

Le Lamb shift

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

28 mars et 4 avril 2006

Version 25/04/2006

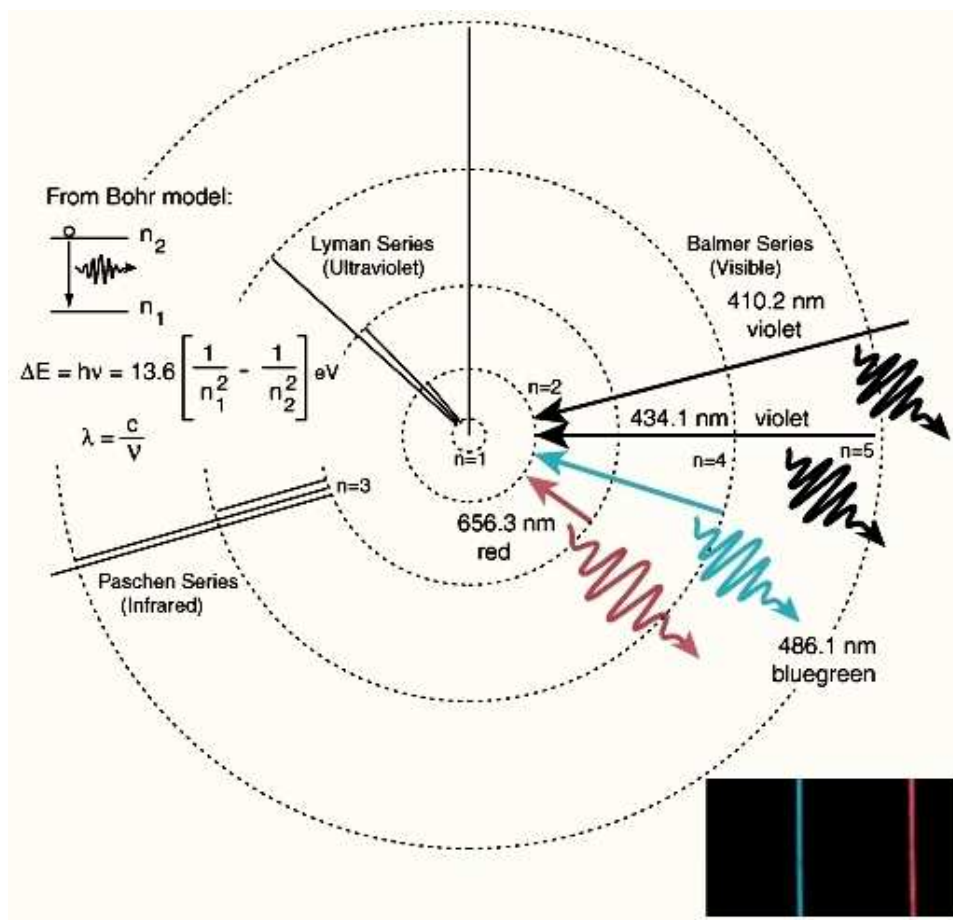


Figure 1: Spectre atomique de l'hydrogène: quelques raies dans la série de Balmer

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu les 28 mars et 4 avril 2006 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2005-2006

SOMMAIRE

1	Introduction	4
1.1	Le déplacement de Lamb	4
1.2	La polarisation	5
1.3	A quelle distance ?	5
2	La théorie classique :	
	l'atome de Rutherford Bohr-Sommerfeld	6
2.1	Le problème de Kepler	6
2.2	La classification des trajectoires en fonction de E et L	7
2.3	La quantification de Bohr-Sommerfeld	8
3	La théorie quantique non relativiste :	
	l'atome de Schrödinger-Pauli	9
3.1	L'équation stationnaire de Schrödinger	9
3.2	La classification des états : l , n_r et $n = l + 1 + n_r$	11
3.3	Les raies d'émission dans l'hydrogène : la série de Balmer	12
3.4	L'effet d'écran dans les alcalins (atome à ~ 1 électron)	13
4	L'électron relativiste : l'atome de Dirac	15
4.1	L'équation relativiste de l'électron en champ classique	17
4.1.1	L'électron libre	17
4.1.2	L'électron en interaction avec un champ E.M.	18
4.2	L'électron a un spin $\Rightarrow$ la structure fine	19
4.3	Le nucléon a un spin $\Rightarrow$ la structure hyperfine , RMN	19
4.4	En résumé	20
5	Quantum Electro Dynamics : l'atome de Feynman	21
5.1	Le vide polarisé	21
5.2	Renormalisation de QED et polarisation du vide (réf [8] page 152)	22
5.3	Conclusion	23
6	CONVENTIONS	27
7	INDEX	28

List of Figures

1	Spectre atomique de l'hydrogène: quelques raies dans la série de Balmer	1
2	la polarisation du vide (réf [8] page 163)	4
3	la polarisation dans un condensateur	5
4	L'atome planétaire à $E=Cte$ et L variable	6
5	Les limites classiques pour les états liés	7
6	La quantification des états	8
7	Les potentiels d'ionisation en eV (réf [4] page 315)	8
8	la fonction d'onde radiale $R_{n,l}(\rho = x/n)$ (réf [21] page 28)	10
9	La fonction orbitale $Y_l^m(\Omega)$ (réf [4] page 748)	10
10	l'atome d'hydrogène et la fonction d'onde radiale $\chi(x)$ (réf [20] page 206)	11
11	Les raies de l'atome H (réf [15] page 209)	12
12	La configuration électronique des alcalins (réf [21] page 60)	13
13	L'état stable du sodium $3s^1$ (réf [21] page 62)	13
14	Les états $2s\ 2p \dots$ du Lithium (réf [20] page 217)	14
15	La raie H_α de Balmer : $\nu = 4.5692 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (10^5 GHz) (réf [21] page 162)	15
16	Résumé des différents effets sur les niveaux $n=1$ et 2 de H : (réf [23])	16
17	Les effets relativistes sur les niveaux $n=2$ et 3 de H (réf [21] page 41)	16
18	Résumé des différents effets sur les niveaux $n=1$ et 2 de H : (réf [14])	20
19	la polarisation du vide (réf [8] page 163)	21
20	La mesure du couplage électromagnétique à grande et petite distance : (réf [8] page 11)	24
21	Variation de l'interaction électromagnétique avec la distance : (réf [8] page 10)	25
22	Variation de l'interaction forte avec la distance : (réf [8] page 10)	26

1 Introduction

1.1 Le déplacement de Lamb

Mesure de précision sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Les références :

- W.E. Lamb & R.C. Retherford, Phys. Rev. 79, 549 (1950)
- W.E Lamb, Rep. Progr. Phys. 14, 19 (1951).
- R. Feynman & al., The theory of positrons. Phys. Rev. 76(1949) 749-759.
- R. Feynman & al., Space-time approach to quantum electrodynamics. Phys. Rev. 76(1949) 769-789.
- R. Feynman, Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. Phys. Rev. 80(1950) 440-457.

L'intérêt du sujet réside dans

- la mise en évidence des ordres supérieurs de QED.
- l'importance de la polarisation du vide dans les théories de jauge non-abéliennes.
- les liens avec le confinement et la variation des couplages avec l'énergie.
- un test des procédures de renormalisation.



Figure 2: la polarisation du vide (réf [8] page 163)

1.2 La polarisation

C'est un phénomène matériel

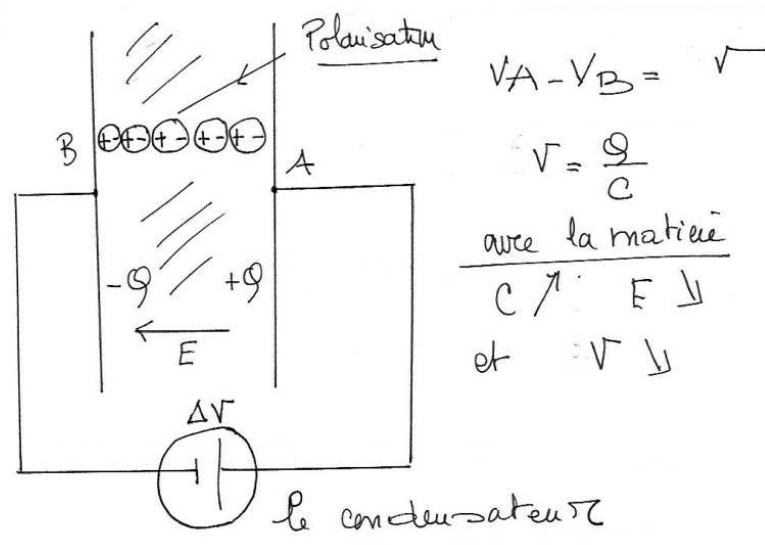


Figure 3: la polarisation dans un condensateur

La polarisation peut se produire dans le vide si le champ est intense, par exemple auprès d'une charge ponctuelle.

