_\mu(q) \times \bar{u}'(p') \left( K_1(q^2) \gamma^\mu + i \frac{1}{2m} K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p)$$

$$e = e(1 + K_1(q^2)) \quad g = -2 (1 + K_1(q^2) + K_2(q^2))$$

A la limite classique ,  $K_1(0) = 0$  et  $K_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}$  soit pour l'électron

$$g = -2,002323 \text{ comparé à } -2,00231930 \quad \delta g \sim +4 \cdot 10^{-6}$$

## Corrections au courant de fermions de spin 1/2

---

— A l'ordre 2 de QED, pour une particule de Dirac, on attend :

$$\mathcal{M}_1 = -ie \hat{A}_\mu(q) \times \bar{u}'(p') (\gamma^\mu) u(p)$$

$$\mathcal{M}_2 = -ie \hat{A}_\mu(q) \times \bar{u}'(p') \left( K_1(q^2) \gamma^\mu + i K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \right) u(p)$$

$$e = e(1 + K_1(0)) \quad g = -2(1 + K_1(0) + K_2(0))$$

| pour $e^-$ | $K_1(0)$ | $K_2(0)$              |
|------------|----------|-----------------------|
| ordre 1    | 1        | 0                     |
| ordre 2    | 1        | $\frac{\alpha}{2\pi}$ |

— On montre  $K_1(0) = 0$  et  $K_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}$

| pour $e^-$ | $g$       | facteur de Landé |                   |
|------------|-----------|------------------|-------------------|
| ordre 1    | ordre 2   | expérience       | $\delta g$        |
| -2         | -2,002323 | -2,002319        | $\sim 4, 10^{-6}$ |



