

Interactions électro-faibles

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

2 janvier 2006
Version 01/02/2006

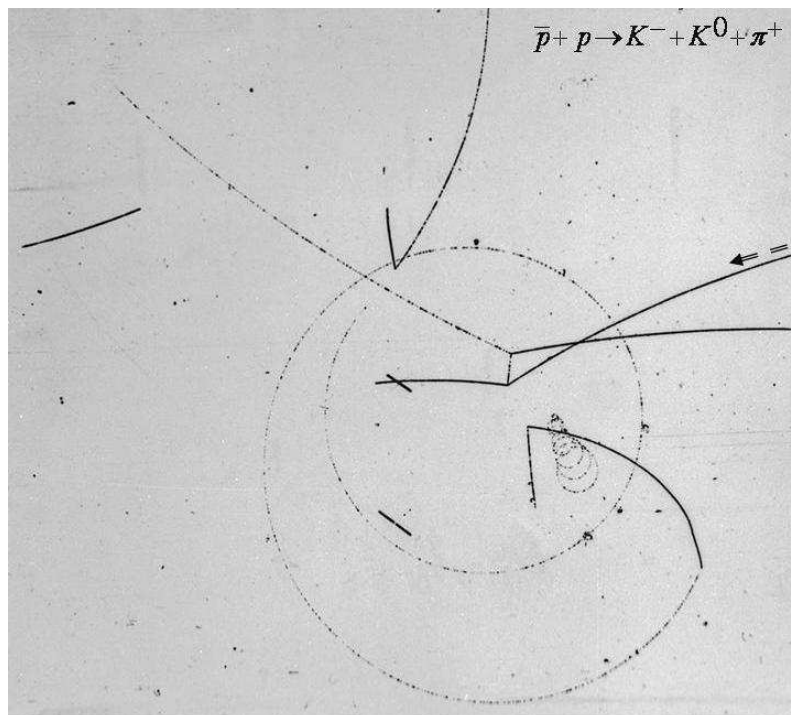
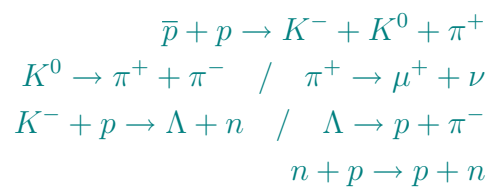


Figure 1: L'annihilation d'un anti-proton au repos dans l'hydrogène



Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire donné les 2 et 9 janvier 2006 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2005-2006

SOMMAIRE

1	Quelles particules pour quelle théorie ?	4
1.1	Les conventions des physiciens	4
1.2	Les particules fondamentales	5
1.3	Les interactions	5
2	Les ondes classiques	6
2.1	La corde vibrante	6
2.2	La dynamique lagrangienne et hamiltonienne	6
2.3	Interprétation physique des ondes classiques	6
2.4	En acoustique à 3D	7
3	Théorie quantique, quelques éléments	9
3.1	Objectifs	9
3.2	Les états in et out	9
3.3	La dynamique des ondes quantiques	10
3.4	Les ondes électromagnétiques sans masse, sans charges	11
3.5	Les ondes de fermions massifs et chargés	11
3.6	Les ondes de bosons vectoriels massifs et neutres	13
4	Formulation graphique de la théorie des champs	14
4.1	Exemple : propagation d'un électron dans un champ classique	14
4.2	Graphes de Feynman et amplitude de transition	15
4.3	Lien avec la mesure des processus	15
4.3.1	Normalisation relativiste (réf 1 page 75)	15
4.3.2	Taux de transition (réf 1 page 89) en sec^{-1}	15
4.3.3	Section efficace et durée de vie (réf 1 page 90 et 92)	16
4.4	Règles de Feynman pour l'amplitude : ref 1 page 149	17
4.5	Evocation de la re-normalisation de QED	18
4.6	Calcul du Lambshift	18
5	Le mécanisme de Higgs et l'invariance de jauge ...	19
5.1	Le mécanisme de Higgs : (réf 1 pages 321 et 324)	19
5.2	Théorie de Yang Mills : réf 6 page 268 - 300 réf 1 page 328	20
5.3	La transformation de jauge	21
5.3.1	Transformation de jauge abélienne	21
5.3.2	Cas général	22
5.3.3	Le lagrangien bosonique	23
6	Le lagrangien électrofaible	24
6.1	L'invariance de jauge dans $SU(2)_L \otimes U(1)$ réf 1 page 332	24
6.2	Les masses de bosons de l'interaction électrofaible	26
6.3	Les paramètres essentiels	27
6.4	Les paramètres de Modèle Standard : saveur + couleur	28
7	Le lagrangien phénoménologique réf 1 page 298	31
7.1	A basse énergie la désintégration du neutron	31
7.2	La durée de vie du neutron : application des règles de Feynman	33

List of Figures

1	L'annihilation d'un anti-proton au repos dans l'hydrogène	1
2	Corde vibrante	6
3	Ondes entrantes et sortantes	7
4	Les transitions observables à distance macroscopique : $a+b \rightarrow c+d+\dots$	9
5	Les vertex du modèle $g\pi^2\sigma - gP^2\sigma$	11
6	Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.	14
7	Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.	14
8	Graphe pour $\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	15
9	Calcul de la section efficace $a + b \rightarrow c + d$	16
10	Calcul des durées de vie $a \rightarrow 1 + 2 + \dots n$	16
11	Calcul de l'amplitude de transition : M	17
12	Renormalisation : problème des boucles ou des mailles et comportement à $p \rightarrow \infty$. .	18
13	Principes des théorie de Yang Mills : Fermions + Bosons	20
14	Les interactions fermions-bosons du modèle standard	24
15	Les interactions électromagnétiques & faibles	25
16	Le mécanisme de Higgs du modèle standard	26
17	Les masses des bosons du modèle standard	27
18	Le modèle standard	28
19	Le modèle standard	29
20	Le modèle standard	30
21	Les courants d'isospin et d'hypercharge	31
22	L'interaction effective courant.courant à basse énergie réf 1 page 251	32
23	propagateur de Feynman réf 1 page 147	35
24	Graphes de Feynman à l'ordre 2 pour la diffusion Möller et la diffusion Bhabha (réf 6 pages 82-89)	36