1.3 A quelle distance ?

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \omega = \frac{dW}{d^3x} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$$\omega \times \frac{4\pi}{3} r^3 = 2mc^2 \Rightarrow r \sim r_e \quad \text{le rayon classique}$$

- la longueur compton (bar) : $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3,86 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
- le rayon classique : $r_e = \alpha \lambda_c = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
- le rayon de Bohr : $a_0 = \alpha^{-1} \lambda_c = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
- le rayon nucléaire : $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Rappel :

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137,0$$

2 La théorie classique : l'atome de Rutherford Bohr-Sommerfeld

2.1 Le problème de Kepler

L'atome est construit sur le modèle du système solaire : pour l'hydrogène l'interaction coulombienne entre le proton et l'électron conduit à des trajectoires stables qui sont des ellipses.

$$U(r) = -Z \frac{\alpha \hbar c}{r} \quad E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad \vec{L} = mr^2 \dot{\theta} \vec{n} \quad L = |\vec{L}|$$

Les trajectoires sont caractérisées par :

1. un plan perpendiculaire à $\vec{n}$: le plan est orienté
2. un angle de rotation autour de $\vec{n}$
3. un paramètre p et une excentricité e tels que :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

4. cas particuliers :

- le cercle $e = 0$ avec $p \neq 0$ et $L \neq 0$
- le segment OA : $e = 1$ avec $p = 0$ et $L = 0$

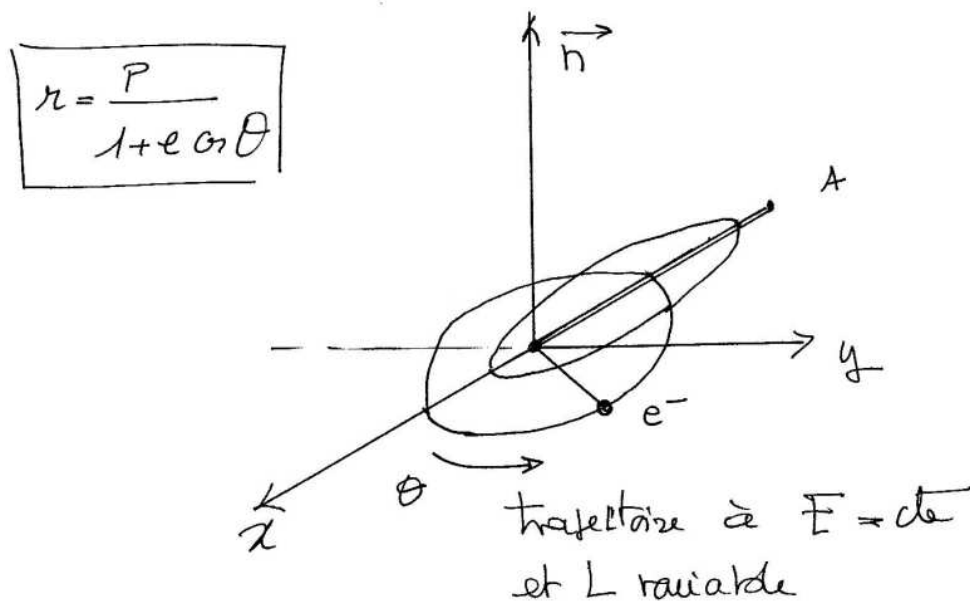


Figure 4: L'atome planétaire à $E = \text{Cte}$ et L variable

2.2 La classification des trajectoires en fonction de E et L

La dynamique de Newton nous donne en posant

$$k = Z\alpha\hbar c = Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \text{ dimension } \sim W.L$$

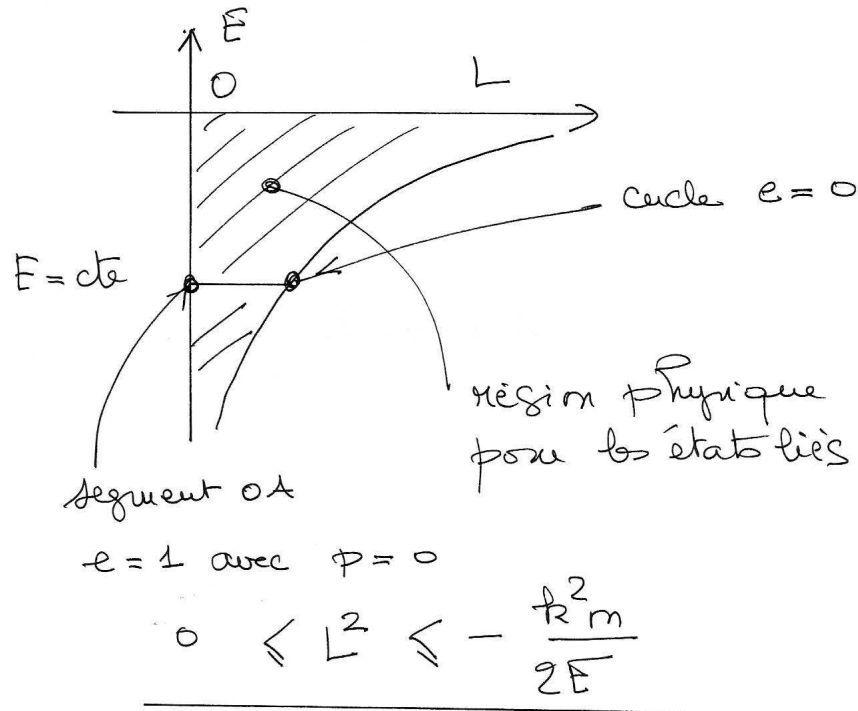


Figure 5: Les limites classiques pour les états liés

$$p = \frac{L^2}{km} \quad e^2 = 1 + \frac{2Ep}{k}$$

Il en résulte que si $e^2 \in [0, 1]$:

$$0 \leq L^2 \leq -\frac{k^2 m}{2E}$$

ou

$$-\frac{k^2 m}{2L^2} \leq E \leq 0$$

2.3 La quantification de Bohr-Sommerfeld

Supposons la quantification de L et choisissons $L = L_{max} = n\hbar$ alors E est quantifié

$$L = \hbar n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \quad E = -\frac{k^2 m}{2L^2}$$

Soit la règle de quantification des niveaux de l'hydrogène (N. Bohr 1913) (réf [4] page 145)

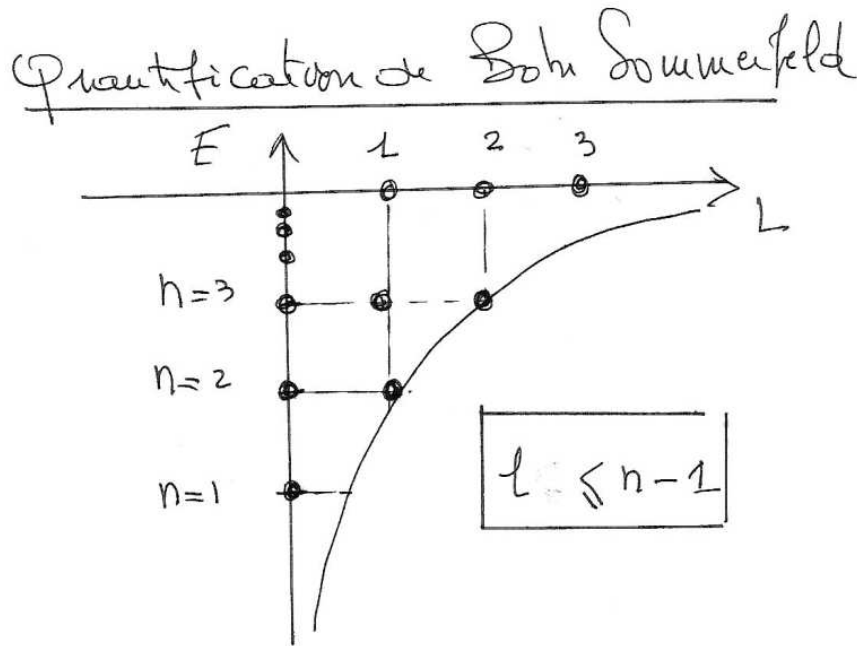


Figure 6: La quantification des états

$$E = -\frac{Ry}{n^2} \quad \text{avec } Ry = \frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{2} = Z^2 \times 13,6 \text{ eV}$$

Conclusion : les énergies de la physique atomique sont dans l'ordre de l'eV

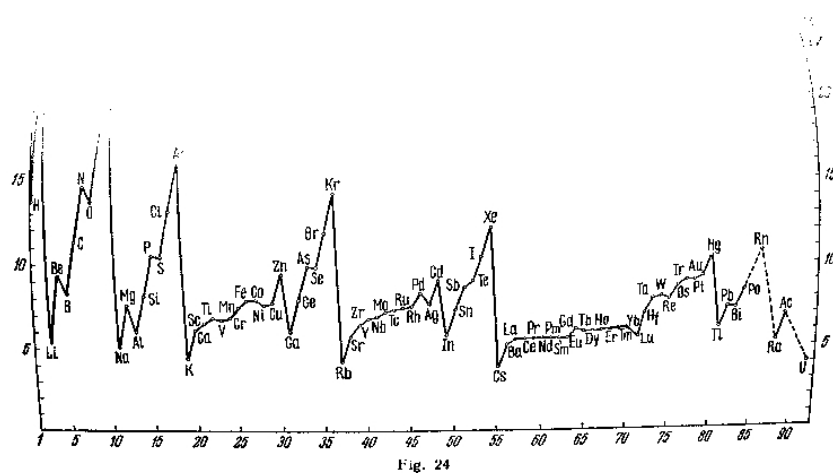


Figure 7: Les potentiels d'ionisation en eV (réf [4] page 315)

3 La théorie quantique non relativiste : l'atome de Schrödinger-Pauli

3.1 L'équation stationnaire de Schrödinger

Classique		Quantique
$\vec{r}(t)$	$\rightarrow$	$\Psi(\vec{r})$
$\vec{p}(t)$		$-i \hbar \vec{\nabla}$
$\vec{L}(t)$		$\vec{L} = -i \hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla}$
E		$i \hbar \partial_t$
E et L continus		E et L quantiques

On cherche les solutions stationnaires de l'équation d'onde

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad H = 1/2m \left\{ p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \right\} + U(r) \quad p_r = -i\hbar(r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}r) \quad U(r) = -Z\alpha \frac{\hbar c}{r}$$

Le moment cinétique est un opérateur angulaire en unité $\hbar$. Résolution de l'équation $\equiv$ recherche d'une base de l'espace (Hilbert) des états stationnaires propres de H.

$$\Psi(x) = R(r) \times Y_l^m(\Omega) \quad R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$$

Extraction des dimensions physiques de l'équation de Schrödinger : [4] page 144 et [15] page 204.