## Graphes de QED au 2ième ordre

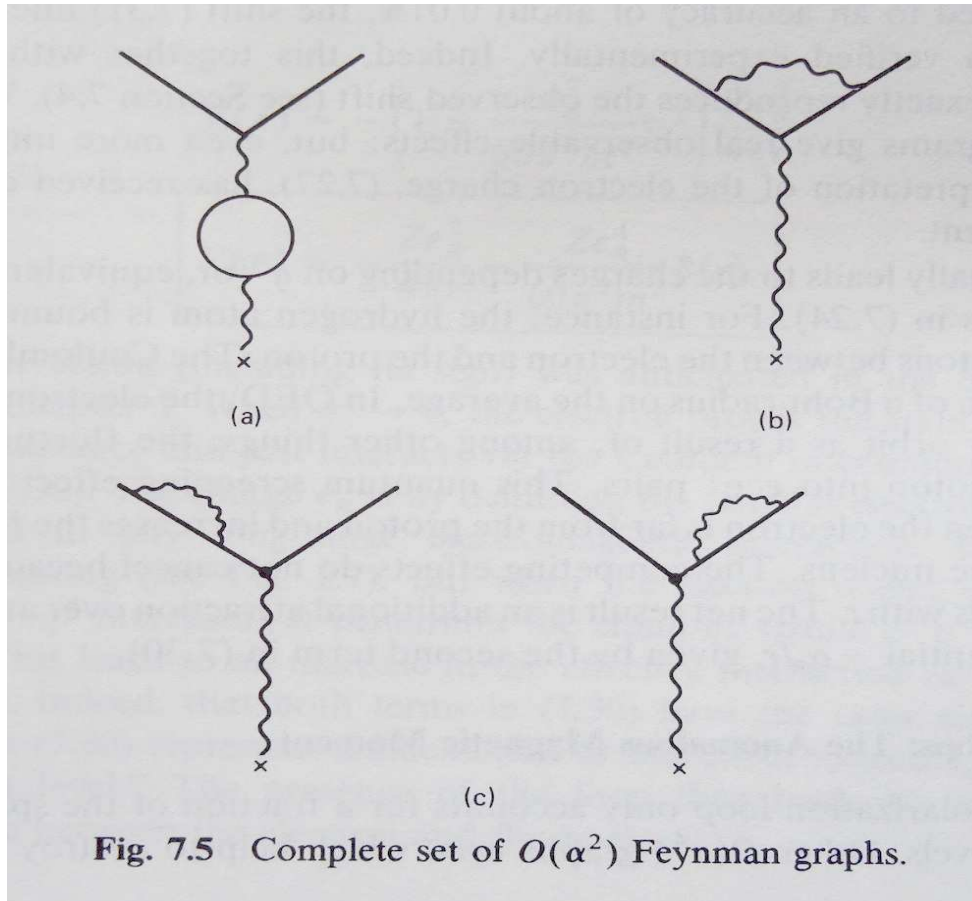


figure 3\*

\*. référence 3 page 160

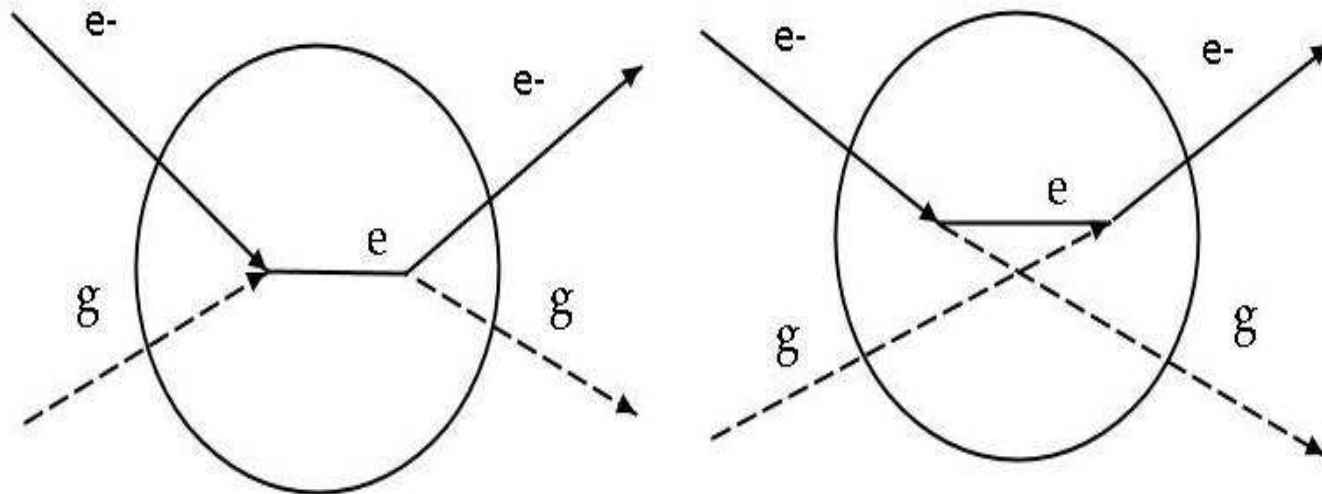
## Qu'est-ce qu'un graphe de QED

---

- C'est un ensemble de segments qui relient des points
- Le graphe définit un chemin entre les états initial et final
- A chaque graphe correspond une amplitude quantique
- Les points sont appelés vertex de l'interaction  $\mathcal{L}_{int}(x)$   
Le nombre de points est l'"ordre" du graphe
- Quelques exemples élémentaires
  1. Effet Compton , photoélectrique
  2. La création de paires  $e^+ e^-$
  3. Le rayonnement de freinage

## effet Compton à l'ordre 2

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$



## Propagateurs des champs libres : $\psi$ et $A$

---

— Les équations libres

$$((i\partial.\gamma) - m) \psi(x) = 0$$

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = (g_\mu^\nu \partial^2 - \partial_\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = 0$$

— Les fonctions de Green associées (propagateurs)

$$((i\partial.\gamma) - m) G(x - y) = \delta^4(x - y)$$

$$(g_\mu^\nu \partial^2 - \partial_\mu \partial^\nu) D_\rho^\mu(x - y) = g_\rho^\nu \delta^4(x - y)$$

— Dans l'espace des transformées de Fourier

$$G(p) = (p.\gamma + m)/(p^2 - m^2 + i\epsilon) \sim p^{-1}$$

$$D_\rho^\mu(q) = -g_\rho^\mu/(q^2 + i\epsilon) \sim q^{-2}$$

Règles de Feynman pour QED (résumé)  
références [1]-375 [2]-698 [3]-149

TABLE 6.2

Feynman Rules for  $-i\mathcal{M}$ 

|                                                               |                                                                                       | Multiplicative<br>Factor           |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| ● External Lines                                              |                                                                                       |                                    |
| Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)                          |     | $u, \bar{u}$                       |
| Spin 1 photon (in, out)                                       |     | $\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$     |
| ● Internal Lines—Propagators (need $+i\epsilon$ prescription) |                                                                                       |                                    |
| Spin $\frac{1}{2}$ fermion                                    |     | $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$ |
| Massless spin 1 photon<br>(Feynman gauge)                     |     | $\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$         |
| ● Vertex Factors                                              |                                                                                       |                                    |
| Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$ )                      |  | $ie\gamma^\mu$                     |

Loops:  $\int d^4k/(2\pi)^4$  over loop momentum; include  $-1$  if fermion loop and take the trace of associated  $\gamma$ -matrices

Identical Fermions:  $-1$  between diagrams which differ only in  $e^- \leftrightarrow e^-$  or initial  $e^- \leftrightarrow$  final  $e^+$

| Lignes Extérieures                     | (in)           | (out)                                 |
|----------------------------------------|----------------|---------------------------------------|
| d'électrons                            | $u(p)$         | $\bar{u}(p)$                          |
| de positons                            | $\bar{v}(-p)$  | $v(-p)$                               |
| de photons                             | $\epsilon_\mu$ | $\epsilon_\mu^*$                      |
| Lignes Intérieures                     |                |                                       |
| d'électrons                            |                | $i((p.\gamma) - m + i\epsilon)^{-1}$  |
| de photons                             |                | $-ig^{\mu\nu} (p^2 + i\epsilon)^{-1}$ |
| Facteur de vertex                      |                |                                       |
| interaction d'électron QED             | $e = - e $     | $ie\gamma^\mu$                        |
| conservation de p                      |                | $(2\pi)^4 \delta^4(p_{in} - p_{out})$ |
| Intégration sur les lignes intérieures |                | $\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$               |