1 Quelles particules pour quelle théorie ?

α	$\hbar$	c
1/137,036	6,52 10 ⁻²² MeV.s	2,998 10 ⁸ m/s

Table 1: constantes physiques ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$)

1.1 Les conventions des physiciens

$$\begin{aligned}
 c &= \hbar = 1 \\
 \epsilon_0 &= \mu_0 = 1 \\
 \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} \\
 g_{\mu,\nu} &= g^{\mu,\nu} = (1, -1, -1, -1) \text{ avec } \mu = 0, 1, 2, 3 \\
 p^2 &= m^2 \text{ et } i\partial_\mu = p_\mu
 \end{aligned} \tag{1}$$

Les matrices sigma de Pauli (réf 1) :

$$\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les équations de Klein-Gordon et de Dirac s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi &= 0 \text{ avec } \partial^\mu \partial_\mu \equiv -\square \\
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) &= 0
 \end{aligned}$$

Les matrices gamma dans la représentation de Pauli-Dirac (réf 1) :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'électromagnétisme classique de Maxwell (rappels)

- $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique (6 composantes $\equiv$ E et B).

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
 A^\mu &= (V(x), \vec{A}(x)) \text{ le potentiel électromagnétique} \\
 \vec{E} &= (E^i = F^{i0}) \quad \vec{B} = (B^k = -F^{ij}) \\
 \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} &= 0 \quad [1] \\
 \partial^\nu F_{\nu\mu} &= J_\mu \quad [2]
 \end{aligned}$$

• $F_{\mu\nu}$ antisymétrique : $\Rightarrow$ l'invariance de jauge & la conservation de J_μ & la conservation de la relation $P^2 = m^2$. L'interaction d'une particule chargée avec un champ classique est bien connue et la dynamique peut être extraite du principe de moindre action (A_{min}).

$$\begin{aligned}
 A &= \int -m d\tau - q A_\mu dx^\mu \\
 \frac{dp_\mu}{d\tau} &= F_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot v^\nu) \quad \text{avec } v^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}
 \end{aligned} \tag{2}$$

1.2 Les particules fondamentales

Les fermions sont identifiés par leur saveur (interaction électrofaible) et leur couleur (interaction forte)

statistique	particules	spin en $\hbar$	masses en GeV/c ²	notation	interaction
fermions	quarks	1/2	0.3 à 170	$q \bar{q}$	S E W
...	leptons	1/2	0. à 1.7	$l \bar{l}$	E W
bosons	bosons	1	0. et 80.	$A_\mu W_\mu Z_\mu$	E , W
...	gluons	1	0	g_μ	S
...	higgs	0	> 200.	H	E & W ...

Table 2: les particules fondamentales

L'interaction faible est dite : l'interaction universelle de Fermi (le neutrino ne subit que cette interaction)

1.3 Les interactions

La gravitation est exclue de la théorie EW.

type	symbole	distance fm	intensité relative	section efficace ou durée de vie cm^2 ou sec	
Forte	S	1	1	10^{-27}	10^{-23}
Electromagnétique	E	∞	10^{-2}	10^{-30}	10^{-18}
Faible	W	0,1	10^{-2}	10^{-40}	10^{-10}

Table 3: Les propriétés des interactions vers 1 GeV (fm (ou fermi) = $10^{-15} m$)

2 Les ondes classiques

2.1 La corde vibrante

La corde est tendue à T , elle est inerte (ρ) et elle a un état d'équilibre d'énergie nulle par convention. Le vide est défini comme l'état d'énergie minimum du système, soit l'état de repos.

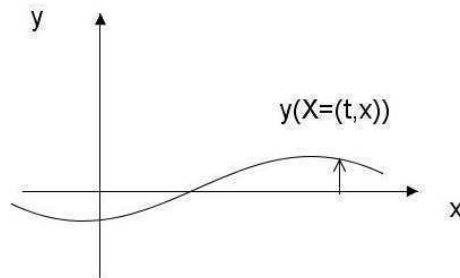


Figure 2: Corde vibrante

Pour un mouvement transversal, la dynamique de Newton conduit à l'équation de d'Alembert, soit :

$$\square Y(X) = 0 \text{ dont une solution particulière est } Y(X) = 0$$

$$X = (x_0, \vec{x}) \text{ avec } v = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad x_0 = v t$$

2.2 La dynamique lagrangienne et hamiltonienne

La théorie des ondes classiques peut prendre une forme lagrangienne et ainsi retrouver la dynamique par le principe de moindre action. La densité de lagrangien s'écrit :

$$L(X) = \frac{\rho}{2} \{(\dot{Y})^2 - v^2(\partial_x Y)^2\}$$

En considérant L comme une fonction de Y et de ses dérivées Y_X l'équation de Lagrange pour $Y(X)$ s'écrit :

$$\partial_x \left(\frac{\partial L}{\partial Y_X} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \right)$$

On retrouve l'équation de d'Alembert ! La densité d'hamilton (d'énergie) en découle :

$$H(X) = \dot{Y} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) - L(X) = \frac{\rho}{2} \{(\dot{Y})^2 + v^2(\partial_x Y)^2\}$$

2.3 Interprétation physique des ondes classiques

$Y(X)$ peut être associé à une onde complexe par transformation de Fourier. Pour une onde monochromatique plane cette onde complexe sera notée

$$\tilde{Y}(X) \propto \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{x})$$

La phase est l'argument de ce nombre complexe, c'est une fonction du temps

Le passage de la représentation complexe à la mesure physique du champ s'effectue en prenant la partie réelle

$$Y(X) = \text{Réel}(\tilde{Y}(X))$$

en conséquence $\tilde{Y}(X)$ est équivalent à $\tilde{Y}(X)^*$. Une onde classique est neutre !