$r \rightarrow x = \frac{r}{\lambda}$	$x \rightarrow \frac{x}{Z\alpha}$
$E \rightarrow \epsilon = \frac{E}{mc^2}$	$\epsilon \rightarrow \epsilon \times (Z\alpha)^2$

Table 1: changements de variables, $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$

L'équation radiale en x devient :

réf: [4] page 143,[15] page 204,[18] page 8, [19] page 114 et [21] page 26):

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{2x^2} - \frac{1}{x} \right] \chi(x) = \epsilon \chi(x)$$

Solutions, W. Pauli (1926) E. Schrödinger (1926) :(réf [4] page 145)

$$n_r \in \mathbb{N} \quad \chi_{n_r}(x) \text{ avec } n_r \text{ zéros et } \epsilon = -\frac{1}{2(n_r + l + 1)^2}$$

- L'échelle des distances pour $Z = 1$ est le rayon de Bohr : $a_0 = \lambda (\alpha)^{-1} = 0,53 \cdot 10^{-10} m$

- L'échelle des énergies est la constante de Rydberg $Ry = \frac{1}{2} mc^2 (\alpha)^2 = 13,6 \text{ eV}$

Finalement si on introduit $n = n_r + l + 1$ (Schrödinger-Pauli 1926) :

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2} Z^2$$

La fonction d'onde radiale s'écrit réf [4] page 699:

$$\begin{aligned}\chi(x) &\sim x^{l+1} \exp(-x/n) P_{n_r, l}(x/n) \\ \text{avec } P_{n_r, l}(x/n) &= F(-n_r, 2(l+1), x/n) \\ \text{avec } F(\alpha, \gamma, z) &= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha \dots (\alpha + i)}{\gamma \dots (\gamma + i)} \cdot \frac{z^{i+1}}{i+1!} \\ \text{solution de : } z F'' - (\gamma - z)F' - \alpha F &= 0\end{aligned}$$

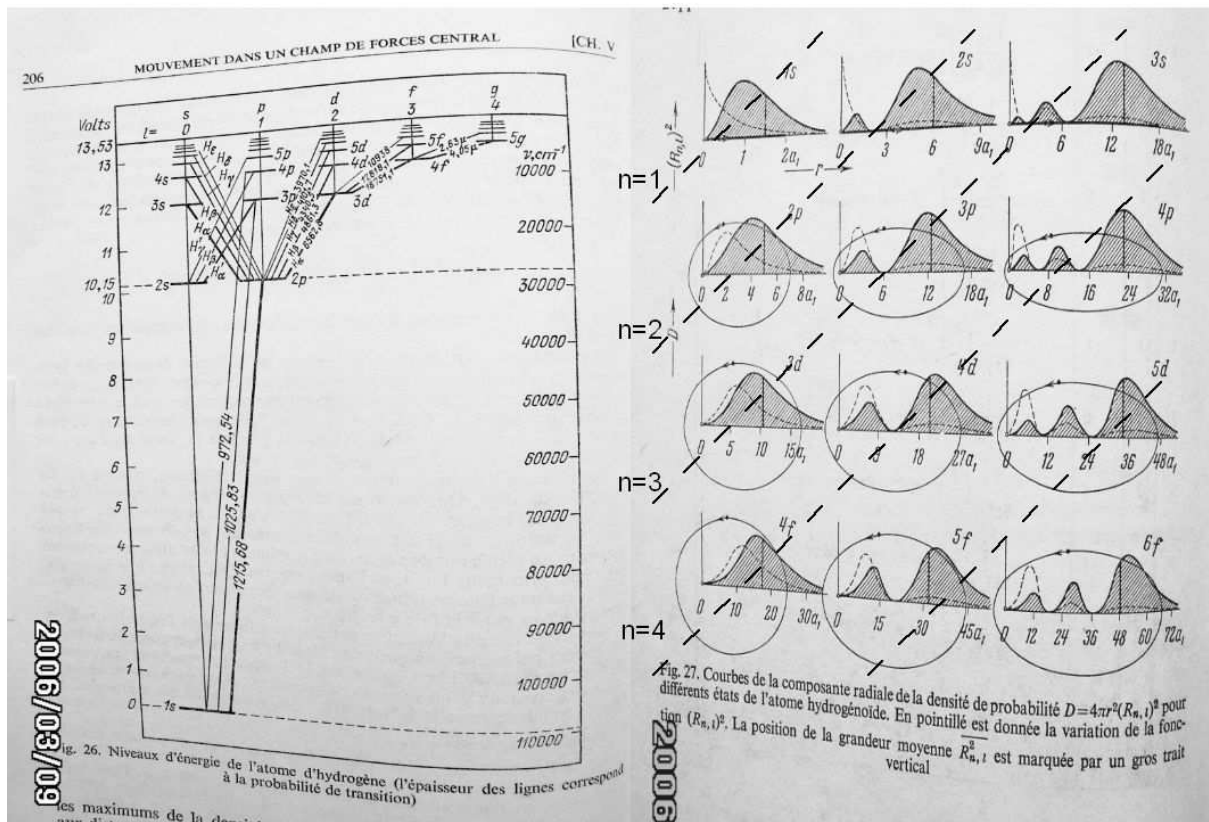
$$\begin{aligned}R_{1,0} &= \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2 e^{-\rho} \\ R_{2,0} &= \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} 2(1-\rho) e^{-\rho} \\ R_{2,1} &= \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho e^{-\rho} \\ R_{3,0} &= \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} 2 \left(1 - 2\rho + \frac{2}{3}\rho^2\right) e^{-\rho} \\ R_{3,1} &= \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{3} \rho \left(1 - \frac{1}{2}\rho\right) e^{-\rho} \\ R_{3,2} &= \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \rho^2 e^{-\rho} \\ \text{Normalisation: } \int_0^{\infty} R_{n,l}^2 r^2 dr &= 1\end{aligned}$$

Figure 8: la fonction d'onde radiale $R_{n,l}(\rho = x/n)$ (réf [21] page 28)

Enfin, écrivons les expressions de quelques unes des premières fonctions sphériques normalisées Y_{lm} :

$$\begin{aligned}Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{10} &= i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_{1, \pm 1} &= \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), & Y_{2, \pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}, \\ & & Y_{2, \pm 2} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, \\ Y_{30} &= -i \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3), \\ Y_{3, \pm 1} &= \pm i \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{3, \pm 2} &= -i \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, & Y_{3, \pm 3} &= \pm i \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta \cdot e^{\pm 3i\varphi}.\end{aligned}$$

Figure 9: La fonction orbitale $Y_l^m(\Omega)$ (réf [4] page 748)

3.2 La classification des états : l , n_r et $n = l + 1 + n_r$ Figure 10: l'atome d'hydrogène et la fonction d'onde radiale $\chi(x)$ (réf [20] page 206)

3.3 Les raies d'émission dans l'hydrogène : la série de Balmer

transition électromagnétique $n \rightarrow n'$ avec émission d'un photon d'énergie $h\nu$

$$h\nu = \delta E = Ry \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} \right]$$

La série de Balmer avec $n'=2$ et $n>2$: H_α H_β H_γ H_δ ... les longueurs d'ondes :

$$\text{formule de Balmer } \lambda = \frac{hc}{\delta E} = \frac{hc}{Ry} \left(\frac{4n^2}{n^2 - 4} \right) \quad n \geq 3$$

avec $hc = 1239,8419 \text{ eV.nm}$ et $Ry = 13,60569 \text{ eV}$

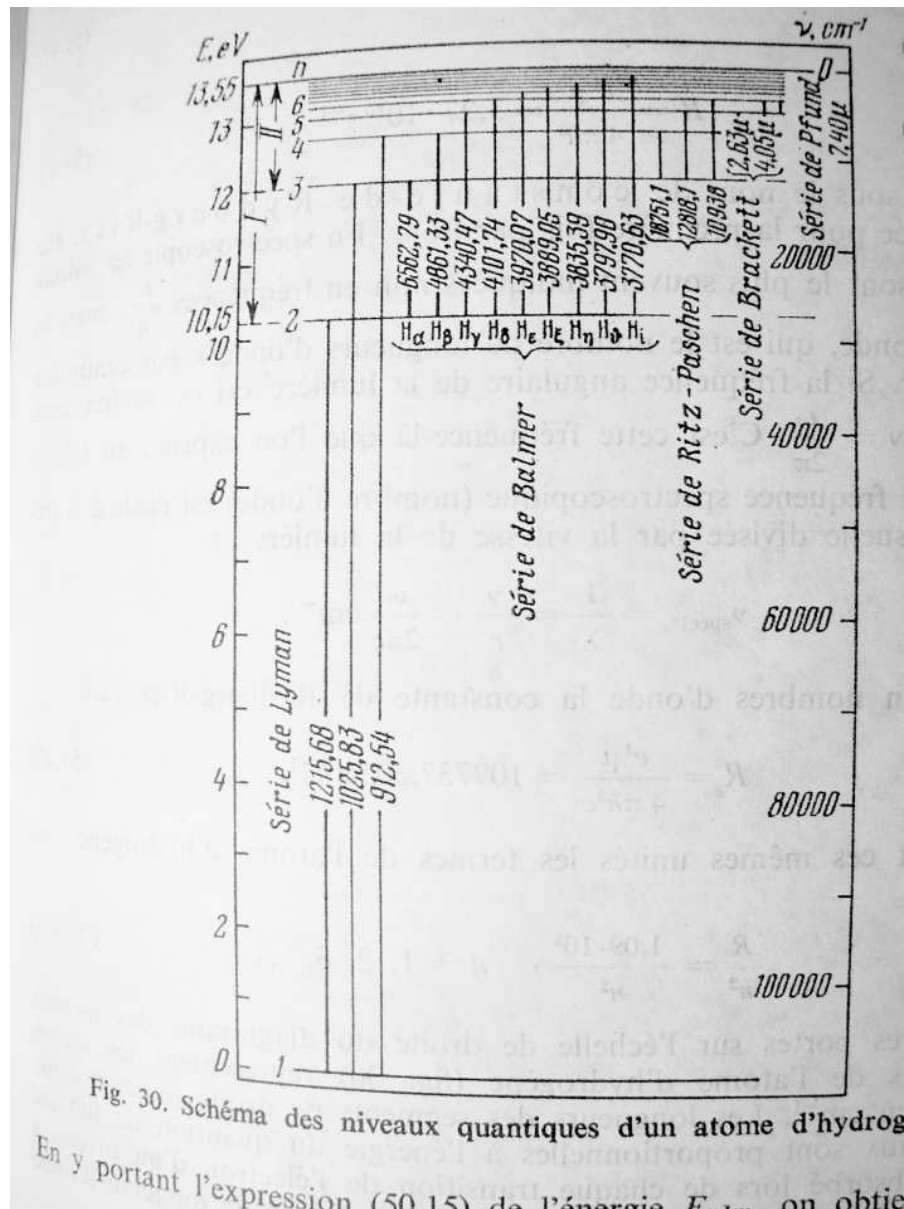


Figure 11: Les raies de l'atome H (réf [15] page 209)

3.4 L'effet d'écran dans les alcalins (atome à ~ 1 électron)

The ground states of the alkalis have the following electronic configurations:³

lithium	Li	$1s^2 2s$,
sodium	Na	$1s^2 2s^2 2p^6 3s$,
potassium	K	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s$,
rubidium	Rb	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s$,
caesium	Cs	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s$.