## Degré de divergence d'un graphe de QED

---

- Soit un graphe d'ordre  $n$  avec  $N_\gamma$  et  $N_e$  particules asymptotiques
- Nombre de segments intérieurs  
électrons :  $(2n - N_e)/2$  photons :  $(n - N_\gamma)/2$
- Nombre d'intégrations sur les 4-impulsions intérieures

$$N_1 = 2(2n - N_e) + 2(n - N_\gamma) - 4(n - 1) = 2n - 2N_e - 2N_\gamma + 4$$

- Comptage des puissances au dénominateur

$$N_2 = (2n - N_e)/2 + (n - N_\gamma) = 2n - (N_e/2) - N_\gamma$$

- Degré de divergence du graphe

$$d = N_1 - N_2 = -\frac{3}{2}N_e - N_\gamma + 4$$

- Comportement de l'amplitude à  $p \rightarrow \infty$

$$\mathcal{M} \sim \int p^{-N_2} d^{N_1} p$$

exemples :

| $N_e$ | $N_\gamma$ | $d$ |
|-------|------------|-----|
| 2     | 0          | 1   |
| 0     | 2          | 2   |
| 2     | 1          | 0   |
| 2     | 2          | -1  |



## Correction de vertex au 2ieme ordre

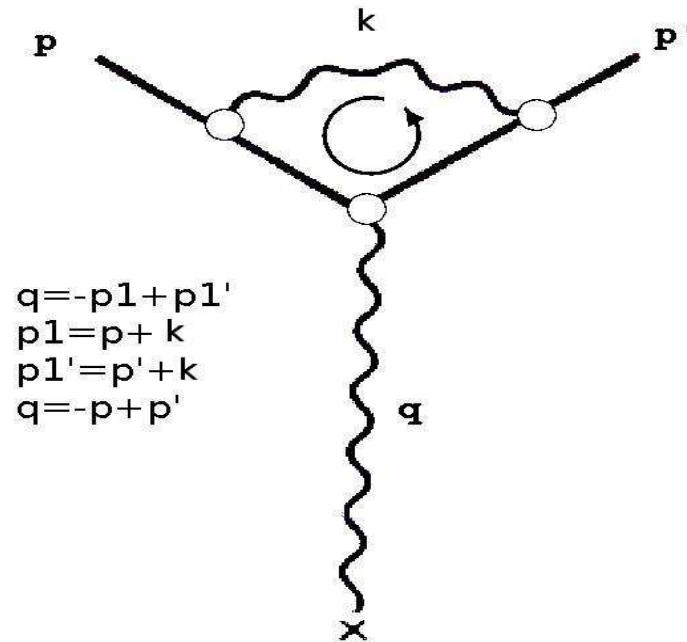


figure 4

- degré de divergence avec  $N_e = 2$   $N_\gamma = 1$  :  $d = 0$  (divergence log)
- Amplitude quantique  $\mathcal{M}_2$  avec  $e^2 = 4\pi\alpha$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2 &= (-ie)^3 \int \bar{u}'(p') \gamma^\nu iG(p_1') \gamma^\mu iG(p_1) \gamma^\lambda u(p) \times iD_{\nu\lambda}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \hat{A}_\mu(q) \\
 &= -ie \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \hat{A}_\mu(q)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma^\mu(p', p) = i(-ie)^2 \int \gamma^\nu G(p_1') \gamma^\mu G(p_1) \gamma_\nu \times (k^2)^{-1} d^4k (2\pi)^{-4}$$

$$\Gamma^\mu(p', p) = K_1(q^2) \gamma^\mu + i K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m}$$

**Remarque** :  $\Gamma^\mu$  est une matrice (4,4) sans dimension physique  $\propto \alpha$

# Analyse des divergences

---

- Identification pour calculer  $K_2(0)$

$$\Gamma^\mu(p', p) = i(-ie)^2 \int \gamma^\nu((p_1' \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu \times$$

$$((p_1'^2 - m^2 + i0)(p_1^2 - m^2 + i0)(k^2 + i0))^{-1} (2\pi)^{-4} d^4k$$

avec

|               |                 |                           |
|---------------|-----------------|---------------------------|
| $p_1 = p + k$ | $p_1' = p' + k$ | $q = p' - p = p_1' - p_1$ |
|---------------|-----------------|---------------------------|

- Calcul du numérateur de  $\Gamma^\mu$  ([voir Annexe 1](#)) référence [2] page 339

**le numérateur**

$$\gamma^\nu((p_1' \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$= +4 \{ \gamma^\mu ((p + k \cdot p' + k) - 2k^2/2) - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \}$$

