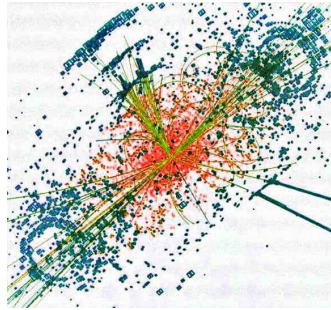


Essai sur l'invariance de jauge

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

16 décembre 2008

Version *en travaux*



Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire "sur la particule de Higgs" présenté le 16 décembre 2008 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville. Il s'agit de rediscuter de l'invariance de jauge dans le cas abélien de l'électrodynamique et non-abélien de la théorie électrofaible.

Les thèmes qui nous intéressent sont les suivants

- le rôle de la masse du photon en électromagnétisme
- les monopoles, l'invariance électro-magnétique et les extensions de l'électromagnétisme
- le passage à l'électromagnétisme quantique
- les spineurs de l'équation de Dirac
- la constante de couplage g et l'invariance de jauge ?
- l'unification électrofaible et le mécanisme de Higgs
- l'application des algèbres de Clifford à ces différentes questions

*UNIVERSITE DE CAEN année 2008-2009

SOMMAIRE

1	L'approche lagrangienne classique de Maxwell	5
2	L'électrodynamique quantique	6
2.1	L'électron dans un champ classique $\hbar = 1$	6
2.2	Les interactions quantiques électron-photon	6
2.3	Principe d'interaction minimale (minimal coupling)	7
2.4	La mécanique ondulatoire et la moindre action ¹⁴	8
2.5	L'invariance de jauge en QED	8
3	Les bosons vectoriels massifs ou de masse nulle	9
3.1	Le lagrangien de Proca	9
3.2	Les équations dynamiques de Lagrange-Euler	9
3.3	La condition de Lorentz	9
3.4	Le propagateur du boson B_μ massif	11
4	La transformation de jauge dans les théories de Yang-Mills	12
4.1	Propriétés attendues du groupe de jauge	12
4.2	Le principe d'interaction minimal (minimal coupling)	12
4.3	L'invariance de jauge	13
4.4	Le tenseur bosonique et le lagrangien des bosons	14
4.5	L'invariance de jauge et la dynamique des bosons	14
4.6	Le Lagrangien total des fermions et des bosons en interaction	15
4.7	Les choix de Weinberg-Salam (1967)	15
5	La particule de Higgs et les masses des bosons (1964)	16
5.1	Le mécanisme de Higgs-Kibble	16
5.2	Le cas $SU(2)_L \otimes U(1)$	17
6	Conclusion	18

List of Figures

1	L'électrodynamique à l'ordre 1	7
2	l'interaction dans les théories de jauge	13
3	La self interaction des bosons de jauge	15
4	détection d'un boson de Higgs dans le détecteur CMS (simulation)	21

List of Tables

1	Notations	4
2	Les fermions Left & Right de Weinberg	15
3	Les résultats expérimentaux : $\theta_W = 27,8^0$	16
4	Les bosons scalaires de Higgs-Weinberg	17
5	Les masses des bosons vectoriels W Z	18
6	Les (principaux) paramètres du modèle avec	19

Notations

$\mu = 0, 1, 2, 3$: indices de l'espace temps

$g_{\mu\nu} = +1 - 1 - 1 - 1$: tenseur métrique dans l'espace temps

$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx_i^2}$: temps propre sur une trajectoire

γ_μ : les matrices de Dirac

T_a les générateurs d'un groupe de Lie : SU2, SU3 ... avec $a = 1, 2, \dots, n$.

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \text{et} \quad \not{X} = \gamma_\mu Y^\mu$$

A_μ	quadri-potentiel électromagnétique
P_ν	quadri-vecteur énergie-impulsion
q_ν	quadri-transfert dans une interaction
$F_{\nu\mu}$	tenseur électromagnétique
$\mathcal{E}$	le champ électrique
$\mathcal{B}$	le champ magnétique
$\mathcal{D}$	l'excitation électrique
$\mathcal{H}$	l'excitation magnétique
$\mathcal{J}$	la densité de courant
$\mathcal{F}$	Force relativiste de H. Minkowski
E_i	champ électrique
B_j	champ magnétique
$\mathcal{A}$	l'action
A	l'amplitude quantique
$\mathcal{S}$	la matrice S
$\mathcal{L}(x)$	la densité lagrangienne
$\mathcal{H}$	l'espace de Hilbert
$\mathcal{H}(x)$	la densité hamiltonienne
$\mathcal{W}$	l'énergie
$\mathcal{W}(x)$	la densité d'énergie

Table 1: Notations

1 L'approche lagrangienne classique de Maxwell

La dynamique classique de l'interaction du champ et des charges peut s'exprimer sous une formulation lagrangienne relativiste ; il faut alors considérer les différents termes du lagrangien $\mathcal{L}$ et l'action associée:

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt$$

La dynamique est fixée en principe par $\mathcal{A}$ minimum entre un état initial et final physiquement acceptables.

Le lagrangien de la particule libre

$$\mathcal{L}_0 = -m\sqrt{1-v^2}$$

à la limite non-relativiste $\mathcal{L}_0$ devient

$$\mathcal{L}_0 = -m + \frac{m}{2}v^2$$

La masse apparaît comme une énergie potentielle ce qui est physiquement satisfaisant car on sait elle peut se convertir en énergie cinétique.

$$\mathcal{L}_0 dt = -m d\tau = -p^\mu dx_\mu$$

L'action est à un facteur près le temps propre de la particule libre ce qui est également assez naturel.