Remarque : L'énergie (densité d'hamiltonien) fait intervenir des termes de degré 2 par rapport au champ $Y(X)$. Par exemple, le courant d'énergie pour une onde à une dimension s'écrit :

$$j = -T \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial t} \sim T \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 \times v$$

On retrouve une propriété de même nature en MQ avec l'interprétation de Born de la densité de probabilité pour une particule ($\sim$ l'énergie) qui est liée au module carré de la fonction d'onde.

$$\text{Prob}(x) = |\Psi(x)|^2$$

Par contre la phase est liée au temps.

2.4 En acoustique à 3D

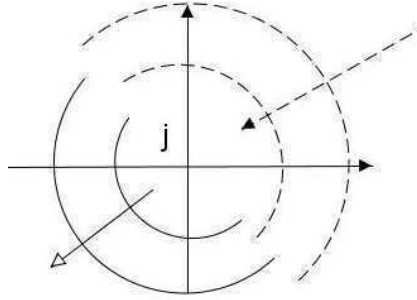


Figure 3: Ondes entrantes et sortantes

En acoustique élémentaire , le champ $\phi(x)$ est le potentiel des vitesses :

$$\text{avec } \vec{v} = -\vec{\nabla}\phi \quad p = \rho\dot{\phi}$$

$$L(x) = \frac{1}{2} (-\rho\vec{v}^2 + \chi p^2) = \frac{\rho}{2} (-(\nabla\phi)^2 + c^{-2}(\dot{\phi})^2) \text{ et } c = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}} \quad (3)$$

L'équation du mouvement de ϕ loin des sources est l'équation de d'Alembert :

$$\square\phi(x) = 0$$

L'hamiltonien se déduit du lagrangien :

$$H(x) = \frac{1}{2} (\rho\vec{v}^2 + \chi p^2) = \frac{\rho}{2} ((\nabla\phi)^2 + c^{-2}(\dot{\phi})^2)$$

Remarque 1 : L'équation générale de l'acoustique avec des sources distribuées peut s'écrire :

$$\square\phi(x) = -j(x) \text{ avec } L(x) \rightarrow L(x) + j(x)\phi(x) \quad (4)$$

Ici, $j(x)$ est la source du potentiel des vitesses $\phi(x)$. La source est évidemment à l'origine de la distribution spectrale. La solution générale peut être obtenue à l'aide des fonctions de Green, solutions de l'équation ci-dessous :

$$\square G(x, x') = \delta(x - x') \Rightarrow G(x, x') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - \tilde{t})$$

avec $\tilde{t}$ temps retardé ($t-r/v$) ou avancé ($t+r/v$) par la propagation. Il y a la possibilité d'une onde entrante (avancée) et d'une onde sortante (retardée).

Remarque 2 : L'onde sortante emporte de l'énergie tandis que l'onde entrante apporte de l'énergie à la source ; si ces ondes étaient porteuses de charges conservées elles transporteraient des charges opposées (comme des particules et antiparticules).

Remarque 3 : Les ondes classiques ne sont pas massives, elles obéissent à une équation de d'Alembert qui ne contient pas de terme d'inertie. On peut forcer un terme de masse, alors l'équation et le lagrangien deviennent :

$$\square \phi(x) = + m^2 \phi(x) \text{ avec } L(x) \rightarrow L(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x)$$

On peut introduire ce type de masse effective en confinant une onde dans un guide ; l'onde en se réfléchissant sur les parois (conditions aux limites) acquière de l'inertie. En effet, si la célérité de l'onde est notée c , l'équation de d'Alembert donne :

$$\phi(x) \propto \exp(-i\omega t + ikz) f(x, y)$$

La conséquence est évidente :

$$\omega^2 = (ck)^2 + \omega_0^2 \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c} \text{ et } \Delta f(x, y) = -k_0^2 f(x, y)$$

Et si l est la dimension transverse du guide, l'ordre de grandeur de la masse générée est :

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi c}{l}$$

Pour une onde quantique on aura :

$$m_0 c^2 = \hbar \omega_0$$

Pour une particule massive (ex électron...), $2l$ est la longueur compton de la particule (10^{-13} cm pour un électron).

Pour les ondes électromagnétiques dans un guide de 1 cm la masse générée est très faible ($m_0 c^2 \sim 10^{-4} eV$), soit $10^{-12} m$ pour un MeV et $10^{-15} m \sim 1 fm$ pour 1 GeV.