**le dénominateur**

$$(k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)(k^2 + i0)$$

- Divergence ("logarithmique") à la limite ultra-violette :  $k \rightarrow \infty$

$$\int k^{-4} d^4k \sim \int x^{-1} dx$$

- Divergence à  $q = 0$  soit  $p = p'$  (sans interaction)

$$\Gamma^\mu(p, p) \sim \infty$$

- Divergence infra-rouge à  $k^2 \sim 0$  : on donne une masse  $m_0$  au photon

$$(k^2 + i0)^{-1} \rightarrow (k^2 - m_0^2 + i0)^{-1}$$

## Solution (réf [2])

---

réf 2 Itsykson & Zuber page 339-340 calcul par intégration  
Calcul complet dans l'annexe 2

— Soustraction des  $\infty$

$$\Gamma_R^\mu(p, p') = \Gamma^\mu(p, p') - \Gamma^\mu(p, p)$$

— Pour  $K_2(q^2)$

$$K_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \frac{m^2 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3)}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 m_0^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

— Intégration avec

$$(p.p') = m^2 \cosh(\theta) \text{ soit } q^2 = -4m^2 \sinh(\theta/2)$$

$$K_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\sinh \theta} \Rightarrow K_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

— idem pour  $K_1(q^2)$  avec

$$K_1(0) = 0$$

## Solution (réf [1])

---

par Landau & Lifchitz pages 615-619

en utilisant les propriétés analytiques des fonctions  $K_{i=1,2}(q^2)$  (voir Annexe 4)

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2(m^2 - (p' \cdot p))$$

— Propriétés analytiques dans la variable  $z = q^2$

$$K_i^*(z) = K_i(z^*)$$

— Domaines physiques  $z \in \mathcal{R}$

|                    |                |
|--------------------|----------------|
| Diffusion          | $z < 0$        |
| Etats liés         | $0 < z < 4m^2$ |
| Création de paires | $4m^2 < z$     |

— Application du théorème des résidus avec  $x \in \mathcal{R}$

$$\Pi(z) = \frac{z^n}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } \Pi(x)}{x^n (x - z - i0)} dx$$

**Application** au calcul de  $K_2(0)$  avec  $n = 0$

$$K_2(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } K_2(x)}{x - i0} dx = \frac{\alpha}{2\pi}$$

D'après  $\Gamma^\mu(p', p)$ , pour  $x = q^2 > 4m^2$        $\text{Im } K_2(x) = \alpha \frac{m^2}{\sqrt{x(x-4m^2)}}$

## Conclusion

---

- Le calcul du moment magnétique de spin de l'électron a eu une importance historique dans l'établissement de QED (J. Schwinger 1949)
- Les calculs ont été poussés jusqu'aux limites de QED, c'est à dire jusqu'aux énergies "virtuelles" qui nécessitent la prise en compte de l'interaction forte.
- Pour aller plus loin, il faudrait
  1. justifier la cohérence de la procédure de soustraction par rapport aux principes de QED
  2. faire le lien entre l'invariance de jauge et le programme de renormalisation.

## références

---

- 1 L. Landau & E. Lifchitz *Electrodynamique quantique* MIR Edt 1976
- 2 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory* Macgraw Hill 1980
- 3 F. Halzen & al. *Quarks and leptons* John Wiley 1984
- 4 L.H. Ryder *Quantum Field Theory* Cambridge U.P. 1985
- 5 B. de Wit & al. *Field theory in particle physics* North holland 1986
- 6 S.J. Chang *Introduction to Quantum Field Theory* World Scientific 1990
- 7 I. Aitchison & al. *Gauge theories in particle physics* Inst of Physics 2004
- 8 [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur\\_de\\_Landé](http://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur_de_Landé)

## Appendice 1 : Calcul du numérateur de $\Gamma^\mu(p', p)$

---

— Amplitude quantique  $\mathcal{M}_2$  avec  $e^2 = 4\pi\alpha$

$$\mathcal{M}_2 = -ie \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

$$\Gamma^\mu(p', p) = i(-ie)^2 (2\pi)^{-4} \int \gamma^\nu G(p'_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma_\nu \times (k^2)^{-1} d^4k$$

$$\Gamma^\mu(p', p) = K_1(q^2) \gamma^\mu + i K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m}$$

$\Gamma^\mu$  est une matrice (4,4) sans dimension physique  $\propto \alpha$

— Pour le **Calcul de  $K_1(q^2)$  et  $K_2(q^2)$**  à l'ordre 2 nous avons

$$\Gamma^\mu = i \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Num}{Den} d^4k = \left( K_1(q^2) \gamma^\mu + i K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \right)$$

— **numérateur et dénominateur**

$$Num = \gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$Den = (k^2 - 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 - 2(p \cdot k) + i0)(k^2 + i0)$$

