

Université de Caen

LMNO

Moment magnétique anomal des fermions de Dirac **1**

C. LONGUEMARE

13-20 octobre 2015

Plan

1. Les fermions de spin $1/2$ selon Dirac
2. Les ondes planes de fermions libres
3. L'interaction électromagnétique à l'ordre 1
4. Discussion des mesures de moments magnétiques

Constantes et conventions

$g_{\mu\nu}$	métrique	+ - - -	unités
c	vitesse de la lumière	$2,998 \cdot 10^8$	m.s^{-1}
$\hbar$	constante de Planck $/2\pi$	$1,05457168 \cdot 10^{-34}$	J.s
e	charge élémentaire	$1,60217653 \cdot 10^{-19}$	C
α	cte de structure fine	$137,036^{-1}$	0
mc^2	électron	0,510998918	MeV
Mc^2	proton	938,272029	MeV
Mc^2	neutron	939,565360	MeV

Nous utilisons le système d'unités habituel

$$\hbar = 1 \quad c = 1 \quad \epsilon_0 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

Les fermions de spin 1/2

- Les générateurs de translation de la MQ

$$p_\mu = i \partial_\mu$$

- Les spineurs et les matrices de Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} (x) \quad \gamma^\mu = (4, 4)$$

- Propriété des matrices γ

$$\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu + \gamma^\nu \cdot \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

- L'équation de Dirac

$$(p \cdot \gamma - m) \psi = 0 \quad p^2 = m^2$$

- Les opérateurs $\sigma^{\mu\nu}$ (générateurs des TL propres)

$$\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} \Rightarrow -2 i \sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Les transformations de Lorentz des spineurs

- Représentation des transformations de Lorentz dans ψ

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad \Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon_{\nu}^{\mu} + \dots$$

$$\psi'(x') = S_L \psi(x) \quad S_L = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + \dots$$

- σ^{ij} est associé aux rotations d'axe x_k si (i, j, k)

σ^{0i} est associé aux boosts d'axe x_i

Exemple dans la représentation de Pauli-Dirac (Non-Relativiste)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sigma_k$$

$$\sigma^{12} = +\frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \Sigma_3$$

$$\sigma^{03} = +\frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^3] = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = i \Lambda_3$$

— Une rotation θ d'axe 3

$$\epsilon_{12} = \delta\theta \ll 1$$

$$S_L \sim I - \frac{i}{2} \Sigma_3 \delta\theta \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\Sigma_3)^2 = 1$$

$$\lim (I - \frac{i}{2} \Sigma_3 \frac{\theta}{n})^n \rightarrow \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) \Sigma_3 \in \text{unitaire}$$

— Un boost de Lorentz β d'axe 3 ($\theta \rightarrow i\beta$)

$$\epsilon_{03} = \delta\beta \ll 1$$

$$S_L \sim I + \frac{1}{2} \Lambda_3 \delta\beta \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\Lambda_3)^2 = 1$$

$$\lim (I + \frac{1}{2} \Lambda_3 \frac{\beta}{n})^n \rightarrow \cosh(\beta/2) + \sinh(\beta/2) \Lambda_3 \in \text{hermitique}$$

Les ondes planes de fermions

- Etats stationnaires propres de p_μ

$$\psi(x) = u(p) \exp(-ip \cdot x)$$

- Conséquence de l'équation de Dirac

$$p^2 = m^2 \Rightarrow p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

- Produit hermitien de Dirac

$$\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_0$$

- Courant de fermions

$$J_\mu = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

- densité (volumique) de fermions

$$J_0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_0 \psi(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x)$$

Interaction EM des fermions de charge e

- Construction : principe d'interaction minimal

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - e A_\mu$$

- L'équation de Dirac devient

$$((p - eA) \cdot \gamma - m) \psi(x) = 0$$

- Lagrangien libre d'un fermion de Dirac et avec l'interaction $A_\mu(x)$

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) ((p \cdot \gamma) - m) \psi(x) \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(x) ((p - eA) \cdot \gamma - m) \psi(x)$$

- Le lagrangien d'interaction en x

$$\mathcal{L}_{in} = -e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) = -e J_\mu(x) A^\mu(x)$$