3 Théorie quantique, quelques éléments

3.1 Objectifs

- rendre compte des transitions entre états in et out : probabilités , lois de conservation ...
- calcul des sections efficaces et des durées de vie pour les particules instables
- stabilité et oscillations des particules

3.2 Les états in et out

1. Ce sont des états **libres** de particules préparés à l'échelle macroscopique dont l'impulsion et l'énergie sont déterminées par la relativité restreinte. Les particules sont ponctuelles à l'échelle macroscopique, la trajectoire d'une particule est définie dans l'espace temps par $x(s)$.

$$P^2 = m^2 \text{ soit } E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

2. Ces états vont interagir à distance microscopique comme des ondes planes délocalisées. L'interaction aura lieu dans un volume infini pendant un temps infini à l'échelle microscopique quoique fini à l'échelle macroscopique .

$$\Psi(x, t) \propto \exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{x})$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \text{ et } \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \text{ quantification !} \quad (5)$$

3. En principe, à cause de la masse, les ondes planes quantiques se dispersent dans le vide.

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_g v_\phi = c^2 \quad (6)$$

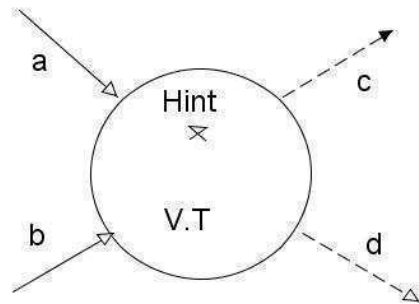


Figure 4: Les transitions observables à distance macroscopique : $a+b \rightarrow c+d+\dots$

4. L'interaction entre les ondes sera locale en $x \equiv (x_0, \vec{x})$: les particules restent des objets ponctuels ! L'interaction devra satisfaire à l'invariance de Lorentz et à la conservation de l'énergie impulsion. L'hamiltonien d'interaction sera local :

$$H_{int}(x) = - L_{int}(x)$$

5. La probabilité d'un processus vers les états f sera calculée selon les principes quantiques : la probabilité est le carré du module d'une amplitude de transition qui est un nombre C . Le problème revient donc à la détermination de cette amplitude.

$$prob(i \rightarrow f) = \sum_f |M_{f,i}|^2$$

L'existence de plusieurs processus (path ou chemin) conduisant de i (état in) à f (état out) autorise les effets d'interférences.

6. Le processus d'interaction est largement virtuel dans la mesure où il se déroule à une échelle où l'on ne peut expérimenter.
7. En principe le contexte autorise des questions du type :
- Le vide est-il stable en présence d'interactions,
 - Si l'état in est fait d'une seule particule l'état out sera-t-il fait de la même particule en présence d'interactions.

3.3 La dynamique des ondes quantiques

Les équations de Lagrange-Euler servent de principe dynamique aux ondes quantiques relativistes libres ou en interaction :

$$\forall \phi, \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \text{avec} \quad \phi_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (7)$$

1. La partie cinématique (∂_μ) fait intervenir les dérivées spatiales du champ
2. Une composante linéaire ($L = j\phi$) correspondra à une source de champ
3. Un élément quadratique ($L = a\phi^2$) à un terme d'inertie.
4. Le cas le plus simple est celui d'un boson neutre qui interagit avec une source $j(x)$

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) + j(x) \phi$$

Avec ce Lagrangien l'équation du mouvement (équation 7) s'écrit :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -m^2 \phi + j(x) \Rightarrow -\square \phi + m^2 \phi = j(x)$$

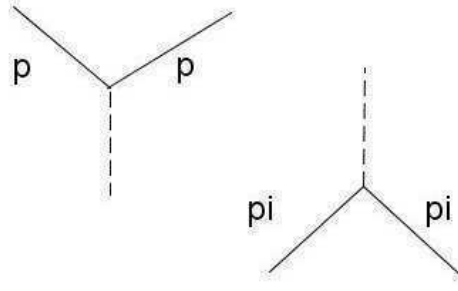
Exemple référence 13 page 55 :

$$L_{int} = g\pi^2 \sigma - gP^2 \sigma$$

La source de la particule σ est donnée par $j(x) = g\pi^2 - gP^2$.

$$-\square \sigma + m^2 \sigma = j(x)$$

Cette interaction est représentée graphiquement sur la figure 5 et les équations du mouvement des trois champs σ P π sont établies dans l'exercice 3.7 de la référence 13 page 55.

Figure 5: Les vertex du modèle $g\pi^2\sigma - gP^2\sigma$

3.4 Les ondes électromagnétiques sans masse, sans charges

Les ondes E.M. sont un pont entre les ondes classiques (mécaniques) et les ondes de particules (quantiques), c'est une onde neutre qui est plutôt classique à basse fréquence jusqu'au visible ($\nu < 10^{14}Hz$) et très quantique au delà : rayons X et γ .

La quantification a été découverte dans les UV (interprétation de l'effet photoélectrique 1905).

- Equations de propagation pour un photon libre émis dans le vide :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}.F^{\mu\nu}(x) \quad \text{expression covariante}$$

L'équation de Lagrange pour la dynamique du photon libre s'écrit

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = 0$$

Le propagateur du photon **libre** dans la jauge de Lorentz vérifiera l'équation de Klein Gordon:

$$\partial^2 A_\nu = 0 \text{ soit par TF } p^2 = 0 \text{ avec } \epsilon_\mu p^\mu = 0 \text{ deux polarisations !}$$

Le photon en présence d'un courant de charges électriques, source du champ :

$$\partial^2 A_\nu = J_\nu \Rightarrow \square A_\nu = -J_\nu$$

Le lagrangien qui conduit à cette équation est de la forme

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}.F^{\mu\nu}(x) - A_\mu J^\mu$$

L'interaction du champ EM et du courant J en x est locale et doit permettre une émission ou une absorption quantifiée de photons d'énergie et d'impulsion déterminées.

3.5 Les ondes de fermions massifs et chargés

Soit l'équation de Dirac pour les fermions libres de spin 1/2 :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0$$

Il existe des états d'impulsion p avec une énergie positive ($u^{1,2}$) ou négative ($u^{3,4}$). L'état d'un positron physique sera associé à $u^{3,4}$ en changeant p en -p.

D'autre part comme ces particules sont chargées l'émission d'un fermion sera équivalente à l'absorption d'un antifermion : le propagateur qui respecte cette prescription et la causalité (ordre dans le temps) est le **propagateur de Feynman**.