Le lagrangien du champ électromagnétique libre

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

exprimé en fonction des champs

$$\mathcal{L}'_0 = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{H})$$

Le lagrangien de l'interaction classique

$$\mathcal{L}_{int} = -A_\mu j^\mu \quad \text{avec} \quad j^\mu = q v^\mu \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (1)$$

explicitement :

$$\mathcal{L}_{int} = q (-V + \vec{A} \cdot \vec{v})$$

Le lagrangien total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}_{int}$$

Les équations de Lagrange - Euler avec $\mathcal{L}$

$$\partial^\nu (\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = 0 = \partial_\nu F^{\rho\sigma} + \partial_\rho F^{\sigma\nu} + \partial_\sigma F^{\nu\rho} \quad \text{si } \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = +1 \quad [a]$$

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \epsilon_0^{-1} \mathcal{J}_\mu \quad [b]$$

$$m \frac{dV_\mu}{d\tau} = (F_{\mu\nu} \cdot \mathcal{J}^\nu) = q (F_{\mu\nu} \cdot V^\nu) \quad [c]$$

soit les équations de Maxwell (2)

2 L'électrodynamique quantique

2.1 L'électron dans un champ classique $\hbar = 1$

L'électron est représenté par un champ de spineurs (spin $1/2 \times 2$) de Dirac tel que

$$\psi(x)$$

$\psi(x)$ est la fonction d'onde quantique à laquelle est associée une densité de courant de charges électroniques ($q = e$)

$$\mathcal{J}_\mu = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Le champ électromagnétique est classique

$$A_\mu(x) \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

La densité de lagrangien dans l'espace temps :

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(\gamma^\mu i \partial_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu \mathcal{J}_\mu \quad (3)$$

et l'action devient

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) d^4x$$

2.2 Les interactions quantiques électron-photon

Mathematics (from Wikipedia) ¹

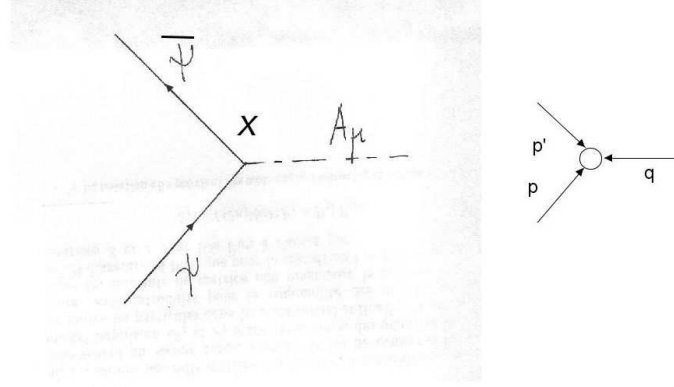
Mathematically, QED is an abelian gauge theory with the symmetry group $U(1)$. The gauge field, which mediates the interaction between the charged spin-1/2 fields, is the electromagnetic field. The QED Lagrangian for a spin-1/2 field interacting with the electromagnetic field is given by the real part of :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i D_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4)$$

where

- γ_μ are Dirac matrices;
- ψ a bispinor field of spin-1/2 particles (e.g. electron-positron field);
- $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$, called "psi-bar", is sometimes referred to as Dirac adjoint;
- $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ is the gauge covariant derivative;
- e is the coupling constant, equal to the electric charge of the bispinor field;
- A_μ is the covariant four-potential of the electromagnetic field;
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ is the electromagnetic field tensor.

¹Quantum electrodynamics



$$S = \frac{-i}{\hbar} \int (2\pi)^4 \delta^4(q + p' + p) [A_F^\mu(q) \bar{\psi}_F(p') (-e \gamma_\mu) \psi_F(p)] d^4q d^4p d^4p'$$

Figure 1: L'électrodynamique à l'ordre 1

Euler-Lagrange equations²

Next, we can substitute this Lagrangian into the Euler-Lagrange equation of motion to find the field equations for QED.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = e\gamma_\mu A^\mu \psi. \quad (5)$$

The left-hand side is like the original Dirac equation and the right-hand side is the interaction with the electromagnetic field.

One further important equation is for the field, A_μ :

$$\epsilon_0 \partial_\nu F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (6)$$

2.3 Principe d'interaction minimale (minimal coupling)

L'interaction électron-photon ($q \equiv e$) est construite en utilisant le principe d'interaction minimal appliqué au lagrangien libre

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow p_\mu' = i\partial_\mu - e A_\mu$$

$$\text{ou} \quad \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie A_\mu$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Ce terme du lagrangien est associé au graphe du 1er ordre de la figure 1; il s'agit de l'interaction fondamentale (ou microscopique).

²Quantum electrodynamics

2.4 La mécanique ondulatoire et la moindre action¹⁴

Rappel ³ : Le principe de moindre action pour une particule ponctuelle dans un potentiel classique s'exprime par :

$$\mathcal{L} = \frac{m v^2}{2} - V(x) = \vec{p} \cdot \vec{v} - E \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{min} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} \mathcal{L} dt$$

$$\mathcal{L} dt = (\vec{p} d\vec{x} - E dt)$$

L'action est sans dimension ! $\mathcal{A}$ pourrait être la phase l'onde quantique si on associait le principe de moindre action avec la dynamique quantique de la particule :

$$\psi \propto \exp(+i\mathcal{A}) \psi_0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} \mathcal{L} dt \quad (7)$$

L'intégrale sur les chemins de Feynman est définie dans ce contexte.