— Algèbre de Dirac :  $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$

Propriétés des matrices  $\gamma$  de Dirac

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad 2i \sigma^{\mu\nu} q_\nu = -[\gamma^\mu, (\gamma \cdot q)]$$

$$\gamma_\mu \sigma^{\mu\nu} = 3i\gamma^\nu = -\sigma^{\mu\nu} \gamma_\mu \quad \text{Tr } 1 = 4 \quad \text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^\nu \gamma_\nu = 4 \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = 4 g^{\mu\rho}$$

$$\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu = -2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma + 2\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu$$

$$(a.\gamma)^2 = a^2$$

$$(a.\gamma)\gamma^\nu = -\gamma^\nu(a.\gamma) + 2 a^\nu$$

— Calcul du Numérateur

$$Num = \gamma^\nu((p'_1.\gamma) + m)\gamma^\mu((p_1.\gamma) + m)\gamma_\nu = A + B + C$$

$$A = \gamma^\nu(p'_1.\gamma)\gamma^\mu(p_1.\gamma)\gamma_\nu$$

$$B = m \gamma^\nu \gamma^\mu (p_1.\gamma) \gamma_\nu + m \gamma^\nu (p'_1.\gamma) \gamma^\mu \gamma_\nu$$

$$C = m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu$$

$$\text{avec} \quad p_1 = p + k \quad p'_1 = p' + k \quad q = p' - p$$

— les termes en  $m^2$

$$C = m^2(-2\gamma^\mu)$$

— les termes en  $m$

$$\begin{aligned} B &= (\gamma^\nu \gamma^\mu (-\gamma_\nu (p_1.\gamma) + 2 p_1^\nu) + (-(p'_1.\gamma) \gamma^\nu + 2 (p'_1)^\nu) \gamma^\mu \gamma_\nu) \\ &\quad (+2\gamma^\mu (p_1.\gamma) + 2 (p_1.\gamma) \gamma^\mu) + (2(p'_1.\gamma) \gamma^\mu + 2\gamma^\mu (p'_1.\gamma)) \\ &= 4m (p_1 + p'_1)^\mu \end{aligned}$$



— terme en  $pp'$

$$A = (-(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\nu + 2 (p'_1)^\nu) \gamma^\mu (-\gamma_\nu (p_1 \cdot \gamma) + 2 p_{1\nu})$$

$$-2(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 2\gamma^\mu (p'_1 \cdot \gamma) (p_1 \cdot \gamma) - 2(p'_1 \cdot \gamma) (p_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu$$

les deux derniers termes ci-dessus

$$-2(-(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu + 2(p'_1)^\mu) (p_1 \cdot \gamma) - 2(p'_1 \cdot \gamma) (-\gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 2p_1^\mu)$$

$$= +4(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) - 4((p'_1 \cdot \gamma) p_1^\mu + (p'_1)^\mu (p_1 \cdot \gamma))$$

total des termes en  $pp'$

$$A = +2(p'_1 \cdot \gamma) \gamma^\mu (p_1 \cdot \gamma) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 4((p'_1 \cdot \gamma) p_1^\mu + (p'_1)^\mu (p_1 \cdot \gamma))$$

En appliquant l'équation de Dirac aux spineurs externes :

à gauche  $(p'_1 \cdot \gamma) = (k \cdot \gamma) + m$  à droite  $(p_1 \cdot \gamma) = (k \cdot \gamma) + m$

$$A = +2((k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((k \cdot \gamma) + m) + 4(p_1 \cdot p'_1) \gamma^\mu - 4((k \cdot \gamma) + m)(p_1^\mu + (p'_1)^\mu)$$

$$D = +2((k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((k \cdot \gamma) + m)$$

$$D = +2((k \cdot \gamma) + m)((-k \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu + 4(k \cdot \gamma) k^\mu = 2(-k^2 + m^2) \gamma^\mu + 4(k \cdot \gamma) k^\mu$$

Le numérateur ( grand total) :

$$+4 \{ \gamma^\mu ((p_1 \cdot p'_1) - k^2/2) + (k \cdot \gamma)(k - (p_1 + p'_1))^\mu + m k^\mu \}$$

— Soit pour le numérateur \*

$$Num = \gamma^\nu ((p'_1 \cdot \gamma) + m) \gamma^\mu ((p_1 \cdot \gamma) + m) \gamma_\nu$$

$$= +4 \{ \gamma^\mu ((p + k \cdot p' + k) - k^2/2) - (k \cdot \gamma)(k + (p + p'))^\mu + m k^\mu \}$$

$$Num = +4 \{ \gamma^\mu ((p + k \cdot p' + k) - k^2/2) - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \}$$