Le courant de particules conservé par l'équation de Dirac s'écrit :

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

Si la particule est chargée, le courant électromagnétique devient en fonction de Ψ

$$J^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \text{ avec pour l'électron } q = -e$$

QED peut être construit avec ces éléments.

• Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des champs relativistes** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ s'écrit :

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}.F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\Psi}\{\gamma^\mu(i\partial - qA)_\mu - m\}\Psi(x)$$

Remarque 0 : Les dimensions (au sens physique) de qA_μ et de p_μ sont identiques car :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \sim q(-g\vec{r}ad(A^0) \sim q\vec{v} \wedge (r\vec{ot}A)$$

Il est donc possible de translater p par qA ; c'est le **principe d'interaction minimale** ou **couplage minimal**.

L'interaction, ici E.M., est construite à partir du lagrangien libre en effectuant la transformation minimale suivante :

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$$

Cette construction est évidemment liée à l'invariance de jauge car :

$$(i\partial - qA)\exp(-iq\alpha(x))\Psi(x) \rightarrow \exp(-iq\alpha(x))(i\partial - qA + q\partial\alpha)\Psi(x)$$

Soit le commutateur :

$$[(i\partial - qA), \exp(-iq\alpha(x))] = \exp(-iq\alpha(x))(q\partial\alpha)$$

Remarque 1 : La dynamique lagrangienne permet de construire l'action du champ sur le courant de charge et inversement .

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= J_\nu \\ \{\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu - m)\}\Psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

avec $J_\nu = q\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi(x)$

Remarque 2 : Un changement de phase sur Ψ engendre une transformation de jauge du champ, dans cette opération la dynamique reste invariante .

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \exp(-iq\alpha(x)).\Psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned}$$

Remarque 3 : Un changement de phase local sur Ψ engendre un groupe continu de transformations unitaires sur les champs de particules chargées. L'existence de cette symétrie est associée à

1. la conservation de la charge électrique : évident.
2. la renormalisation de QED, c'est à dire la validité à tous les ordres : moins évident.

Cette propriété a été généralisée en 1971 par Veltman et t'Hooft pour l'interaction électrofaible (prix nobel 1999).

$$U = \exp(-iQ \alpha(x)).$$

Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = \sum q$, c'est une matrice scalaire dans l'espace des particules. Chaque particule a une charge définie q , son antiparticule a la charge $-q$.

Pour l'interaction faible, il sera nécessaire d'introduire une transformation de jauge non-abélienne basée sur les groupes unitaires les plus élémentaires : SU2 et U1. Les générateurs de ces groupes seront Y l'hypercharge faible et $\vec{T}$ les trois générateurs de SU2.

$$\begin{aligned} SU(2) &\sim \exp(-i \vec{T} \vec{\alpha}(x)) \\ U(1) &\sim \exp(-i Y \alpha(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

La charge électrique est alors une combinaison de T_3 et Y .

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

3.6 Les ondes de bosons vectoriels massifs et neutres

Le lagrangien libre pour ces bosons doit être construit à partir de l'électromagnétisme en introduisant un terme de masse, ce point a été discuté en 2.4 ; si le boson B interagit avec une source $j(x)$, le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - j_\mu(x) B^\mu \\ &\text{avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \text{ m est la masse} \end{aligned} \quad (9)$$

L'équation dynamique de Lagrange pour le boson B devient :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 B_\nu - \partial^\mu \partial_\nu B_\mu = -m^2 B_\nu + j_\nu$$

Le champ du boson B en présence de la source du champ vérifiera :

$$(\partial^2 + m^2) B_\nu - \partial_\nu \partial^\mu B_\mu = j_\nu \Rightarrow (\square - m^2) B_\nu + \partial_\nu (\partial^\mu B_\mu) = -j_\nu$$

Par transformation de Fourier, le propagateur du boson **libre** écrira ($i\partial_\mu = p_\mu$) :

$$((p^2 - m^2)g^{\nu\mu} - p^\mu p^\nu)^{-1} = \frac{1}{(p^2 - m^2)} \left(g_{\nu\mu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right)$$

L'interaction du champ de bosons et du courant j en x est locale et doit permettre une émission ou une absorption quantifiée de bosons d'énergie et d'impulsion déterminées.

Ce lagrangien est évidemment non invariant dans une transformation de jauge du type

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \alpha$$

4 Formulation graphique de la théorie des champs

4.1 Exemple : propagation d'un électron dans un champ classique

The Electron Propagator iS_F

We take the electron propagator as our example and use the Green's function method to solve Dirac's equation, (6.76), for an electron in an electromagnetic field:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = -e\gamma_\mu A^\mu \psi. \quad (6.122)$$

That is, we first solve the unit source problem

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)G_F = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (6.123)$$

where G_F represents the wave produced at x by a unit source at x' . Once we have found Green's function G_F , we can construct the solution to (6.122):

$$\psi(x) = -e \int d^4x' G_F(x, x') \gamma_\mu A^\mu(x') \psi(x'). \quad (6.124)$$

Note that here ψ appears also on the right-hand side, and so an iterative perturbation series solution in powers of e is obtained.

Figure 6: Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.

Le spineur $\Psi(x)$ est le produit de convolution du propagateur $G_F(x - x')$ et de la source du champ

$$j(x') = -e\gamma A(x')\Psi(x')$$

Il est possible d'itérer cette équation intégrale à partir de l'état $|in\rangle$ pour obtenir l'état $|out\rangle$ par un développement en puissance de e (perturbation) afin d'établir une relation entre l'état out et l'état in (matrice S). Pour plus de détails sur le propagateur de Feynman voir figure 23.