2.5 L'invariance de jauge en QED

Notations : avec $\epsilon_0 = 1$ et $e \equiv q = -|e|$

• Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des champs relativistes** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ s'écrit :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial - eA)^\mu - m \} \psi(x) \quad (8)$$

La transformation de jauge quantique agit sur la phase des champs de fermions et laisse la dynamique invariante en profitant de l'invariance de jauge du champ électromagnétique.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp -ie\alpha(x) \cdot \psi(x)$$

$$P_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu + e \partial_\mu \alpha(x) \quad \mathcal{L}_{int}(x) = -e A^\mu(x) \cdot \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad : \quad F_{\mu\nu} \text{ invariant}$$

Remarque 1 : La dynamique lagrangienne (équations de Lagrange-Euler) est également invariante dans cette transformation.

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = \mathcal{J}_\nu(x) = e \bar{\psi} \gamma_\nu \psi(x) \quad (9)$$

$$\{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - m) \} \psi(x) = -e \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)$$

Remarque 2 : Si la fonction α est constante, la transformation de jauge est dite globale. Si la fonction α est, par exemple, linéaire $\alpha(x) = k_\mu x^\mu$ alors,

$$P_\mu \rightarrow P_\mu + e k_\mu$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + k_\mu$$

Remarque 3 : La transformation de phase **locale** sur ψ engendre un groupe de transformations unitaires continu commutatif agissant sur les champs de particules chargées.

$$U = \exp(-ie \alpha) \quad \alpha \text{ fct de}(x)$$

L'existence de cette symétrie est associée à certaines propriétés

³cf interactions relativistes : C.L. séminaire mars 2005

1. la conservation de la charge électrique.
2. la renormalisation de QED, c'est à dire la validité de QED à tous les ordres.
3. Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = \sum e_i$, c'est une matrice diagonale dans l'espace des fermions. Les valeurs propres sont par exemple 0 pour le neutrino et $e < 0$ pour l'électron.

$$U = \exp(-iQ \alpha(x))$$

4. Ces propriétés ont été généralisées en 1971 par Veltman et t'Hooft (prix nobel 1999) et appliquées au modèle de Weinberg⁴ (prix nobel 1979) qui unifiait antérieurement l'interaction électrofaible (modèle de Weinberg-Salam).

3 Les bosons vectoriels massifs ou de masse nulle

3.1 Le lagrangien de Proca

Le lagrangien libre pour Les bosons neutres peut être construit à partir de l'électromagnétisme en introduisant un terme de masse.

Si le boson B interagit à la manière du photon avec une source représentée par un courant $\mathcal{J}(x)$, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - \mathcal{J}_\mu(x) B^\mu \quad (10)$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ et m est la masse

3.2 Les équations dynamiques de Lagrange-Euler

L'équation dynamique de Lagrange pour le boson B est **l'équation de A. Proca** introduite dans les années 50 pour rendre compte de l'interaction forte sur le modèle de l'électromagnétisme⁵ ; cette équation fait apparaître une analogie formelle entre le terme de masse et la source du champ⁶

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 B_\nu - \partial^\mu \partial_\nu B_\mu = -m^2 B_\nu + \mathcal{J}_\nu \quad (11)$$

Le champ du boson B en présence de la source vérifiera :

$$(\partial^2 + m^2)B_\nu - \partial_\nu \partial^\mu B_\mu = \mathcal{J}_\nu \Rightarrow (\square - m^2)B_\nu + \partial_\nu(\partial^\mu B_\mu) = -\mathcal{J}_\nu$$

3.3 La condition de Lorentz

En dérivant par ∂_ν l'équation 11 de Proca, on montre que le champ B vérifie la condition de Lorentz pourvu qu'il soit massif $m > 0$ et que **le courant de sources $\mathcal{J}$ soit conservé**

$$m^2 \partial^\nu B_\nu = \partial^\nu \mathcal{J}_\nu = 0 \quad (12)$$

Cette condition (équation 14) réduit le nombre des composantes indépendantes du champ B , ce nombre passe de 4 à 3.

⁴A theory of leptons, Physical Review Letters, 13, 321-322 (1964)

⁵ http://www.theory.nipne.ro/poenaru/PROCA/proca_rila06.pdf Proca

⁶référence: preprint de Pierre Renaud 2008

Dans le référentiel du boson $p_i = 0$ et $p_0 = m$ alors $B_0 = 0$ et le champ bosonique est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à composantes dans $\mathbb{C}$. Il se transforme comme un vecteur $\mathbb{R}^3$ dans les rotations.

L'équation de Proca se transforme :

$$\partial^2 B_\nu = -m^2 B_\nu + \mathcal{J}_\nu \quad (13)$$

D'autre part, les équations 11 et 14 (de Proca) ne sont pas invariantes dans une transformation de jauge telle que

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (14)$$

car si $F_{\mu\nu}$ est invariant le terme $-m^2 B_\nu$ ne l'est pas.

Que se passe-t-il pour le photon ? réel ou virtuel ?