— Rappel pour le dénominateur

$$Den = (k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)(k^2 + i0)$$

\*. référence [2] page 339

## Appendice 2 : Calcul de l'amplitude quantique

— Amplitude quantique  $\mathcal{M}_2$  avec

|                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| cte                 | $e^2 = 4\pi\alpha$ |
| masse de l'électron | $m$                |
| masse du photon     | $m_0 = 0$          |

$$\mathcal{M}_2 = -ie \bar{u}'(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

$$= i(-ie)^3 (2\pi)^{-4} \int \bar{u}'(p') \gamma^\nu G(p'_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma_\nu u(p) D(k^2) d^4k \hat{A}_\mu(q)$$

$$\mathcal{M}_2 = (-ie) \bar{u}'(p') [K_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2m} K_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

Avec

$$p_1 = p + k \quad p'_1 = p' + k \quad q = p' - p = p'_1 - p_1$$

— La divergence logarithmique en  $p = p'$  : Il faut rappeler que le numérateur est en  $k^2$

— Réécriture de  $\mathcal{M}_2$  en utilisant les propriétés des matrices  $\gamma$  de Dirac

$$\bar{u}'(p') \gamma_\mu (\gamma \cdot p) u(p) = m \bar{u}'(p') \gamma_\mu u(p) \quad \bar{u}'(p') (\gamma \cdot p') \gamma_\mu u(p) = m \bar{u}'(p') \gamma_\mu u(p)$$

$$2m \bar{u}' \gamma^\mu u = \bar{u}' [\gamma^\mu (\gamma \cdot p) + (\gamma \cdot p') \gamma^\mu] u$$

$$\bar{u}' [2m \gamma^\mu] u = \bar{u}' [(p + p')^\mu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, (\gamma \cdot q)]] u$$

$$\bar{u}' [2m \gamma^\mu] u = \bar{u}' [(p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu] u$$

$$\mathcal{M}_2 = (-ie) \bar{u}'(p') [(K_1 + K_2) \gamma^\mu - \frac{1}{2m} (p + p')^\mu K_2] u(p) \hat{A}_\mu(q)$$

$$\mathcal{M}_2 = (-ie) \times i(-ie)^2 \int \bar{u}'(p') \left[ \frac{(Num)}{Den} \right] u(p) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{A}_\mu(q)$$

Equation I

$$\Gamma^\mu(p', p) = (K_1 + K_2) \gamma^\mu - \frac{1}{2m} (p + p')^\mu K_2 = \frac{i(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int \left[ \frac{(Num)}{Den} \right] d^4 k$$

avec

$$(Num) = 4 \left\{ \gamma^\mu ((p + k) \cdot p' + k) - k^2/2 - (k \cdot \gamma)(p + p')^\mu + (m - (k \cdot \gamma)) k^\mu \right\}$$

$$Den = (k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)$$

— Principe du calcul de  $\Gamma$  / référence 2 page 339

1. Formules utiles : Voir annexe 3
2. Introduction des intégrations sur

$$i = 1, 2, 3 \quad \alpha_i \in [0, \infty] \text{ et avec } x_0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_k \frac{f(k)}{a_1 a_2 a_3} d^4 k = \int_k \frac{f(k)}{Den} d^4 k \\ &= i^3 \int \int \int_0^\infty d\alpha_i \int_k f(k) \exp i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) d^4 k \end{aligned}$$

$$a_1 = (k^2 - m_0^2 + i0), \quad a_2 = (k^2 + 2(p' \cdot k) + i0), \quad a_3 = (k^2 + 2(p \cdot k) + i0)$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) = (x_0 k^2 + 2k \cdot (\alpha_2 p' + \alpha_3 p) - \alpha_1 m_0^2 + i0)$$

$$f(k) = \exp(ikz) \quad k = (k_0, \vec{k}) \text{ et } z = (z_0, \vec{z})$$

$$\mathcal{I}(z) = \int_k \frac{\exp(ikz)}{Den} d^4k \quad -i \partial \mathcal{I}(z) = \int_k \frac{k \exp(ikz)}{Den} d^4k$$

$$\mathcal{I}(z) = i^3 \int_0^\infty d\alpha_i \int_k \exp i(kz + x_0 k^2 + 2k \cdot (\alpha_2 p' + \alpha_3 p) - \alpha_1 m_0^2 + i0) d^4k$$

on introduit un chgt de variable

$$k \rightarrow k + x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})$$

$$\mathcal{I}(z) = i^3 \int_0^\infty d\alpha_i \int_k \exp i(x_0 k^2 - \alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})^2 + i0) d^4k$$

voir annexe 1

$$\int_k \exp i(x_0 k^2) d^4k = -i(\frac{\pi}{x_0})^2$$

Soit la formule de base de la réf 2 page 339 (au signe près)

$$\mathcal{I}(z) = -\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(-\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p + \frac{z}{2})^2 + i0) d\alpha_i$$