Using first-order perturbation theory, (3.37), the amplitude for the scattering of an electron from state ψ_i to state ψ_f is

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \bar{\psi}_f(x) V(x) \psi_i(x) d^4x \\ &= ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \\ &= -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x, \end{aligned} \quad (6.4)$$

where

$$j_\mu^{fi} \equiv -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i \quad (6.5)$$

$$= -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x}. \quad (6.6)$$

Comparing this result with (5.17), we see that j_μ^{fi} can be regarded as the electromagnetic transition current between electron states i and f .

Figure 7: Equation de propagation d'un spin 1/2 chargé en présence d'un champ E.M.

4.2 Graphes de Feynman et amplitude de transition

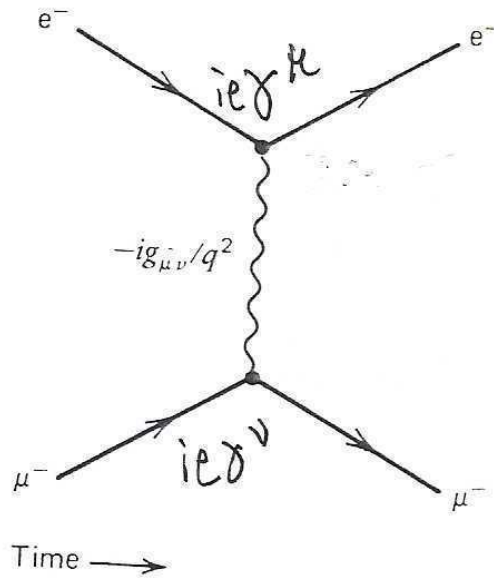


Fig. 4.3
electron-muon scattering.

Figure 8: Graphe pour $\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$

4.3 Lien avec la mesure des processus

4.3.1 Normalisation relativiste (réf 1 page 75)

$$[J^\mu = i(\phi^*(\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^*)\phi)]$$

avec $\phi = N \exp(-ikx) \Rightarrow J^\mu = 2k^\mu |N|^2$ (10)

On peut choisir $N = 1$ car les résultats sont indépendants de N .

4.3.2 Taux de transition (réf 1 page 89) en sec^{-1}

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{T}$$

L'amplitude de transition M se définit à partir de T

$$T = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) M$$

4.3.3 Section efficace et durée de vie (réf 1 page 90 et 92)

$$\begin{aligned} \text{Section efficace} &= \frac{\sum_f W_{fi}}{\text{flux incident dans } V} \sim \text{surface} \\ \text{Taux de désintégration} &= \frac{\sum_f W_{fi}}{\text{nombre de particules initiales dans } V} \sim \text{temps}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Initial flux} = |\mathbf{v}_A| \frac{2E_A}{(2\pi)^3} \frac{2E_B}{(2\pi)^3} \quad (4.24)$$

Inserting (4.22), (4.25), and (4.26) into (4.23), we arrive at a differential cross section $d\sigma$ for scattering into $d^3p_C d^3p_D$:

$$d\sigma = \frac{1}{|\mathbf{v}_A| 2E_A 2E_B} |\mathfrak{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{2E_C} \frac{d^3p_D}{2E_D}$$

Figure 9: Calcul de la section efficace $a + b \rightarrow c + d$ 4.4 The Decay Rate in Terms of $\mathfrak{M}$

The derivation of the formula for particle decay rates proceeds along similar lines. The differential rate for the decay $A \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ into momentum elements $d^3p_1, \dots, d^3p_n$ of the final state particles is

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} |\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - \dots - p_n). \quad (4.36)$$

Figure 10: Calcul des durées de vie $a \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

4.4 Règles de Feynman pour l'amplitude : ref 1 page 149

6.17 Summary of the Feynman rules for QED 149

TABLE 6.2
Feynman Rules for $-i\mathcal{M}$

		Multiplicative Factor
External Lines		
Spin 0 boson (or antiboson)		1
Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)		$u, \bar{u}$
antifermion (in, out)		$\bar{v}, v$
Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$
Internal Lines—Propagators (need $+i\epsilon$ prescription)		
Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Spin $\frac{1}{2}$ fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
Vertex Factors		
Photon—spin 0 (charge $-e$)		$ie(p + p')^\mu$
Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k/(2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices
Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+

Figure 11: Calcul de l'amplitude de transition : M

La normalisation des lignes externes est telle que

- Pour les spineurs $\bar{u}u^{1,2} = +2m$ et $\bar{u}u^{3,4} = -2m$
- Pour les bosons vectoriels $\epsilon^*\epsilon = 1$ et scalaires $= 1$

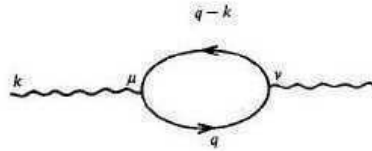
4.5 Evocation de la re-normalisation de QED

diagramme en arbres ou en boucles réf 6

3. Electron Self-energy Diagrams

100

Introduction to Quantum Field Theory



Ref 6
chang Ref 6

Fig. 6.2 The lowest order vacuum polarization diagram.

$$\Pi_{\mu\nu} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left[(-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{q} - \not{k} - m + i\epsilon} \times (-ie\gamma_\nu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \right]. \quad (6.2)$$

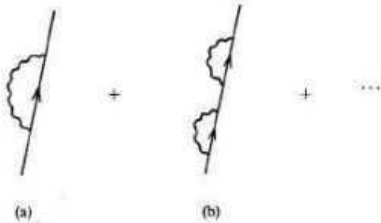


Fig. 6.6 Sum of electron self-energy diagrams.