- **références** [3] pages 75-77 , [1] pages 134-141, [4] pages 88-93 , [2] pages 468-476
- Le courant est nécessairement conservé car $m = 0$ (équation 11) . Il existe donc une quantité conservée associée à ce courant, c'est la charge électrique .
- La dynamique est invariante de jauge , cette invariance permet de choisir A_μ en imposant une contrainte supplémentaire , par exemple la condition de Lorentz

$$\partial^\nu A_\nu = 0 \quad (15)$$

Dans cette jauge , le photon retrouve certaines propriétés des bosons massifs en particulier le photon est vectoriel. En fait, l'invariance de jauge est levée par l'introduction d'un terme de masse infiniment petit qui "fixe la jauge" tel que le lagrangien devienne :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{\lambda^2}{2} A_\mu A^\mu - \mathcal{J}_\mu(x) A^\mu \quad \text{avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (16)$$

Ce terme de masse sans conséquence physique à $\lambda \rightarrow 0$ impose la condition de Lorentz ! Le lagrangien peut encore être modifié (à la limite) par l'introduction d'un terme construit à partir de cette condition (le lagrangien de Stueckelberg référence [2] page 487)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{\lambda^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{2a} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \mathcal{J}_\mu(x) A^\mu \quad (17)$$

- Passons au photon réel avec $q^2 = 0$; le nombre des degrés de liberté n'est plus que 2 car

- On peut choisir la condition de Lorentz pour définir le potentiel

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

- Si le boson (photon) a une quantité de mouvement q déterminée son état s'écrit (réf [1] ou mieux réf [4])

$$A_\mu = \epsilon_\mu \exp(-iq \cdot x)$$

La condition de Lorentz impose l'orthogonalité de ϵ_μ et q_μ

$$\epsilon_\mu q^\mu = 0$$

Si on applique l'invariance de jauge (équation 14) avec la fonction $\alpha(x) = ia \exp(-iq \cdot x)$ on observe que la condition de Lorentz est préservée à $q^2 = 0$ car :

$$\epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + a q_\mu \Rightarrow \epsilon'_\mu q^\mu = \epsilon_\mu q^\mu + a q^2 = 0$$

On est amené à confondre les photons liés par la relation d'équivalence

$$\forall a \quad \epsilon_\mu \equiv \epsilon'_\mu$$

Par exemple, **on peut faire le choix** $\epsilon'_0 = 0$ avec $a = -\epsilon_0/q_0$

- **Pour les photons réels, évidemment de masse nulle, les deux conditions ci-dessous**

$$\epsilon'_\mu q^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon'_0 = 0$$

réduisent l'espace vectoriel de ϵ'_μ sur $\mathbb{C}$ à n'être qu'un plan perpendiculaire à $\vec{q}$, le photon n'a que deux états de polarisation.

- **Dans un autre contexte, si on choisit la jauge de Coulomb** (réf [3] page 74 , interactions $\sim$ instantanées)

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 = \partial^i A_i$$

L'équation 11 de Lagrange-Euler avec $m=0$ devient :

$$\square A_\nu - \partial_\nu \partial^0 A_0 = \mathcal{J}_\nu$$

L'équation vérifiée par la composante A_0 est l'équation de Poisson et sa solution est coulombienne (interaction instantanée)

$$-\Delta A_0 = \mathcal{J}_0$$

soit

$$A_0(x, t) = \int \frac{1}{4\pi|y-x|} \mathcal{J}_0(y, t) d^3y$$

Si la source est une charge statique q en $y=0$ alors $A_0(x, t)$ est le potentiel coulombien

$$A_0(x, t) = \frac{q(t)}{4\pi|x|}$$

si $\mathcal{J}_0(y, t) \equiv 0$, on retrouve la jauge de Lorentz.

3.4 Le propagateur du boson B_μ massif

Par transformation de Fourier, le propagateur du boson **libre** s'écrira avec $i\partial_\mu = q_\mu$:

$$((q^2 - m^2)g^{\nu\mu} - q^\mu q^\nu)^{-1} = \frac{1}{(q^2 - m^2)} \left(g_{\nu\mu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \right)$$

Si le courant de sources $\mathcal{J}$ est conservé le propagateur se simplifie :

$$\frac{1}{(q^2 - m^2)} g_{\nu\mu}$$

L'interaction du champ de bosons et du courant $\mathcal{J}$ est locale (en x) et doit permettre une émission ou une absorption quantifiée de bosons d'énergie et d'impulsion déterminées.

A cause du terme de masse, les lagrangiens ci-dessus ne sont pas invariants dans une transformation de jauge.

4 La transformation de jauge dans les théories de Yang-Mills

4.1 Propriétés attendues du groupe de jauge

Il s'agit d'une transformation linéaire continue éventuellement unitaire dans l'espace des fermions (spin 1/2), nous la noterons U . La transformation U sera dite locale car elle sera fonction de l'espace (continue dérivable). Cette transformation couple donc des propriétés internes (la nature des fermions) avec l'espace-temps relativiste.

Le groupe (de Lie) de transformations U sera caractérisé par ses générateurs T^a (avec $a = 1, \dots, n$) et son algèbre de Lie :

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (18)$$

Utilisant les conventions d'Einstein, on pourra écrire

$$U(\alpha) = \exp(-ig T_a \alpha_a(x)) \quad (19)$$

La constante g n'est pas indispensable à ce niveau mais prend un sens dans les équations finales.