Figure 12: La configuration électronique des alcalins (réf [21] page 60)

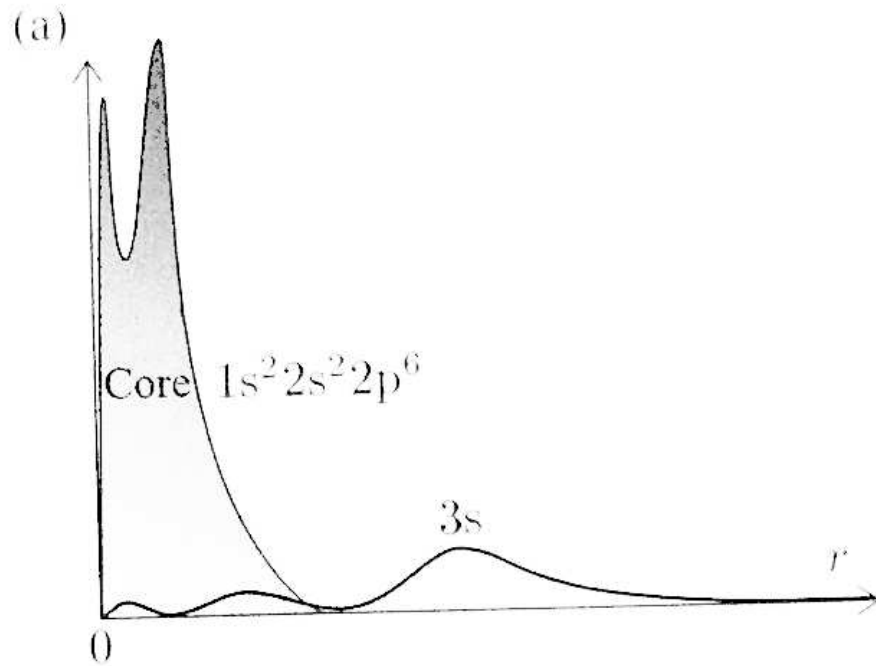


Figure 13: L'état stable du sodium $3s^1$ (réf [21] page 62)

L'effet d'écran dans les alcalins (atome à ~ 1 électron)
le cas du Lithium

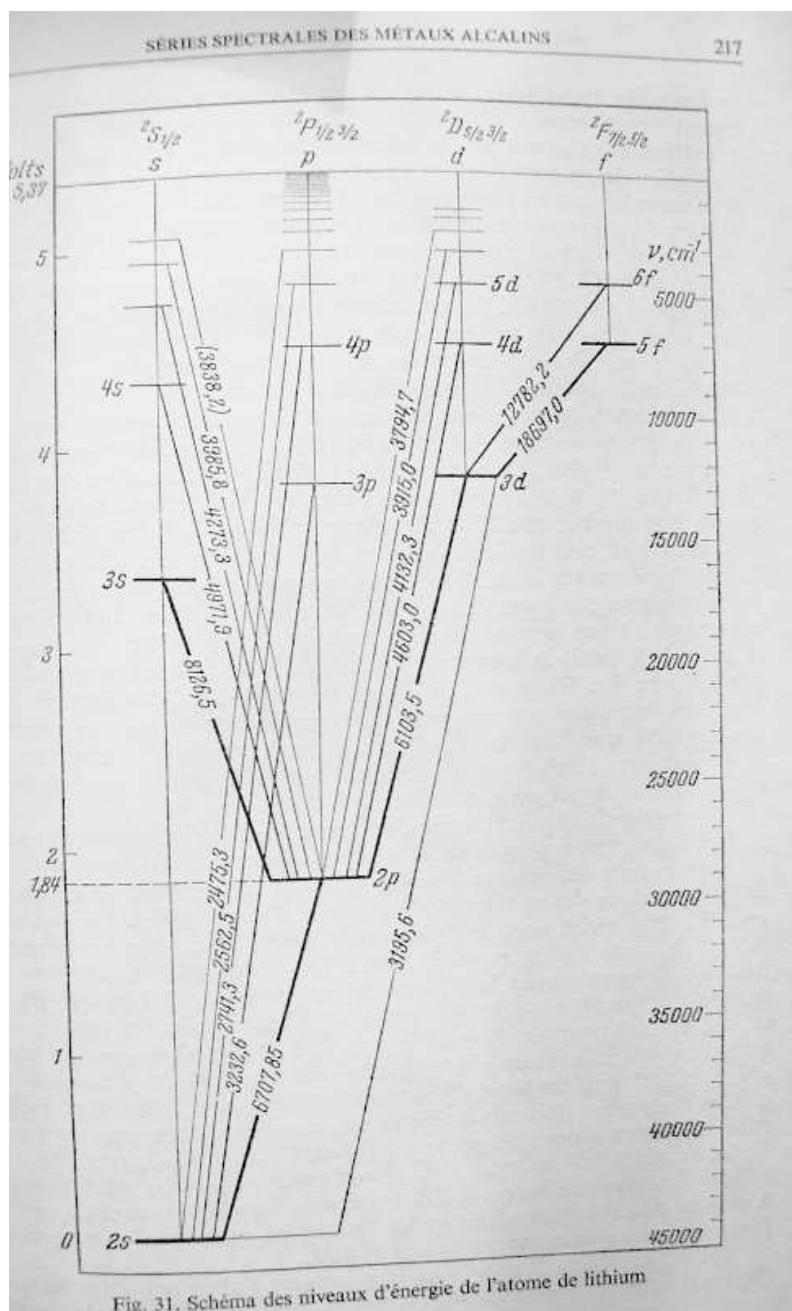


Figure 14: Les états 2s 2p ... du Lithium (réf [20] page 217)

4 L'électron relativiste : l'atome de Dirac

Les différents effets relativistes sur les états de l'hydrogène :

- L'électron est marginalement relativiste : 10 eV comparé à 551 keV soit $\beta \sim 6 \cdot 10^{-3}$
- L'électron n'est pas ponctuel, il porte un spin : il faut utiliser l'équation de Dirac éventuellement à l'approximation non relativiste $\Rightarrow$ la structure fine
- Le noyau n'est pas ponctuel, il porte un spin, le champ induit comporte une composante magnétique $\Rightarrow$ la structure hyperfine
- Le champ électromagnétique est modifié par la polarisation du vide $\Rightarrow$ le déplacement de Lamb.