- Conséquence :

$$((p - e A) \cdot \gamma)^2 = (p - e A)^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

démonstration avec $p_\mu = i\partial_\mu$ et $A^\mu(x)$

$$((p - e A) \cdot \gamma)^2 = (p - e A)^\mu ((p - e A)^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i \sigma_{\mu\nu}$$

$$((p - e A) \cdot \gamma)^2 = (p - e A)^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad F^{ij} = -B_k \quad F^{0i} = -E_i$$

— Conséquence avec $P = p - eA$

$$\left((P + m)^0 (P - m)^0 - \vec{P}^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \psi(x) = 0$$

— Dans un champ extérieur magnétique et électrique (non relativiste) *

$$\left(p^0 - e A^0 - m - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + \frac{e}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 + \sigma_{0i} E_i) \right) \psi(x) = 0$$

— L'hamiltonien de l'électron de Pauli

$$\mathcal{H} = m + e A^0 + \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0) \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

— Le magnétisme de spin des fermions de Dirac :

$$s = \frac{\hbar}{2} \quad \frac{\mu}{s} = \gamma = g \times \left(\frac{|e|\hbar}{2m} \right) \quad \text{avec } g = 2 \times \text{sign}(e)$$

où s est le spin, μ est le moment magnétique,

g est le facteur de Landé et γ le rapport gyromagnétique.

— Rapport gyromagnétique classique[†] dû au mouvement orbital :

$$+ \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{B}_0 + \frac{e^2}{2m} A^2$$

$$\gamma = \frac{e\hbar}{2m} \quad g = 1$$

*. approximation $(P + m)^0 \sim 2m$

†. champ EM statique $A^\mu = (V, \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{B}_0)$

	facteur de Landé	g	
électron	proton	neutron	mvt orbital
-2,00231930	5,586	-3,826	1 × signe de e

La RMN dans le cas du proton

- Le proton au repos ($x \equiv t$)

$$\left(p^0 - m + \vec{\mu} \vec{B}_0\right) \psi(t) = 0 \text{ avec } \psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mu} = \gamma \vec{s}$$

- Les transitions RMN à la fréquence ν_0

$$\delta E = 2\mu B_0 \quad \nu_0 = \frac{2\mu B_0}{h} = \frac{g}{2\pi} \left(\frac{e}{2M_p c^2}\right) c^2 B_0$$

Pour $B_0 = 1$ Tesla, la fréquence de résonance est $\nu_0 = 42,65$ MHz

$$g = 5,586 \quad \left(\frac{e}{2M_p c^2}\right)^{-1} = 938 \cdot 10^6 \text{ eV} \quad c = 3,10^8 \text{ m/s} \quad B_0 = 1 \text{ Tesla}$$