3. On calcule diverses intégrales par différentiation par rapport à z

| $f(k)$                  | dérivation                                  |
|-------------------------|---------------------------------------------|
| $k_\nu \exp(ikz)$       | $-i\partial_\nu \mathcal{I}(z)$             |
| $k_\nu k_\mu \exp(ikz)$ | $-\partial_\nu \partial_\mu \mathcal{I}(z)$ |

et l'on fait venir les termes dont on a besoin pour le calcul de  $\Gamma$

Prenons  $\mathcal{I}(z)$  sous la forme utilisée dans la réf 2 et introduisons

$$\tilde{p} = \alpha_2 p' + \alpha_3 p$$

$$\tilde{p}^2 = (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) m^2 + 2\alpha_2\alpha_3(p'.p) = -\alpha_2\alpha_3 q^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2$$

et posons

$$\psi(z) = (-\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}(\tilde{p} + \frac{z}{2})^2) = x_0^{-1}(-x_0\alpha_1 m_0^2 - (\tilde{p} + \frac{z}{2})^2)$$

$$\psi(0) = (-\alpha_1 m_0^2 - x_0^{-1}\tilde{p}^2) = x_0^{-1}(-x_0\alpha_1 m_0^2 + \alpha_2\alpha_3 q^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2)$$

$$\psi_\mu(0) = \partial_\mu \psi(0) = -x_0^{-1}\tilde{p}_\mu \quad \psi_{\mu\nu}(0) = \partial_\mu \partial_\nu \psi(0) = -\frac{g_{\mu\nu}}{2x_0}$$

$$\mathcal{I}(z) = -\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(z) + i0) d\alpha_i$$

$$\mathcal{I}(0) = -\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} \exp i(\psi(0) + i0) d\alpha_i$$

$$-i\partial_\mu \mathcal{I}(0) = -\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} (\psi_\mu(0)) \exp i(\psi(0) + i0) d\alpha_i$$

$$-\partial_\mu \partial_\nu \mathcal{I}(0) = -\pi^2 \int_0^\infty x_0^{-2} (-i(\psi_{\mu\nu}(0)) + \psi_\mu(0)\psi_\nu(0)) \exp i(\psi(0) + i0) d\alpha_i$$

4. Considérons les termes qui ne font pas intervenir  $\gamma^\mu$

$$\Gamma(z) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int 4 \left[ \frac{\{-(k.\gamma)(p+p')^\mu + mk^\mu - (k.\gamma)k^\mu\}}{Den} \exp(ikz) \right] d^4k$$

$$\Gamma(0) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \exp i(\psi(0) + i0) x_0^{-2}$$

$$[-(\psi_\nu(0).\gamma^\nu)(p+p')^\mu + m\psi^\mu(0)(-i\psi^{\mu\nu}(0) + \psi^\mu(0)\psi^\nu(0)).\gamma_\nu] d\alpha_i$$

$$\psi^\nu(0) = -x_0^{-1}\tilde{p}^\nu = -x_0^{-1}(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^\nu$$

$$(\psi_\nu(0).\gamma^\nu) = -x_0^{-1}(\tilde{p}.\gamma) = -x_0^{-1}(\alpha_2 + \alpha_3)m$$

$$\psi^\mu(0) = -x_0^{-1}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}(p' + p)^\nu + \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}(p' - p)^\nu\right)$$

$$\psi^{\mu\nu}(0)\gamma_\nu = -x_0^{-1}\gamma^\mu$$

rassemblant les termes en  $(p + p')^\mu$  on trouve :

$$\frac{m}{x_0} \left\{ (\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{2x_0}(\alpha_2 + \alpha_3)^2 \right\} = \frac{m\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)}{2x_0^2}$$

soit (réf 2 page 340)

$$\Gamma(0) = \frac{i\alpha m}{2\pi} (p + p')^\mu \int_0^\infty x_0^{-4} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) \exp i(\psi(0) + i0) d\alpha_i$$

avec

$$\psi(0) = x_0^{-1}(-x_0\alpha_1 m_0^2 + \alpha_2\alpha_3 q^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2)$$

on continue avec le changement de variable ci-dessous

$$x_i = \frac{\alpha_i}{x_0}$$

évidemment on a  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

on intègre sur  $x_0 \in [0, \infty]$  et  $x_{i=1,2}$  sur  $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$

(a) Intégration sur  $x_0$

$$\Gamma(0) = \frac{i\alpha m}{2\pi} (p + p')^\mu \times$$

$$\int_{x_i} \int_0^\infty x_1(x_2 + x_3) \exp i(\psi(0) + i0) \left| \frac{J}{x_0^2} \right| dx_0 dx_1 dx_2$$

$$\psi(0) = x_0(-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)$$

$$|J| = x_0^2$$

$$\Gamma(0) = -\frac{\alpha m}{2\pi} (p + p')^\mu \int_{x_i} \frac{x_1(x_2 + x_3)}{(-x_1 m_0^2 + x_2 x_3 q^2 - (x_2 + x_3)^2 m^2)} dx_1 dx_2$$

(b) Intégration sur  $x_1, x_2$  : domaine  $0 \leq x_3 = 1 - x_1 + x_2 \leq 1$

$$K_2 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{x_1(x_2 + x_3)m^2}{(x_1 m_0^2 - x_2 x_3 q^2 + (x_2 + x_3)^2 m^2)} dx_1 dx_2$$

formule réf 2 page 340 : 7-56 ?