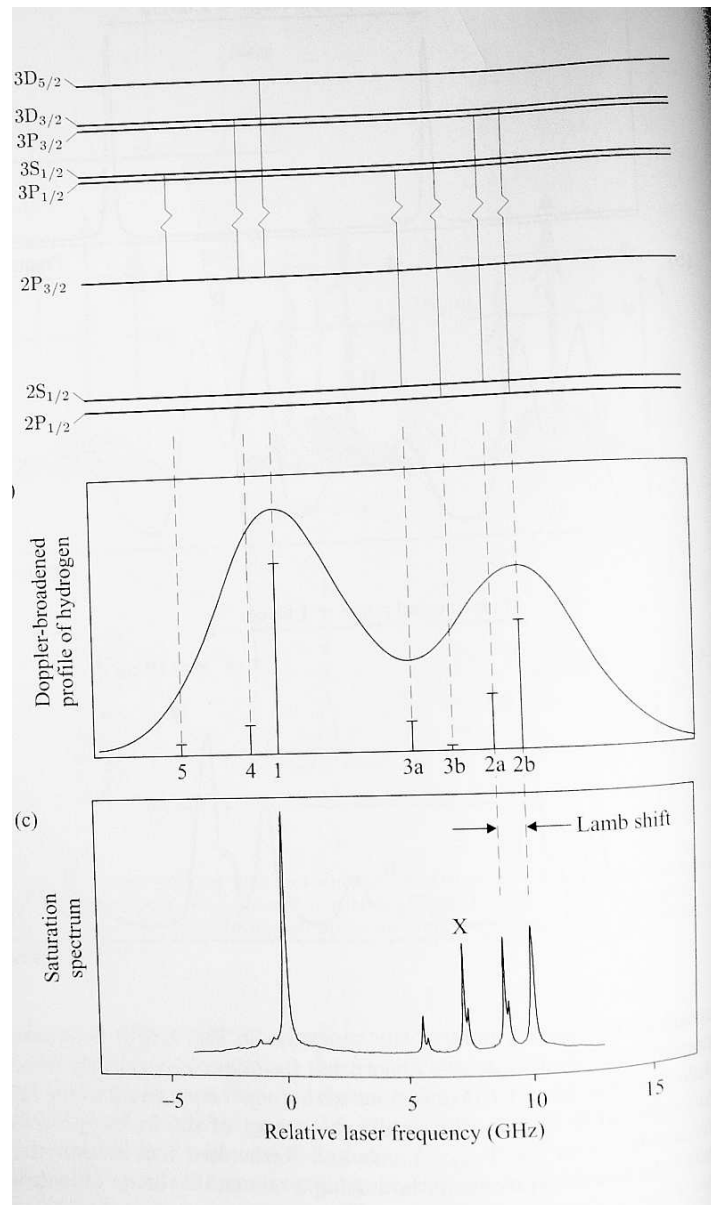
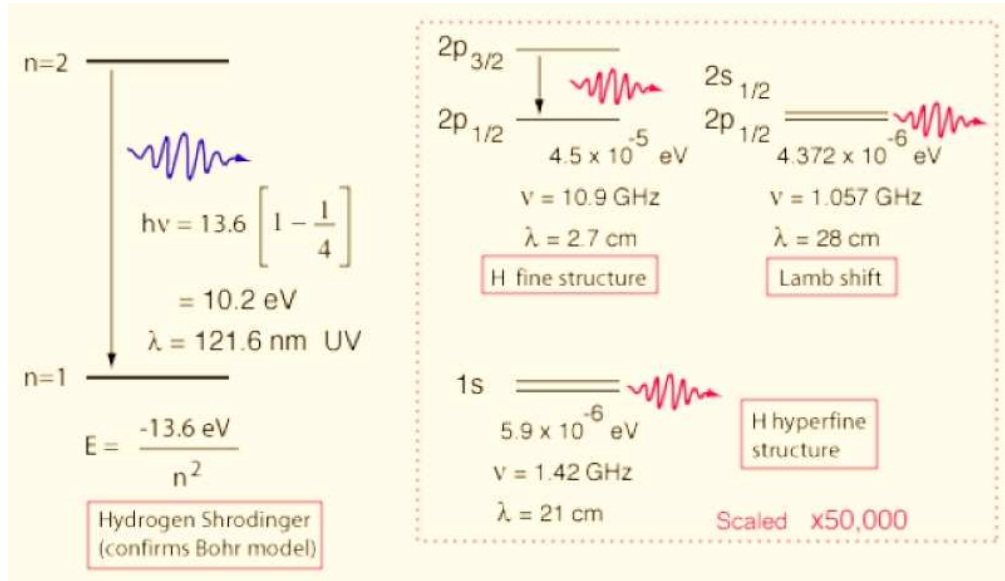
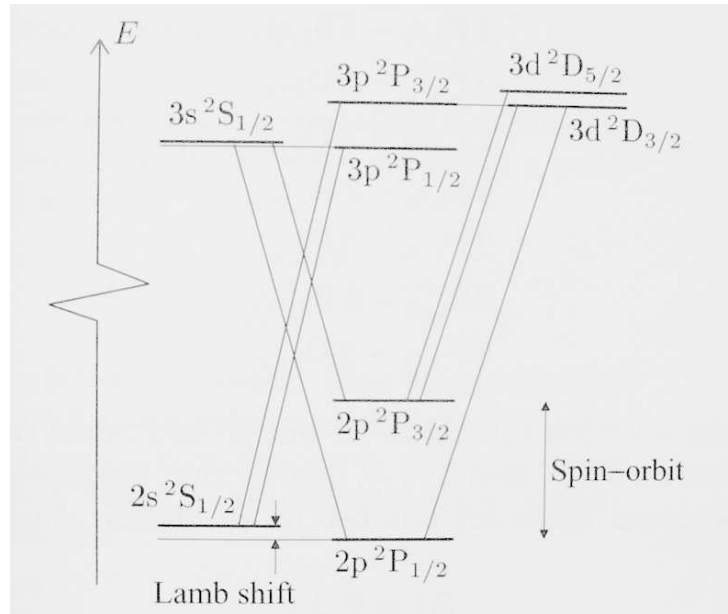


Figure 15: La raie H_α de Balmer : $\nu = 4.5692 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (10^5 GHz) (réf [21] page 162)

Figure 16: Résumé des différents effets sur les niveaux $n=1$ et 2 de H : (réf [23])Figure 17: Les effets relativistes sur les niveaux $n=2$ et 3 de H (réf [21] page 41)

Remarque La transition 2 vers 1 de H est mesurée avec une incroyable précision (réf [22]) :

$$\nu = 2,46606141318734 \pm 3 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

4.1 L'équation relativiste de l'électron en champ classique

Notations

$$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \text{ soit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

L'énergie impulsion $P = (E, \vec{p})$

Les champs électriques et magnétiques $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$

4.1.1 L'électron libre

- L'équation de Dirac :

$$p_\mu = i\partial_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

- Les matrices de Pauli :

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

- Les matrices γ^μ dans la représentation de Pauli-Dirac :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \beta\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

- Propriétés relativistes des matrices γ^μ :

1. γ^5 invariant (groupe de Lorentz propre)
2. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \rightarrow$ générateurs du groupe Lp
3. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
4. conséquence : décomposition symétrique anti-symétrique du produit

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -i \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$$

- Les solutions libres pour l'électron : avec $E = \omega = \sqrt{p^2 + m^2} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -\omega - m \end{pmatrix} \Psi = 0 \quad (1)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \chi \end{pmatrix} \quad (2)$$

- A l'approximation non-relativiste ([18] page 55) :

$$-i\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \Psi \sim \vec{\sigma} \cdot \frac{(\sigma \cdot p)}{2m} \Psi = \frac{1}{2m} (-i\vec{p} + (\vec{p} \wedge \vec{\sigma})) \Psi \quad (3)$$

4.1.2 L'électron en interaction avec un champ E.M.

- principe d'interaction minimale (invariance de jauge) :

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \rightarrow \quad p_\mu - q A_\mu = i\partial_\mu - q A_\mu \quad (4)$$

par exemple : pour un électron $q = -e$ et $A_0 = A^0 = V$ (le potentiel électrique).

$$p_0 = i\partial_0 \quad \rightarrow \quad E + e A_0 = i\partial_0 + e V$$

- Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des fermions relativistes** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ s'écrit :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - qA)_\mu - m \} \Psi(x)$$

- Les courants de charges sont la source des champs :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$$

- L'équation de Dirac décrit l'action des champs sur les courants :

$$\{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu - m) \} \Psi(x) = 0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu + e \gamma^\mu A_\mu - m) \Psi(x)$$

- Conséquence (vers Klein-Gordon modifiée) :

$$\begin{aligned} & (\gamma^\mu p_\mu + e \gamma^\mu A_\mu + m) (\gamma^\nu p_\nu + e \gamma^\nu A_\nu - m) \Psi(x) = 0 \\ & \left((P + eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Psi(x) = 0 \text{ avec } P = (E, \vec{p}) \end{aligned}$$

où l'on voit que

- le spin n'interagit qu'avec le champ $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$
- mais le mouvement dépend encore du potentiel A_μ (expérience de Böhm Aharonov ...)

- Conséquence (vers l'équation de Schrödinger modifiée) :

$$\left((E + eV - m)(E + eV + m) - (p + eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0$$

- A la limite N.R. on trouve l'équation de Pauli.

$$\left((E + eV - m) - \frac{(p + eA)^2}{2m} + \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0$$

où l'on voit que le spin de l'électron non relativiste peut interagir avec

- le champ électrique (structure fine des raies et effet Stark 1906)
- et le champ magnétique (structure hyperfine et effet Zeeman 1902)

en résumé :

$$\delta E_{EM} \sim -\frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \text{ avec } e > 0$$

4.2 L'électron a un spin $\Rightarrow$ la structure fine

Le potentiel coulombien du noyau est solution statique de l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned} \square A_0 &= J_0 = +Ze\delta(\vec{x}) \\ A_0 &= V = \frac{Ze}{4\pi r} \quad F_{i0} = F^{0i} = -\mathcal{E}^i \end{aligned} \quad (5)$$

Le spin de l'électron intervient dans l'équation qui définit l'énergie E :

$$\delta E = -\frac{e}{2m} \sigma^{i0} F_{i0} = -i\frac{e}{2m} \alpha^i \mathcal{E}^i = \frac{e}{2m} (-i\alpha.\mathcal{E}) \quad (6)$$

En utilisant l'équation 3 on trouve que ce terme vaut ([18] page 58 ou [7] page 75):

$$\delta E = -\frac{e}{4m^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) (\vec{\sigma}.\vec{L})$$

avec V donné par l'équation 5

La situation énergétiquement favorable est $\vec{\sigma}$ à l'opposé $\vec{L}$.

Approximation N.R. : utilisant l'équation 3, l'action des opérateurs sur Ψ est telle que :

$$(-i\alpha.\mathcal{E}) \sim \frac{1}{2m} (\vec{\mathcal{E}}.(\vec{p} \wedge \vec{\sigma})) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\mathcal{E}_r}{r} \right) \vec{\sigma}.\vec{L} \quad \mathcal{E}_r = -\frac{dV}{dr}$$

4.3 Le nucléon a un spin $\Rightarrow$ la structure hyperfine , RMN ...

Le spin de l'électron intervient dans l'équation qui définit l'énergie E :

$$\delta E = -\frac{e}{4m} \sigma^{ij} F_{ij}$$

L'électron est dans le champ magnétique statique du noyau :

$$A_i \neq 0 \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} \mathcal{B}^k \quad \sigma_{ij} = +\epsilon_{ijk} \sigma^k \text{ avec } \epsilon_{123} = 1$$

$$\text{avec } \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = g\vec{S} \quad \text{avec } g = 2 + \dots$$

Le terme magnétique couple le spin de l'électron et le magnétisme nucléaire :