Ondes courtes radio : la fréquence est entre 3 MHz et 30 MHz

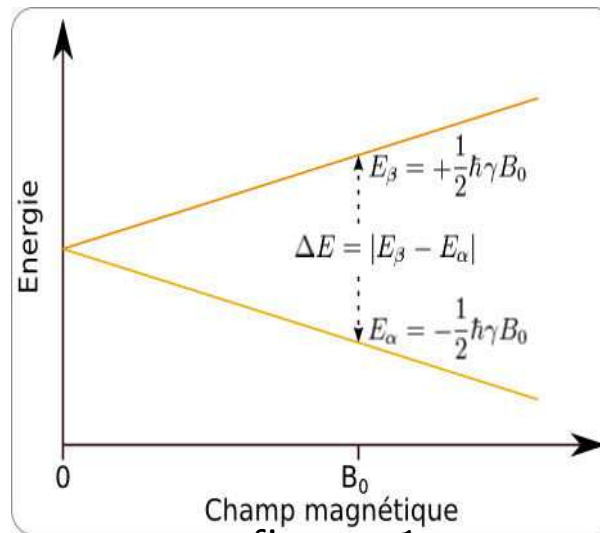


figure 1

— Imagerie RMN : La détection des protons de l'hydrogène

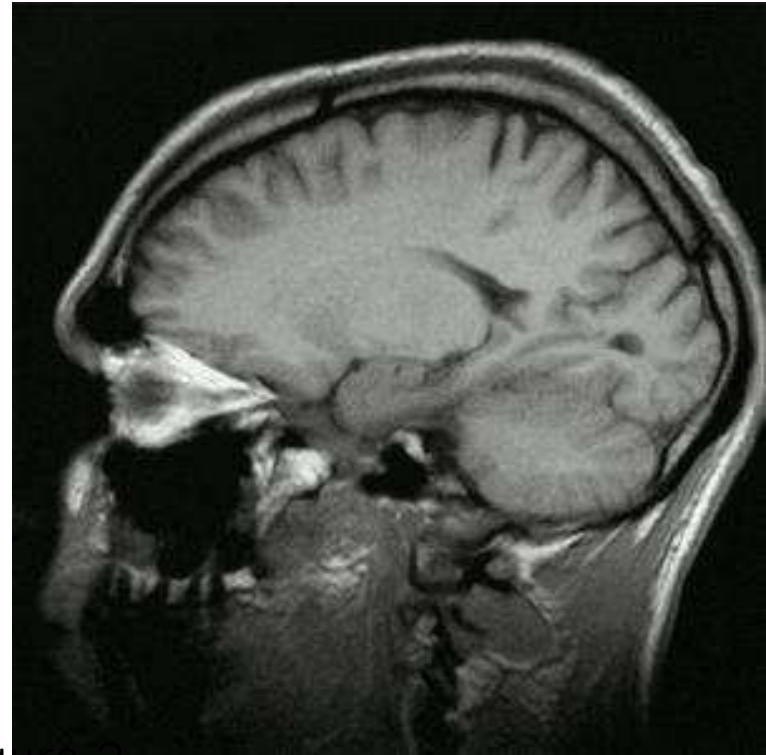
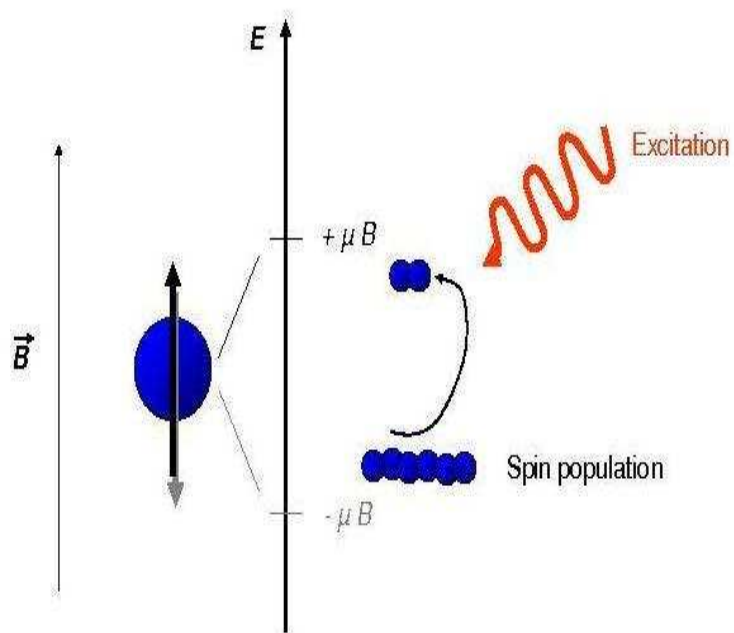


figure 2

références

- 1 L. Landau & E. Lifchitz *Electrodynamique quantique* MIR Edt 1976
- 2 C. Itsykson & Zuber *Quantum field theory* Macgraw Hill 1980
- 3 F. Halzen & al. *Quarks and leptons* John Wiley 1984
- 4 L.H. Ryder *Quantum Field Theory* Cambridge U.P. 1985
- 5 B. de Wit & al. *Field theory in particle physics* North holland 1986
- 6 S.J. Chang *Introduction to Quantum Field Theory* World Scientific 1990
- 7 I. Aitchison & al. *Gauge theories in particle physics* Inst of Physics 2004
- 8 [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur_de_Landé](http://fr.wikipedia.org/wiki/Facteur_de_Landé)