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} (-i\Sigma) \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) + i\epsilon}$$

(c)

4. Vertex Corrections

The remaining class of the divergent diagrams is the vertex correction. The lowest order vertex correction is shown in Fig. 6.8.

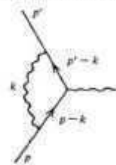


Fig. 6.8 The lowest order vertex correction.

Figure 12: Renormalisation : problème des boucles ou des mailles et comportement à $p \rightarrow \infty$

4.6 Calcul du Lambshift

A voir dans la référence 1 page 157 ou 2 page 76

5 Le mécanisme de Higgs et l'invariance de jauge ...

5.1 Le mécanisme de Higgs : (réf 1 pages 321 et 324)

Le cas d'un boson de Higgs neutre :

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

$V(\phi)$ est le potentiel du champ ϕ . Pour un boson massif réel, on aura un potentiel stabilisé par la masse :

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Pour un boson de Higgs le potentiel est tel que le vide devient instable à voir

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (v^2 - \phi^2)^2$$

Pour retrouver la stabilité il faut redéfinir le champ ϕ :

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

Soit :

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - 2\lambda v^2 \eta^2) - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{2} v \eta^3$$

Dans cette opération qui conserve les équations du mouvement de ϕ ,

1. Le nouveau champ η acquière une masse : $m_\eta^2 = 2\lambda v^2$
2. Les interactions du champ avec lui-même sont définies :

$$V(\eta) = +\frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{\lambda}{2} v \eta^3$$

Si le boson interagit avec un champ de jauge pour lequel l'interaction est minimale, le potentiel de Higgs va générer une masse pour le η **et** pour le champ de jauge A ainsi que des interactions **bien définies** entre η et A :

$$L = ((\partial + iqA)\phi)^*((\partial + iqA)\phi) - V(\phi) \text{ avec } \phi \rightarrow \eta + v$$

Le champ A devient massif :

$$L \rightarrow L' + q^2 v^2 A^2$$

5.2 Théorie de Yang Mills : réf 6 page 268 - 300 réf 1 page 328

Cas d'une symétrie de jauge non-abélienne :

Le lagrangien des bosons B^a est construit sur le modèle de l'électromagnétisme, c'est à dire à partir

1. Non-Abelian Gauge Theories

The generalization of a Yang-Mills theory to an arbitrary non-abelian gauge theory is straightforward.

We consider a Lie group G generated by the algebra

$$[X^a, X^b] = if^{abc} X^c \quad (7.1)$$

where X^a is the infinitesimal generator of the Lie group. We refer f^{abc} as the structure constants of the group. For simplicity, we restrict ourselves to group $SU(N)$. With proper choices of X^a , we can make f^{abc} to be totally antisymmetric. We call a set of $N \times N$ matrices T^a a representation of the algebra if T^a obeys the same set of algebraic equations as (7.1),

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (7.2)$$

For group $SU(N)$, we may choose T to be hermitian.

We introduce a set of gauge fields B_μ^a associated with the generators of G . We also introduce a set of fermion fields $\psi(x)$ which transform locally under G as

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(g) \psi(x) \quad (7.3)$$

where

$$U(g) = \exp(-ig\omega^a T^a) \quad (7.4)$$

is an $N \times N$ matrix whose infinitesimal generator is T . The gauge field tensor is

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c. \quad (7.5)$$

Figure 13: Principes des théorie de Yang Mills : Fermions + Bosons

d'un tenseur antisymétrique noté G .

Le lagrangien de fermions massifs et avec des bosons de masse nulle interagissant entre eux (présence du commutateur et symétrie non abélienne) s'écrira nécessairement :

si $X_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu X_\nu$ et si $(T.B) = T^a B^a$ on aura :

$$(T.G)_{\mu\nu} = (T.B)_{\mu\nu} - (T.B)_{\nu\mu} + ig[(T.B)_\mu, (T.B)_\nu]$$

$$L_B = -\frac{1}{4a} \text{trace} \{(T.G_{\mu\nu}).(T.G^{\mu\nu})\} \quad L_f = \sum \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - qB.T)_\mu - m \} \Psi(x)$$

Ces théories sont réputées renormalisables à cause de l'invariance de jauge, mais les bosons doivent être de masse nulle $L = L_B + L_f$.

5.3 La transformation de jauge

Soit Ψ un spineur qui représente tous les fermions d'une même famille : on exécute un changement de phase local sur ce spineur qui l'amène en Ψ'

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x') = U(\alpha(x))\Psi(x) \text{ On pose : } U(x) \equiv U(\alpha(x))$$

U est une transformation unitaire continue dans l'espace des fermions : cette transformation appartient à un groupe de Lie (une symétrie de l'interaction), elle transforme a priori la phase et la nature de la particule, par exemple un électron devient continuellement un neutrino et sa phase change arbitrairement. Comment le lagrangien libre d'un fermion se transforme-t-il sous $U(x)$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \bar{\Psi}\{(i\partial - m)\Psi(x) \\ L_0(x) &\rightarrow L_0(x) + \bar{\Psi}\{[(i\partial, U(x))]\}\Psi(x) \end{aligned} \quad (12)$$

La transformation unitaire peut être décrite par ses générateurs T^i avec $i = 1, n$ alors

$$\text{si } U(\alpha) = \exp(-ig T^i \alpha^i) \Rightarrow [(i\partial, U(x))] = gT^i \partial\alpha^i \quad (13)$$

Pour absorber ce terme dans l'invariance de jauge, il faut introduire un couplage aux bosons vectoriels qui aura la même forme soit :

$$L_{tot}(x) = \bar{\Psi}\{(i\partial - gT^i B^i) - m\}\Psi(x) \quad (14)$$

Comment le lagrangien total se transforme-t-il sous $U(x)$? il devient :

$$\begin{aligned} L_{tot}(x) &\rightarrow L_0(x) + \bar{\Psi}\{g(T^i \partial\alpha^i - \tilde{T}^i(x)B^i)\}\Psi(x) \\ &\text{avec } \tilde{T}^i(x) = U^+(x) T^i U(x) \end{aligned} \quad (15)$$

Dans la transformation de jauge, les champs B^i doivent être redéfinis pour absorber les termes résiduels engendrés par le changement de jauge mais l'invariance n'est acquise que si le lagrangien propre des bosons reste invariant dans cette transformation :

$$(T^i B^i) \rightarrow (\tilde{T}^i(x)B^i - T^i \partial\alpha^i)$$

Le lagrangien bosonique est a priori celui de bosons vectoriels chargés, sans masses et généralisant l'électromagnétisme.