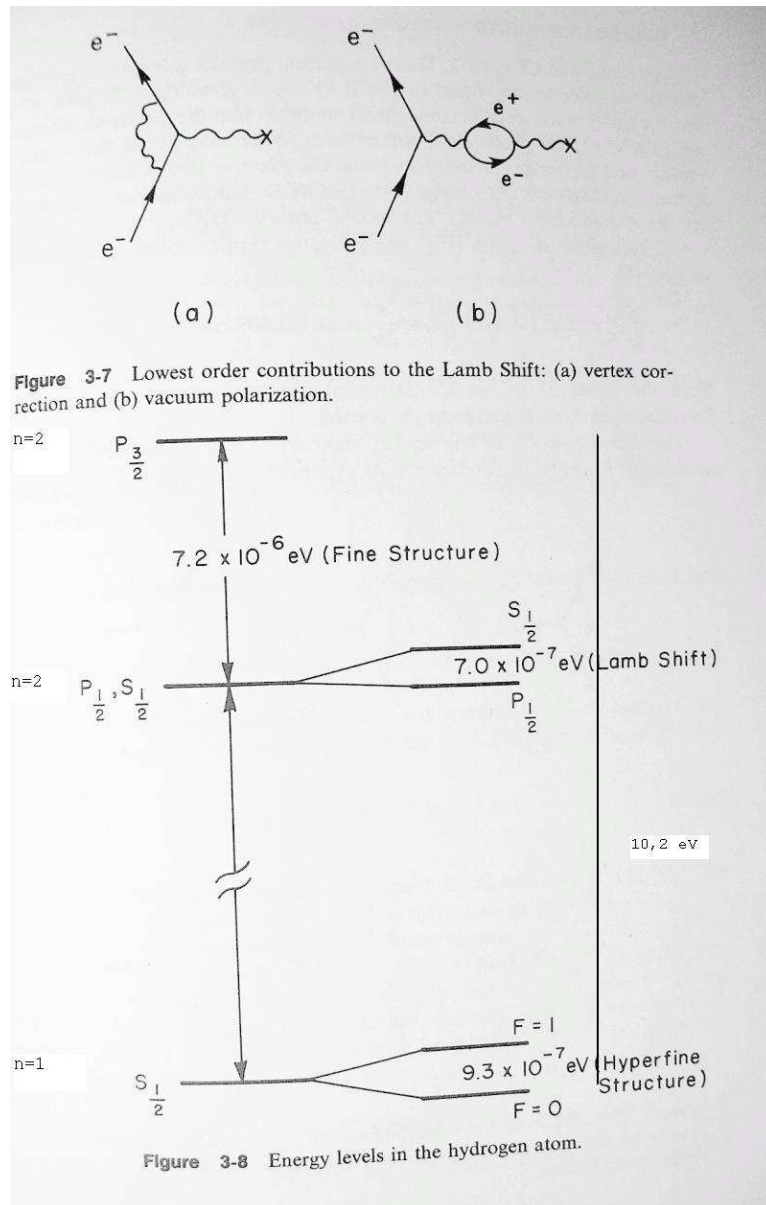
$$\delta E = +\frac{e}{2m} (\vec{\sigma}.\vec{\mathcal{B}})$$

La situation énergétiquement favorable est $\vec{\sigma}$ opposé à $\vec{B}$.

Remarque Le magnétisme nucléaire est faible car :

$$\mathcal{B} \propto \frac{e}{2M} \times g_N \text{ avec } g_N \sim 1$$

4.4 En résumé

Figure 18: Résumé des différents effets sur les niveaux $n=1$ et 2 de H : (réf [14])

5 Quantum Electro Dynamics : l'atome de Feynman

5.1 Le vide polarisé

Il faut prendre en compte les déformations du champ électromagnétique coulombien introduites par les premières "fluctuations quantiques" du vide.

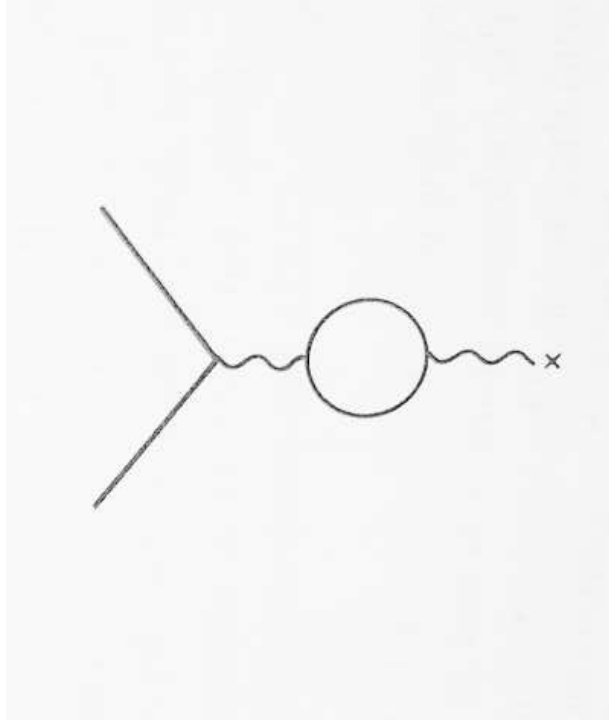


Figure 19: la polarisation du vide (réf [8] page 163)

Les équations du champ EM en présence d'une source relativiste (voir le lagrangien E.M.) s'écrivent :

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = +J^\mu \quad (7)$$

Rappels : L'équation 7 est invariante de jauge et peut s'écrire par T.F. :

$$\begin{aligned} (q^2 g_\nu^\mu - q^\mu q_\nu) A^\nu &= -J^\mu \\ A^\nu &\rightarrow A^\nu + q^\nu f \end{aligned}$$

La jauge de Lorentz impose la condition d'orthogonalité de A et q:

$$q_\nu A^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad A^\nu = \frac{g_\mu^\nu}{q^2} (-J^\mu) = -\frac{1}{q^2} J^\nu \quad (8)$$

Et si le photon était massif (masse M), on perdrait l'invariance de jauge :

$$((q^2 - M^2) g_\nu^\mu - q^\mu q_\nu) A^\nu = -J^\mu \quad (9)$$

$$\text{soit } A^\nu = \frac{1}{q^2 - M^2} (g_\mu^\nu - \frac{q^\nu q_\mu}{M^2}) (-J^\mu) \quad (10)$$

Le courant (associé au proton) est statique à l'ordre 0 :

$$J^\mu = (Ze \delta(\vec{x}), \vec{0})$$

Par TF, la solution de l'équation se trouve être le champ de Coulomb :

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{q^2}(-J^0) = \frac{Ze}{\vec{q}^2} \delta(q^0) \\ -\Delta(A^0) &= Ze\delta(\vec{r}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$A^0 = \frac{Ze}{4\pi r} \quad \text{et} \quad \vec{A} = \vec{0} \quad (12)$$

5.2 Renormalisation de QED et polarisation du vide (réf [8] page 152)

Aux ordres supérieurs, il faut introduire des graphes tels que celui de la figure 19 dans le calcul du champ. Il existe plusieurs méthodes pour construire la correction, une possibilité consiste à étudier le propagateur du champ A^μ dans l'espace temps. A l'ordre 0, la propagation est libre, à l'ordre 1 intervient l'interaction du champ avec le vide quantique (paire $e^+ e^-$ et ainsi de suite).

D'une manière générale le propagateur du champ s'écrira : (réf [8] page 152,[7] page "319-327,[11] page 105-107,[6] page 598-601)

$$(-i)\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} + (-i)\frac{g^{\mu\rho}}{q^2}\mathcal{P}(q,e)_{\rho\sigma}(-i)\frac{g^{\sigma\nu}}{q^2} \quad (13)$$

La matrice de polarisation $\mathcal{P}$ est un tenseur d'ordre 2 fonction de q ; à cause de la conservation des courants et de l'invariance de jauge, il est de la forme (à voir en détail ...) :

$$\mathcal{P}(q,e)_{\rho\sigma} = -i g_{\rho\sigma} q^2 I(q^2, e) \quad (14)$$

Il en résulte évidemment, que le propagateur du champ se simplifie :

$$(-i)\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}(1 - I(q^2, e)) \quad (15)$$

Ce champ électromagnétique est couplé aux charges électriques des courants qui émettent et reçoivent ces photons virtuels, l'amplitude qui en résulte est de la forme :

$$(-i)e^2 \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}(1 - I(q^2, e)) \quad (16)$$

La charge (constante de couplage) devient une fonction de q^2 c'est à dire des conditions expérimentales. Mesurée à distance macroscopique elle est celle qui est éprouvée à $q^2 \sim 0$ donc

$$e_r^2 = e^2 (1 - I(0, e)) \quad (17)$$

Cette charge e_r est la charge électrique qui vaut $\sqrt{4\pi\alpha}$! Il s'en suit que l'amplitude d'interaction électromagnétique entre les courants pourra s'écrire :

$$(-i)e_r^2 \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \frac{1 - I(q^2, e)}{1 - I(0, e)} \sim (-i)e_r^2 \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}(1 - a q^2) \quad (18)$$

La calcul de la constante "a" relève des mathématiques associées à la fonction $I(q^2)$ qui est une fonction infinie (non définie de q^2). La charge mesurée et renormalisée devient fonction de q^2 .

Grâce à la renormalisation, cette constante est définie et à l'ordre le plus bas, elle vaut : (réf [8]):

$$a = \frac{e_r^2}{60\pi^2 m^2} = \frac{\alpha}{15\pi m^2}$$

(réf [8] page 156 équation 7.26,[7] page 327,[11] page 107,[6] page 601 équation 113,14) Le potentiel coulombien devient avec la polarisation du vide :

$$U = -e_r \times A^0 = -Ze_r^2 \left(\frac{1}{4\pi r} + a \delta(\vec{r}) \right) \quad (19)$$

Numériquement : (réf [8] page 159)

$$\delta U = -Ze_r^2 a \delta(\vec{r}) \Rightarrow \Delta E_{n,l} = -Ze_r^2 a |\Psi(0)_{n,l}|^2 \delta_{0,l} \quad (20)$$

Calcul numérique de la polarisation du vide sur l'état n=2 avec Z=1 :

$$|\Psi(0)_{2,0}|^2 = \frac{1}{8\pi a_0^3} \text{ référence : figure 8 avec } a_0 = 0,0529 \text{ nm (rayon de Bohr)}$$

$$e_r^2 = 4\pi\alpha \text{ avec } \alpha = 1/137,0$$

$$\hbar c = 197,327 \text{ eV.nm} \quad h = 4,135667 \cdot 10^{-15} \text{ eV.s}$$

$$\Delta E_{2,0} = -\frac{(e_r^2)^2}{60\pi^2} \left(\frac{1}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{1}{8\pi a_0^3} \right) = 1.11 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

$$\nu = |\Delta E_{2,0}|/h = 27 \text{ MHz}$$

$$\Delta E_{2,0}/h = -27 \text{ MHz} \quad \text{comparé à } +1057 \text{ MHz référence : figure 16}$$

5.3 Conclusion

La polarisation du vide dans l'hydrogène est faible mais mesurable : 27 MHz comparé à 1057 MHz.