(c) Approximation à la limite "classique" :  $m_0 = 0$  et  $q^2 = 0$

$$K_2 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{x_1}{(1 - x_1)} dx_1 dx_2 = \frac{\alpha}{2\pi}$$



(d) Applications physiques : pour un lepton chargé à l'ordre 2\*

| le facteur de Landé  | le moment magnétique de spin |
|----------------------|------------------------------|
| $g = -2(1 + K_2(0))$ | $\mu = \mu_B g$              |

Remarque :

— leptons chargés sont l'électron le muon et le tau,  
les masses sont croissantes

le moment magnétique  $\mu \sim 1/m \searrow$  quand  $m \nearrow$

—  $K_2$  et  $g$  dépendent aussi mais faiblement de  $m$  et de  $q^2$

\*.  $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m}$  est le magnéton de Bohr.

## Appendice 1 : Quelques appendices mathématiques

---

référence 1 pages 702 référence 2 pages 295 et 304

### — Quelques formules d'intégration utiles

1.

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i0} = \int_0^\infty \exp(i\alpha(p^2 - m^2 + i0)) d\alpha$$

2. deuxième formule réf 2 page 296

$$A = \int_{-\infty}^\infty \exp(i\alpha k^2) dk = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(on intègre sur C la nouvelle variable  $\sqrt{\alpha} k = \sqrt[2]{i} x$ )

$$A^* = \int_{-\infty}^\infty \exp(i\alpha k^2) dk = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

3. à 4 D dans l'espace de la relativité avec la signature  $+- --$

$$A_4 = \int_{-\infty}^\infty \exp(i\alpha k^2) d^4k = (e^{i\pi/4})(e^{-i\pi/4})^3 \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 = -i \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$$

### — Calcul des intégrales de Feynman

(référence 1 pages 702 )

1. Lemme 1

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 a_1 + x_2 a_2)^2} \delta(x_1 + x_2 - 1)$$

2. Généralisation : (domaine d'intégration des  $x_i$ )

si  $0 < x_1 < 1$   $0 < x_2 < 1 - x_1$   $0 < x_{n-1} < (1 - \dots - x_{n-2})$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^{\max} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}}{(x_1 a_1 + x_2 a_2 \dots + x_n a_n)^n}$$

3. Application

$$\int \frac{d^4 k}{a_1 a_2 \dots a_n} = \int_0^{\max} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \int \frac{d^4 k}{(x_1 a_1 + x_2 a_2 \dots + x_n a_n)^n}$$

— Dans le cas qui nous intéresse  $n = 3$

$$\int_{n=3} = \int \bar{u}'(p') \frac{(Num)}{Den} u(p) d^4 k dx_1 dx_2$$

$$(Num) = 4 \{ \gamma^\mu ((p + k) \cdot p' + k) - k^2/2 - (k \cdot \gamma)(p + p' + k)^\mu + m k^\mu \}$$

$$Den = a_1 a_2 a_3 = (k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 + 2(p' \cdot k) + i0)(k^2 + 2(p \cdot k) + i0)$$

$$\int_{n=3} = \bar{u}'(p') \int \frac{(Num)}{(k^2 + 2x_1(p' \cdot k) + 2x_2(p \cdot k) - x_3 m_0^2 + i0)^3} u(p) d^4 k dx_1 dx_2$$

— Démonstration du théorème général par récurrence soit à l'ordre  $n$

$$I_n = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)^n}$$

$$\text{avec } x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$I_n = \frac{1}{a_1 \dots a_n}$$

— Primitive par rapport à  $x_{n-1}$

$$F(x_{n-1}) = \frac{1}{-(n-1)(a_{n-1}-a_n)} (a_1x_1 + \dots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n)^{-n+1}$$

$$\Delta F = [F(x_n = 0) - F(x_{n-1} = 0)]$$

$$\Delta F = \frac{1}{(n-1)(-a_{n-1}+a_n)} \left\{ \frac{1}{(a_1x_1..+a_{n-1}x_{n-1})^{n-1}} - \frac{1}{(a_1x_1..+a_nx_n)^{n-1}} \right\}$$

avec  $x_{n-1} = 1 - x_1.. - x_{n-2}$  et  $x_n = 1 - x_1.. - x_{n-2}$

— intégration sur  $x_{n-1}$  et en utilisant la propriété à l'ordre  $n - 1$  :

$$I_n = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1\dots} dx_{n-2} \Delta F$$

$$I_n = (n-1) \frac{1}{(n-1)(-a_{n-1}+a_n)} \left\{ \frac{1}{a_1..a_{n-2}a_{n-1}} - \frac{1}{a_1..a_{n-2}a_n} \right\}$$

$$I_n = \frac{1}{a_1..a_n}$$

## **Appendice 4 : Propriétés analytiques de l'amplitude**

---

Analyse de la méthode de la réf 1 page 615...