Notation :

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \not{X} = \gamma_\mu Y^\mu \quad \text{et}$$

$$\tau(\not{X}) = \gamma_\mu T_a Y_a^\mu$$

Au voisinage de l'identité, la transformation U sera linéaire en α

$$U(\alpha) = 1 - ig T_a \alpha_a + \dots = 1 - ig \tau(\alpha) + \dots$$

Remarque : pour SU2, on obtient les générateurs T_a en fonction des matrices de Pauli

$$T_a = \frac{1}{2} \sigma_a \quad \text{avec } a = 1, 2, 3 \quad \sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \sigma_c \quad f_{abc} = \epsilon_{abc}$$

4.2 Le principe d'interaction minimal (minimal coupling)

Le lagrangien libre des fermions de spin 1/2 est construit pour conduire à l'équation de Dirac.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi(x) \quad (20)$$

En interaction avec les fermions nous introduisons des bosons vectoriels en nombre égal au nombre de générateur du groupe d'invariance soit $B_\mu a$. Dans la transformation, les champs, spineurs et bosons, sont transformés mais la dynamique lagrangienne doit rester invariante. Le lagrangien d'interaction est construit selon le principe d'interaction minimale généralisé aux groupes non-abéliens.

$$P_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \tau(B_\mu) \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{int} = -\bar{\psi}(g \tau(\not{B}))\psi(x) \quad (21)$$

L'équation de Lagrange-Euler s'écrit pour ces fermions en interaction avec les bosons :

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = g \tau(\not{B})\psi(x)$$

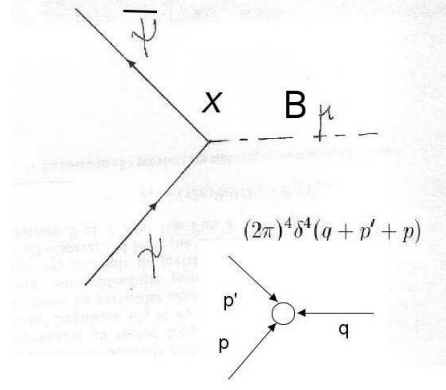


Figure 2: l'interaction dans les théories de jauge

4.3 L'invariance de jauge

L'invariance s'exprime par la stabilité de l'équation ci-dessus ou du lagrangien sous la transformation de jauge locale $U(\alpha(x))$:

$$(\not{P} - m) U \psi(x) = g \tau(\not{B}') U \psi(x) \quad \text{avec} \quad U = \exp(-i g \tau(\alpha(x)))$$

La condition de l'invariance de jauge dans le cas non-commutatif peut être construite en utilisant le commutateur $[(\not{P} - m), U] = [\not{P}, U]$:

$$\text{soit } (\not{P} - m) U = U (\not{P} - m) + [\not{P}, U]$$

La condition d'invariance fixe la loi de transformation des bosons :

$$\tau(\not{B}') = U \tau(\not{B}) U^{-1} + g^{-1} [\not{P}, U] U^{-1}$$

Au voisinage de l'identité, ($\alpha \sim 0$) cette condition implique :

$$\begin{aligned} U &= 1 - i g \tau(\alpha) + \dots \\ \text{et} \\ \tau(B'_\mu) &= \tau(B_\mu) - i g [\tau(\alpha), \tau(B_\mu)] + \tau(\partial_\mu \alpha) \end{aligned}$$

Composante par composante on obtient

$$B'_{\mu,a} = B_{\mu,a} + g f_{abc} \alpha_b B_{\mu,c} + \partial_\mu \alpha_a$$

Pour SU2, $a = 1, 2, 3$:

$$\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + g \vec{\alpha} \wedge \vec{B}_\mu + \partial_\mu \vec{\alpha}$$

En résumé, dans la théorie de Yang-Mills, les interactions des fermions et des bosons sont de type présenté sur le graphe de la figure 2. Les bosons vectoriels ($B_{\mu a}$) interagissent avec des fermions de spin 1/2 (ψ) en tout point de l'espace-temps.

Les interactions sont décrites par le lagrangien $\mathcal{L}_{int}$:

$$\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{J}_{\mu a} B^{\mu a} \equiv \text{graphe figure 2} \quad \mathcal{J}_{\mu a} = g \bar{\psi} \gamma_\mu T_a \psi(x)$$

Elles ne dépendent que d'une seule constante de couplage g ; les intensités relatives des différents processus possibles, voire les règles de sélection, sont fixées par les générateurs T_a du groupe d'invariance choisi (ci-dessus par exemple SU2).

4.4 Le tenseur bosonique et le lagrangien des bosons

Il reste à construire le lagrangien libre des bosons sur le modèle de l'électrodynamique. En électrodynamique, le lagrangien libre ne dépend que d'un tenseur d'ordre deux $F_{\mu\nu}$ construit par dérivation du champ A_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \dots \quad (22)$$

Revenons sur le principe d'interaction minimal qui transforme l'opérateur d'impulsion en présence d'un champ bosonique ; il permet une expression particulièrement simple du tenseur électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = i e^{-1} [P_\mu, P_\nu] \quad \text{avec} \quad P_\mu = i\partial_\mu - e A_\mu$$

On peut admettre sa généralisation aux interactions de jauge avec :

$$i\partial_\mu - g \tau(B_\mu) \quad \text{soit} \quad G_{\mu\nu} = i g^{-1} [P_\mu, P_\nu]$$

sans bosons $P_\mu = i\partial_\mu \Rightarrow F_{\mu\nu} = 0$

avec l'électromagnétisme $P_\mu = i\partial_\mu - e A_\mu \Rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

avec un champ bosonique $B_{\mu a}$ avec $P_\mu = i\partial_\mu - g\tau(B_\mu)$

$$G_{\mu\nu} = [\partial_\mu, \tau(B_\nu)] + [\tau(B_\mu), \partial_\nu] + ig[\tau(B_\mu), \tau(B_\nu)] = \tau(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) + ig[\tau(B_\mu), \tau(B_\nu)]$$

Soit

$$G_{\mu\nu} = \tau_a G_{\mu\nu a} = \tau_a (\partial_\mu B_{\nu a} - \partial_\nu B_{\mu a} - g f_{abc} B_{\mu b} B_{\nu c})$$

Remarque : pour SU2 , on obtient

$$G_{\mu\nu} = \vec{T} \cdot (\partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu - g \vec{B}_\mu \wedge \vec{B}_\nu)$$

4.5 L'invariance de jauge et la dynamique des bosons

Le lagrangien doit être un "nombre" pour conduire à un principe de moindre action , le tenseur $G_{\mu\nu}$ est un opérateur dans l'espace de la transformation de jauge ; pour généraliser l'électromagnétisme on admettra le lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{trace} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) + \dots = -\frac{1}{4} (G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu a}) + \dots \quad (23)$$

Le monde des bosons est donc plus complexe que celui des fermions car le lagrangien libre ci-dessus fait naturellement apparaître des self-interactions à 3 et 4 bosons (figure 3) qui feront que, par exemple, un boson pourra se transformer en 2 ou 3 autres bosons en respectant les règles de conservation.