La procédure de renormalisation s'étend au moment magnétique et à la masse de l'électron dans QED.

La charge électrique croît quand la distance décroît : figure 20

Dans QCD, la charge forte croît quand la distance croît [8] page 168 et 10 ce qui "<explique"> le confinement des quarks dans QCD : figures 21 & 22.

Ce comportement des constantes de couplage est connu sous le terme : **running coupling constant**.

En quelque sorte, la théorie devient fonction de l'énergie des expériences. On peut dire que la théorie perd son caractère universel pour devenir phénoménologique.

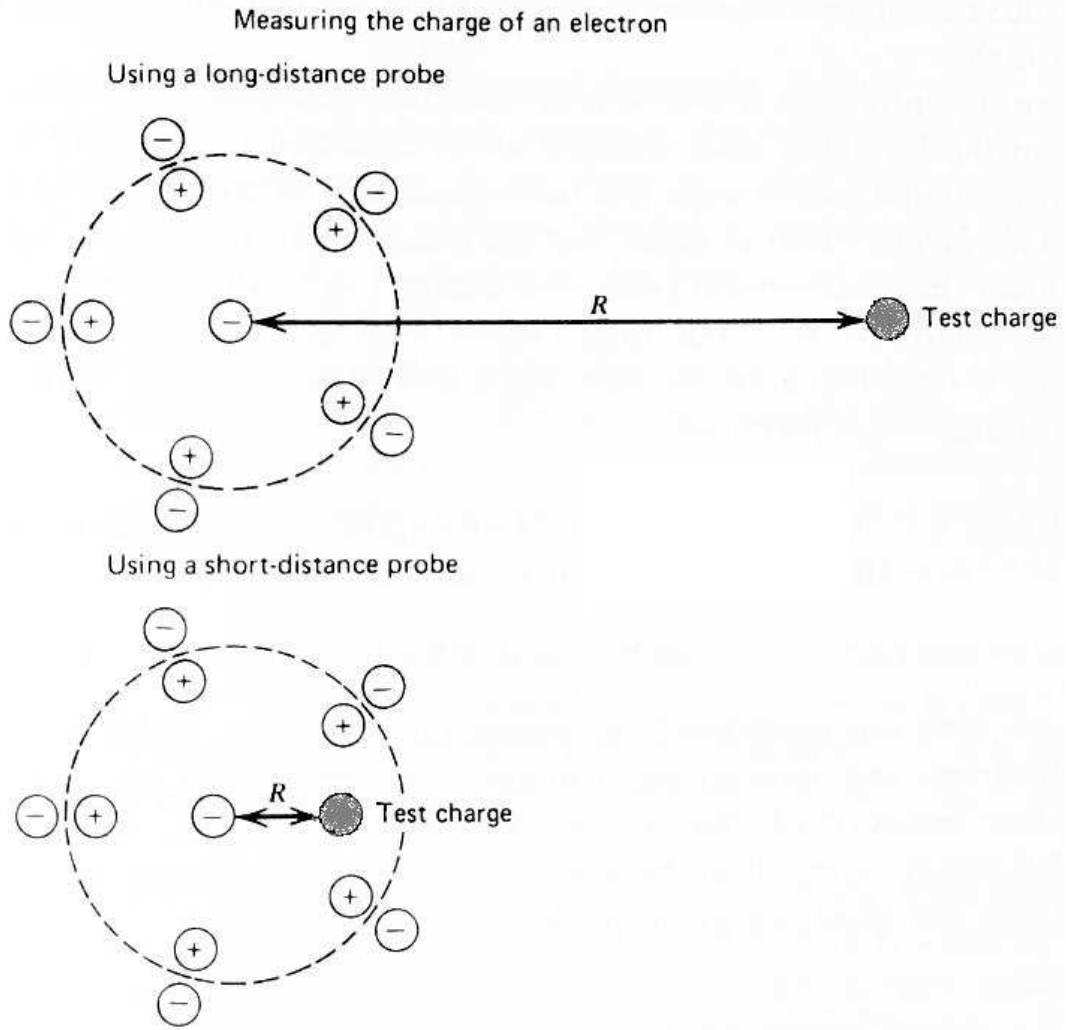


Fig. 1.6 Measuring the charge of an electron.

Figure 20: La mesure du couplage électromagnétique à grande et petite distance : (réf [8] page 11)

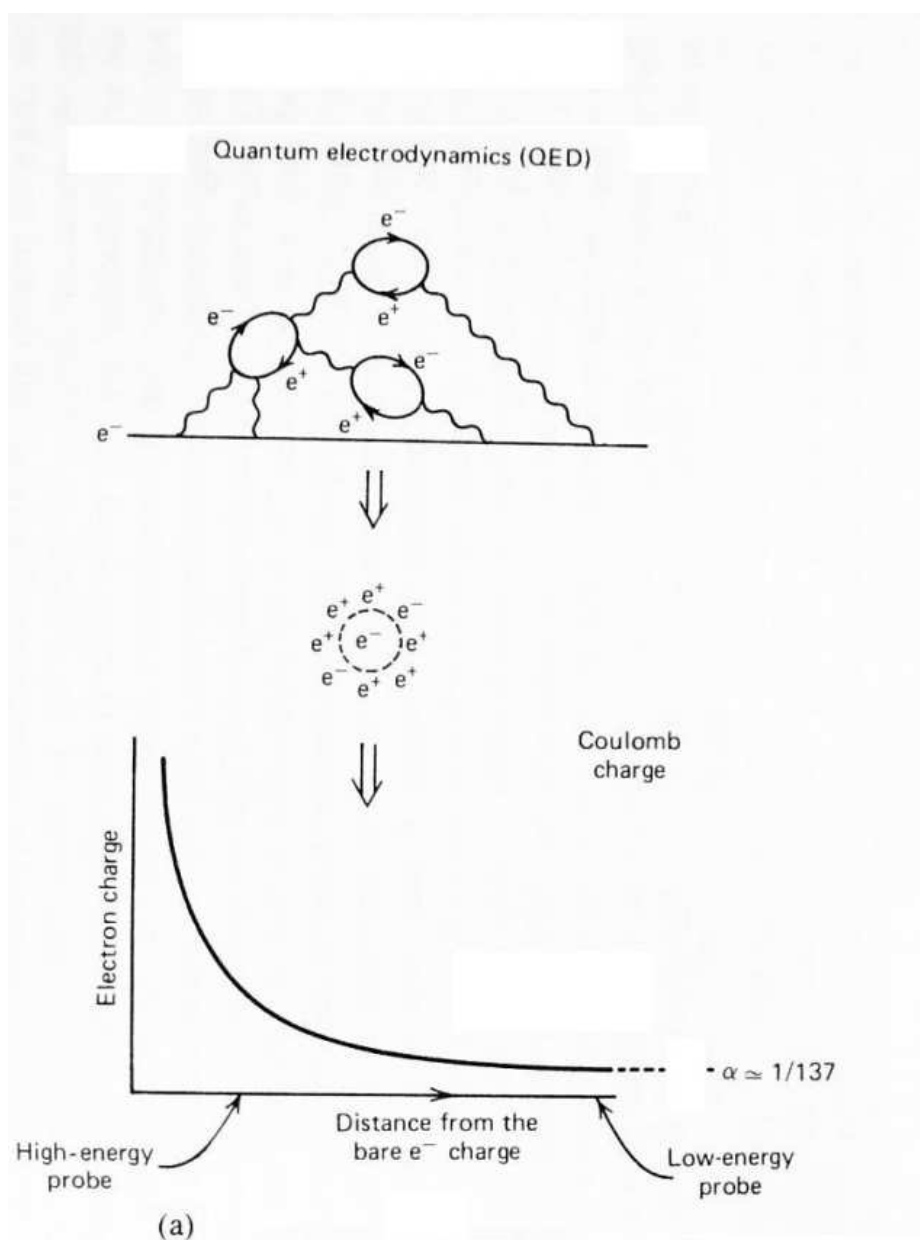


Fig. 1.5 Screening of the electric charge

Figure 21: Variation de l'interaction électromagnétique avec la distance : (réf [8] page 10)