D'autre part, la présence de termes de masse, d'ordre 2, dans le lagrangien ci-dessus brise l'invariance de jauge !

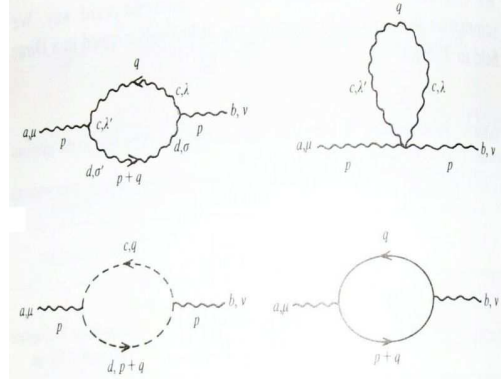


Figure 3: La self interaction des bosons de jauge

4.6 Le Lagrangien total des fermions et des bosons en interaction

Le lagrangien total est la somme des contributions présentées ci-dessus

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} (G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu a}) + \bar{\psi}(x)(i \not{\partial} - m) \psi(x) - g \bar{\psi}(x)(\tau(\not{B}))\psi(x) \quad (24)$$

(g est l'unique constante de couplage) avec

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu a} &= (\partial_\mu B_{\nu a} - \partial_\nu B_{\mu a} - g f_{abc} B_{\mu b} B_{\nu c}) \\ \tau(\not{B}) &= T_a \gamma^\mu B_{\mu a} \end{aligned} \quad (25)$$

Ce type de construction participe à la recherche d'une **unification des interactions** dans la mesure où une variété de transitions entre particules élémentaires sont regroupées dans le cadre d'un groupe de jauge avec un seul paramètre libre, la constante g .

4.7 Les choix de Weinberg-Salam (1967)

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ν_L	1/2	-1/2	0
e_L	-1/2	-1/2	-1
e_R	0	-1	-1

Table 2: Les fermions Left & Right de Weinberg

Pour respecter les propriétés connues des interactions faibles, Weinberg avait choisi dans sa publication de 1967, "a theory of leptons", deux groupes continus unitaires, $SU(2)_L \otimes U(1)^7$.

- $SU(2)$, constante de couplage g , agissant sur un doublet de fermions gauches

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ avec } T_a = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ et } B_{\mu a} = (W_{\mu 1}, W_{\mu 2}, W_{\mu 3})$$

- $U(1)$, constante de couplage g' , agissant sur ce doublet et sur un singulet droit électronique

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \oplus \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ avec } T_a = Y \text{ et } B_{\mu a} = (B_\mu)$$

⁷ou peut-être $U(2)_L \otimes U(1)_R$? car les sous-espaces L et R seraient alors sur un pied d'égalité.

Ce choix était justifié par la violation de parité par des interactions faibles et sa conservation par l'interaction électromagnétique.

L'interaction entre fermions et bosons est alors entièrement définie et sa confrontation avec l'expérience va demander environ 20 ans (il aura fallu au préalable étendre ce modèle aux hadrons ou plutôt aux quarks).

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\psi}_L \left(\sum_{a=1,2,3} T_a W_a \right) \psi_L - g' (\bar{\psi}_L (Y B) \psi_L + \bar{\psi}_R (Y B) \psi_R)$$

5 La particule de Higgs et les masses des bosons (1964)

A l'ensemble des constituants fondamentaux déjà introduits et expérimentalement fondés (fermions et bosons vectoriels) s'ajoute la particule de Higgs dont l'existence est essentiellement théorique.

la particule de Higgs est notée $\mathbf{H}^0$

C'est **un boson neutre et scalaire** qui, à travers une brisure de la symétrie de jauge, fait apparaître des termes de masse dans le lagrangien. Le mécanisme de Higgs-Kibble repris et appliqué par S. Weinberg au modèle électrofaible a permis une prédiction confirmée par l'expérience pour le rapport des masses des W et Z tout en laissant le boson A de masse nulle. C'est sans doute le grand succès de ce modèle qui relie ici des propriétés totalement indépendantes sur le plan expérimental.

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad M_A = 0 \quad tg(\theta_W) = \frac{g'}{g}$$

Si cette particule $\mathbf{H}^0$ peut être observée, elle doit être néanmoins rejetée en dehors du champ

	expériences
$\cos^2 \theta_W$	0,77
M_Z	91,19 GeV
M_W	80,40 GeV

Table 3: Les résultats expérimentaux : $\theta_W = 27,8^\circ$

d'expérimentation connu actuellement; plus précisément, sa masse doit être élevée, supérieure à 100 GeV. Ceci justifie la construction du LHC et des expériences qui y sont installées dont le coût doit se mesurer en milliards de francs-suisse (figure 4).

5.1 Le mécanisme de Higgs-Kibble

Considérons le cas étudié référence [1], page 326. Il s'agit de construire le lagrangien quantique et relativiste d'un boson scalaire chargé $\phi(x)$ sur lequel s'applique l'invariance de jauge électromagnétique U1

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + [(i\partial - eA)_\mu \phi]^+ [(i\partial - eA)^\mu \phi] - m^2 \phi^+ \phi(x) \quad (26)$$

avec $\phi = \phi_1 + i\phi_2$

La transformation de jauge équivaut à une rotation dans le plan complexe ϕ_1, ϕ_2

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp -ie\alpha(x) \cdot \phi(x) \quad (27)$$

La brisure de la symétrie consiste à postuler que l'action de ϕ sur le vide conduit à un état instable et que le champ physique du boson doit être redéfini :

$$\phi(x) = \eta(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

La partie électromagnétique du lagrangien devient

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(e^2 v^2) A_\mu A^\mu + [\eta \dots] \quad (29)$$

Il apparaît dans ce lagrangien le terme $A_\mu A^\mu$ qui "donne" une masse au photon , cette masse vaut :

$$m_A = e^2 v^2$$

5.2 Le cas $SU2_L \otimes U1$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ϕ^+	1/2	+1/2	1
ϕ^0	-1/2	+1/2	0

Table 4: Les bosons scalaires de Higgs-Weinberg

Suivant la lettre de Weinberg de 1967 (réf [5]) un boson scalaire est introduit dans la théorie, il appartient à un multiplet de l'isospin faible ($SU2$) ; l'hypothèse la plus simple est le doublet $\phi(x)$ d'isospin 1/2 :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad Q = T_3 + Y \quad (30)$$

Le lagrangien quantique relativiste pour ces bosons scalaires chargés sur lesquels s'applique l'invariance de jauge $SU2 \otimes U1$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(x) = \dots + | (i\partial - g T_a W_a - g' Y B)_\mu \phi |^2 - m_\phi^2 \phi^+ \phi + V(\phi) \quad (31)$$

En brisant la symétrie de telle sorte que

$$\phi(x) = \mathbf{H}^0(x) + \phi_0 \quad \text{avec } \phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \text{Cte !} \quad (32)$$

L'équation ci-dessus exprime le fait que le vide est instable en présence du champ ϕ car

$$\langle | \phi | \rangle = \phi_0 < | \rangle \neq 0$$

Les termes de masse des W_a, B sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dots + \frac{v^2}{2} | (-g T_a W_a - g' Y B)_\mu \phi_0 |^2 \quad \text{soit} \\ &= \dots + \frac{v^2}{8} | - \begin{pmatrix} gW_3 + g'B & g(W_1 - iW_2) \\ g(W_1 + iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |^2 \quad \text{soit} \\ \mathcal{L} &= \dots + \frac{v^2}{8} | (g(W_1 - iW_2)) |^2 + \frac{v^2}{8} | (gW_3 - g'B) |^2 + 0 \times | (g' W_3 + g B) |^2 \end{aligned} \quad (33)$$

particule	masse
$W^\pm$	$(v/2) g$
Z^0	$(v/2) \sqrt{g^2 + g'^2}$
A	0

Table 5: Les masses des bosons vectoriels W Z

Il en résulte que, si à la suite de Weinberg on effectue une rotation dans l'espace des bosons neutres (W_3, B), les masses des quatre bosons vectoriels physiques sont fixées théoriquement (table 5).

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ +g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}$$

avec expérimentalement (grâce à la désintégration bêta) $v \sim 250 \text{ GeV}$ ⁸

6 Conclusion

$$M_W/M_Z = g/\sqrt{g^2 + g'^2} = \cos \theta_W$$

La confrontation du modèle avec l'expérience a conduit à ce qu'il est convenu d'appeler le modèle standard (des particules) mais il a fallu de plus

- intégrer les hadrons par le biais des quarks qui sont des fermions de spin 1/2 et jouent le même rôle que les doublets électron-neutrino ; la dimension d'isospin faible peut porter par extension le nom de saveur. Le terme de saveur est aussi utilisé pour distinguer les différents types de leptons (électron-muon-tau et autres quarks) dont il n'a pas été question ici.
- y ajouter l'interaction forte avec QCD qui est aussi une théorie de jauge mais fondée sur SU3 (une théorie à 3 couleurs) : la dimension de l'isospin fort s'appelle la couleur. Les leptons doivent être considérés comme des singulets de couleur, les particules observables également car la couleur est un paramètre caché (les quarks n'ont jamais été observés directement).

En principe, la mécanique des interactions fondamentales est très simple mais les aspects quantiques demeurent mystérieux ; n'est-ce pas réconfortant ? Pour les valeurs numériques des constantes physiques , notre référence est le site du "particle data group"

⁸La dimension de v (au sens physique) est celle de ϕ , celle-ci est déterminée par celle du lagrangien $\mathcal{L} \sim m^2 \phi^2$ qui ne saurait être que E^4 car l'action $\int \mathcal{L} d^4x$ est une phase, un angle, dans le système d'unités où $\hbar = c = 1$, donc ϕ et v ont la dimension d'une énergie.