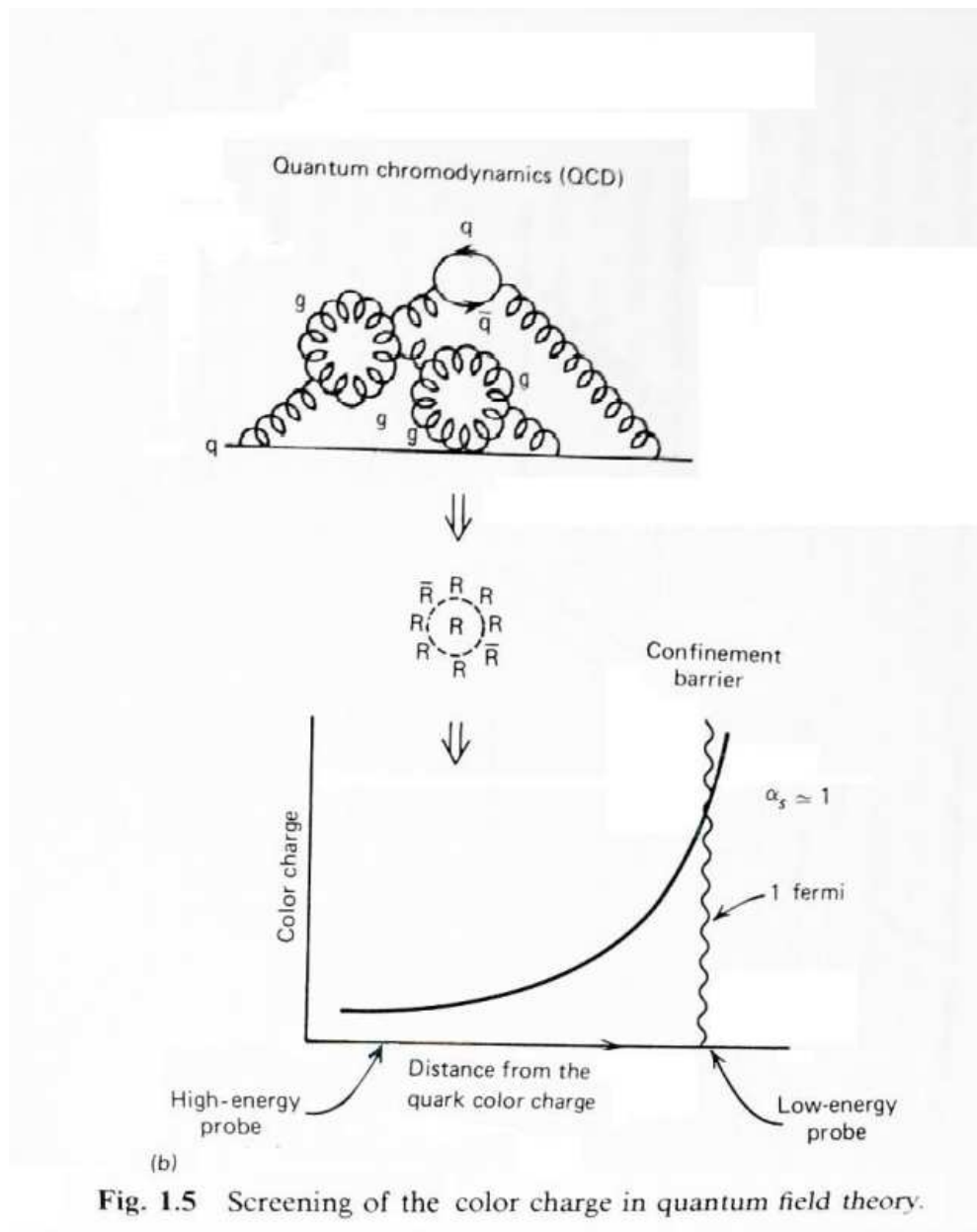


Fig. 1.5 Screening of the color charge in quantum field theory.

Figure 22: Variation de l'interaction forte avec la distance : (réf [8] page 10)

6 CONVENTIONS

$$\begin{aligned}
c &= \hbar = 1 \\
\epsilon_0 &= \mu_0 = 1 \\
\alpha &= \frac{e^2}{4\pi} \\
g_{\mu,\nu} &= g^{\mu,\nu} = (1, -1, -1, -1) \text{ avec } \mu = 0, 1, 2, 3 \\
p^2 &= m^2 \text{ et } i\partial_\mu = p_\mu
\end{aligned} \tag{21}$$

Les matrices sigma de Pauli (réf 1) :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les équations de Klein-Gordon et de Dirac s'écrivent :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0 \text{ avec } \partial^\mu \partial_\mu \equiv -\square$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

Les matrices gamma dans la représentation de Pauli-Dirac (réf [8] page 111) :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ (réf [8] page 101)}$$

Les matrices gamma dans la représentation de Weyl ou chiral (réf [8] page 115) :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \text{ (réf [8] page 101)}$$

L'électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique (6 composantes $\equiv$ E et B).

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A^\mu = (V(x), \vec{A}(x)) \text{ le potentiel électromagnétique}$$

$$\vec{E} = (E^i = F^{i0}) \quad \vec{B} = (B^k = -F^{ij})$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [1]$$

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \quad [2]$$

• $F_{\mu\nu}$ antisymétrique : $\Rightarrow$ l'invariance de jauge & la conservation de J_μ & la conservation de la relation $P^2 = m^2$. L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue et la dynamique peut être extraite du principe de moindre action (A_{min}).

$$A = \int -md\tau - q A_\mu dx^\mu$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot v^\nu) \quad \text{avec } v^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} \tag{22}$$

7 INDEX

-

[4]

- page 142-144 : l'équation de schrödinger dans un champ central
- page 317 : les configurations électroniques des éléments
- page 315 : potentiels d'ionisation
- page 748 : les harmoniques sphériques
- page 749 : la fonction d'onde radiale

[5]

- page 51-52 : le problème de kepler (équation 15,4)

[7]

- page 66 : équation relativiste de l'électron (équation 2.73)
- page 75 : la structure fine
- page 76 80-81 : Structure fine, hyperfine & lamb shift

[8]

- page 137 : le propagateur du photon
- page 149 : les "Feynman rules"
- page 152 : les boucles et la renormalisation
- page 153 : la diffusion Rutherford
- page 155 - 157 : la polarisation du vide
- page 158 - 160 : le Lamb shift
- page 162 : le g-2
- page 168 : la renormalisation
- page 177 & 178 : la taille finie des nucléons : formule de Rosenbuth

[15]

- page 195-197 : L'équation de Schrödinger dans un champ central.
- page 206 : le nombre quantique radial
- page 209 : les transitions dans l'hydrogène

[18]

- page 5 : les harmoniques sphériques
- page 50 : équation relativiste de l'électron (equation 10.14)
- page 51 : la renormalisation des couplages
- page 58, 59, 61 : l'interaction spin-orbite
- page 87 : les alcalins

[20]

- page 133 : le nombre d'Avogadro
- page 187 : les harmoniques sphériques
- page 326 : les transitions radiatives de l'hydrogène
- page 207-208 : les fonctions d'ondes
- page 210 : les raies du sodium
- page 262 : la structure fine : formule
- page 355 : mesure de h constante de Planck

[21]

- page 115 : l'expérience de Stern & Gerlach
- page 154 & 169: Une expérience en physique atomique
- page 162 : les corrections relativistes dans l'hydrogène : la raie H_α
- page 166 : la raie Lyman : L_α
- page 27 : la fonction d'onde radiale
- page 34 : les transitions dans l'hydrogène
- page 39 : les corrections relativistes dans l'hydrogène
- page 40-41 : le Lamb shift
- page 60, 62 & 63: Configuration électronique et niveaux des alcalins

[22]

- w3 : la mesure de la transition Lyman α de hydrogène

[23]

- w3 : Les niveaux Lyman α de hydrogène : structure fine, hyperfine et lamb shift.

References

- [1] R. Feynman & al., Phys. Rev., **76**, (1949) 749 The theory of positrons.
 - [2] R. Feynman & al., Phys. Rev. , **76**, (1949) 769
Space-time approach to quantum electrodynamics.
 - [3] R. Feynman, Phys. Rev., **80**, (1950) 440
Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction.
 - [4] L. Landau & E. Lifchitz, MIR Edt, **Mécanique quantique**, (1966) .
 - [5] L. Landau & E. Lifchitz, MIR Edt, **Mécanique**, (1966) .
 - [6] L. Landau & E. Lifchitz , MIR Edt , **Electrodynamique quantique**, (1976) .
 - [7] C. Itsykson & Zuber, Macgraw Hill, **Quantum field theory**, (1980) .
 - [8] F. Halzen & al., John Wiley, **Quarks and leptons**, (1984) .
 - [9] L.H. Ryder, Cambridge U.P., **Quantum Field Theory**, (1985) .
 - [10] B. de Wit & al., North holland, **Field theory in particle physics**, (1986) .
 - [11] S.J. Chang, World Scientific, **Introduction to Quantum Field Theory**, (1990) .
 - [12] I. Aitchison & al., Institute of Physics, **Gauge theories in particle physics**, (2004) .
 - [13] M. Veltman, Cambridge U.P., **Diagrammatica**, (1994) .
 - [14] D. Cheng & al. , Addison Wesley, **Elementary particle physics**, (1979) .
 - [15] D. Blokhintsev , MIR, **Principes de mécanique quantique**, (1976) .
-
- [16] W.E. Lamb & R.C. Retherford, Phys. Rev., **79**, (1950) 549.
 - [17] W.E. Lamb , Rep. Progr. Phys., **14**, (1951) 19.
 - [18] H. Bethe & E Salpeter, Springer verlag, **Quantum mechanics of one and two electron atoms**, (1957) .
 - [19] A. Akhiezer, MIR Edt et Ellipses, **Physique atomique**, (1988) .
 - [20] E. Chpolski, MIR Edt, **Physique atomique**, (1974) .
 - [21] C. Foot, Oxford U.P., **Atomic physics**, (2005) .
 - [22] Eric Weisstein, [http, scienceworld](http://scienceworld.wolfram.com/physics/HydrogenLines.html), (2005) /physics/HydrogenLines.html
 - [23] Georgia state university, [http, hyperphysics](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hyde.html), (2005) /hbase/hyde.html

The Postulates of Quantum Mechanics

1. Associated with any particle moving in a conservative field of force is a wave function which determines everything that can be known about the system
2. With every physical observable q there is associated an operator Q , which when operating upon the wavefunction associated with a definite value of that observable will yield that value times the wavefunction
3. Any operator Q associated with a physically measurable property q will be Hermitian.
4. The set of eigenfunctions of operator Q will form a complete set of linearly independent functions.
5. For a system described by a given wavefunction, the expectation value of any property q can be found by performing the expectation value integral with respect to that wavefunction.
6. The time evolution of the wavefunction is given by the time dependent Schrodinger equation.