paramètre	modèle W& S	valeurs admises	fit exp. global (2000)
G_F	$G_F = g^2/4\sqrt{2}M_W^2$	$1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	
$\tilde{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}$		.7345	
$e = \sqrt{(4\pi\alpha)}$		0,303	0,30282
paramètre	-	prédiction	
θ_W	$\sin(2\theta_W) = 2 e/\tilde{g}$	$27,8^0$	$28,7^0$
v	$v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2}$	$246,3 \text{ GeV}$	
$\cos(\theta_W)$		0,8846	0,87683
g'	$g' = \tilde{g} \sin(\theta_W)$	0,3426	0,34536
g	$g = \tilde{g} \cos(\theta_W)$	0,6497	0,62983
$M_{W^\pm}$	$(v/2) g$	$80,00 \text{ GeV}$	$80,42 \text{ GeV}$
M_{Z^0}	$(v/2) \tilde{g}$	$91,56 \text{ GeV}$	$91,19 \text{ GeV}$
M_A	0	0	$< 2 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}$

Table 6: Les (principaux) paramètres du modèle avec

α électromagnétisme	G_β désintégration bêta	$\cos \theta_C$ particules étranges
1/137,036...	$1,1361.. \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	0,974..

$$G_\beta = G_F \cos(\theta_C)$$

References

- [1] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [2] M. Le Bellac. *{ Des phénomènes critiques aux champs de jauge }*. InterEditions CNRS, 1988.
- [3] S.J. Chang. *{ Introduction to Quantum Field Theory }*. World Scientific, Inc., 1990.
- [4] R. P. Feynman. *{ Theory of fundamental processes }*. Benjamin Inc., 1961.
- [5] S. Weinberg. *{ A theory of leptons }*. Physical review letters, 13, 1967.

Il existe beaucoup d'autres très bons manuels sur la théorie quantique des champs et les théories de jauge, j'ai eu l'occasion de m'y référer antérieurement⁹.

⁹C. Longuemare , séminaires d'analyse du LMNO (Caen) : Interactions électro-faibles (janvier 2006), Le lambshift (mars 2006).

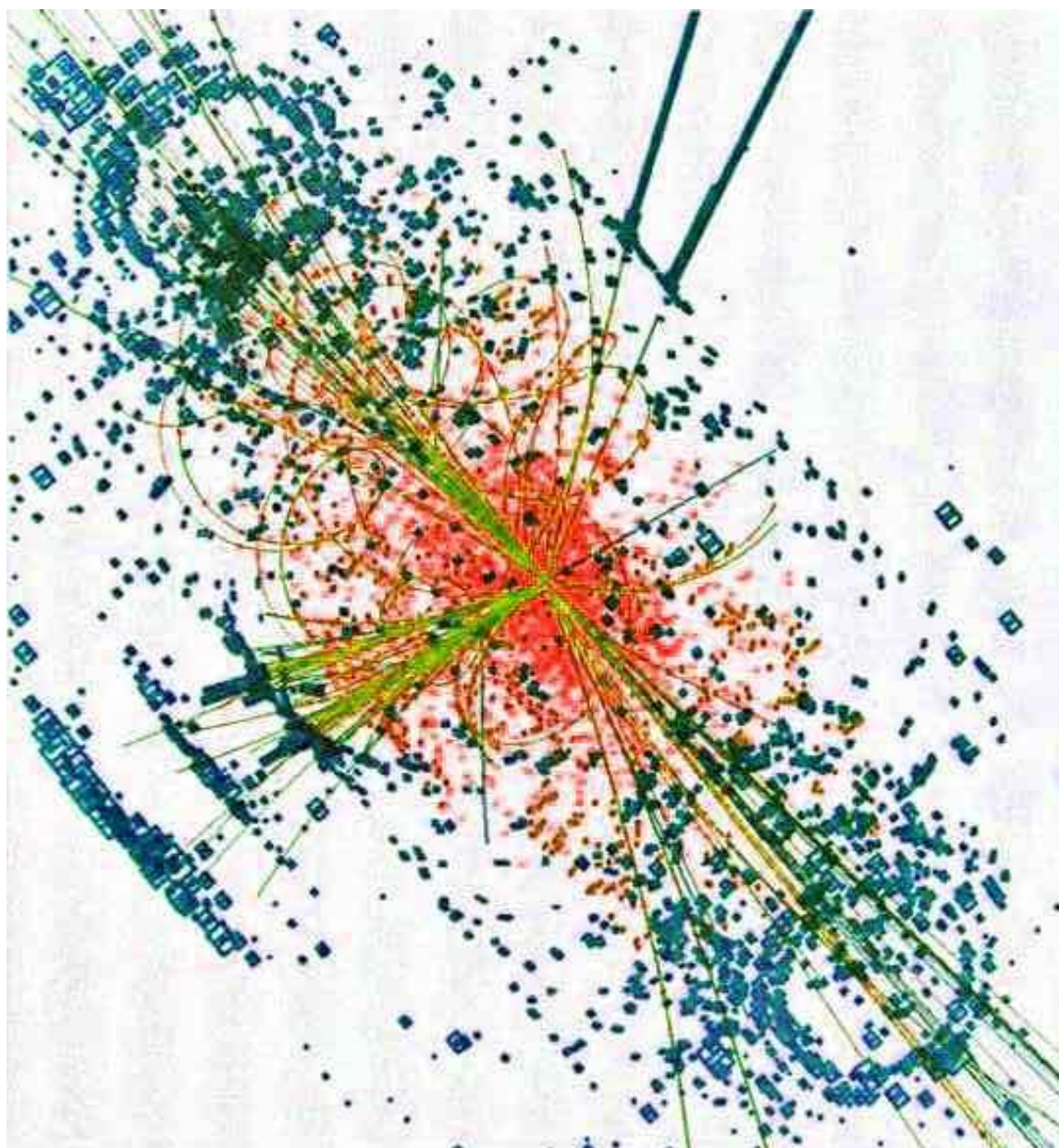


Figure 4: détection d'un boson de Higgs dans le détecteur CMS (**simulation**)