5.3.1 Transformation de jauge abélienne

Dans le cas de l'électromagnétisme, la transformation U est générée par la charge électrique sur laquelle s'applique une loi de conservation :

$$U(\alpha) = \exp -ie Q\alpha(x) \quad (16)$$

La constante de couplage (g) est ici e , l'unité de charge (électronique) et Q est l'opérateur de charge qui s'applique aux fermions. Dans la transformation de jauge, le champ électromagnétique A est redéfini pour absorber le changement de jauge et l'invariance est acquise si son lagrangien propre reste invariant ce qui est le cas :

$$\begin{aligned} QA &\rightarrow Q(A - \partial\alpha) \\ L(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) \text{ avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned} \quad (17)$$

5.3.2 Cas général

Il faut généraliser le tenseur $F_{\mu\nu}$ du champ électromagnétique dans le cas de plusieurs bosons B^i . Pour intégrer la partie cinétique libre du lagrangien de la famille de bosons B^i , le lagrangien libre doit être de la forme :

$$L \sim \sum_i G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu}$$

De cette façon, on peut aussi l'écrire

$$L \sim \sum_{i,j} \text{trace} \{ (T^i \cdot G_{\mu\nu}^i) (T^j \cdot G^{j\mu\nu}) \}$$

L'algebre de Lie du groupe impose des relations de commutation dont il découle que

$$\text{trace} \{ T^i T^j \} = a_i \delta^{ij}$$

Faisons l'hypothèse que a_i est indépendant de i et telque $a_i = \frac{1}{n} \text{trace} \{ T^2 \}$ alors

$$L = -\frac{1}{4} \sum_i G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} = -\frac{1}{4a} \text{trace} \{ (T \cdot G_{\mu\nu}) (T \cdot G^{\mu\nu}) \}$$

Précisons la structure du tenseur de champ bosonique et introduisons $F_{\mu\nu}^i$:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i$$

Etudions l'action de la transformation de jauge sur le champ $T \cdot B_\mu$ puis sur le tenseur $(T \cdot F_{\mu\nu})$

$$\begin{aligned} (T \cdot B_\mu) &\rightarrow (\tilde{T}(x) \cdot B_\mu - T \cdot \partial_\mu \alpha) \\ (T \cdot F_{\mu\nu}) &\rightarrow \partial_\mu (\tilde{T}(x) \cdot B_\nu - T \cdot \partial_\nu \alpha) - [\mu \leftrightarrow \nu] \end{aligned} \quad (18)$$

Si la variation spatiale de $\tilde{T}(x)$ est telle que :

$$\partial_\mu \tilde{T}(x) = ig [T \cdot \partial_\mu \alpha, \tilde{T}(x)]$$

Il resulte que le tenseur $T \cdot F_{\mu\nu}$ n'est pas invariant:

$$(T \cdot F_{\mu\nu}) \rightarrow (\tilde{T}(x) \cdot F_{\mu\nu}) + ig \left[T \cdot (\partial_\mu \alpha), \tilde{T}(x) \cdot B_\nu \right] - \left[T \cdot (\partial_\nu \alpha), \tilde{T}(x) \cdot B_\mu \right]$$

Considérons la transformation du commutateur $[T \cdot B_\mu, T \cdot B_\nu]$:

$$\begin{aligned} [T \cdot B_\mu, T \cdot B_\nu] &\rightarrow [\tilde{T}(x) \cdot B_\mu, \tilde{T}(x) \cdot B_\nu] + \left[-T \cdot (\partial_\mu \alpha), \tilde{T}(x) \cdot B_\nu \right] - \left[\tilde{T}(x) \cdot B_\mu, -T \cdot (\partial_\nu \alpha) \right] \\ &\quad + \left[-T \cdot (\partial_\mu \alpha), -T \cdot (\partial_\nu \alpha) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Dans ces conditions le tenseur bosonique complet $G_{\mu\nu}^i$ tel que :

$$T \cdot G_{\mu\nu} = T \cdot F_{\mu\nu} + ig [T \cdot B_\mu, T \cdot B_\nu]$$

se transforme selon

$$T \cdot G_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{T}(x) \cdot G_{\mu\nu} + ig [T \cdot (\partial_\mu \alpha), T \cdot (\partial_\nu \alpha)]$$

Comme

$$\text{trace} \{ T^i T^j \} = \text{trace} \{ \tilde{T}^i(x) \tilde{T}^j(x) \} = a_i \delta^{ij}$$

le lagrangien est invariant au premier ordre $\forall \alpha$.

5.3.3 Le lagrangien bosonique

Il est de la forme :

$$L = -\frac{1}{4} \sum_i G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} = -\frac{1}{4a} \text{trace} \{ (T.G_{\mu\nu})(T.G^{\mu\nu}) \}$$

avec

$$T.G_{\mu\nu} = T.F_{\mu\nu} + ig [T.B_\mu, T.B_\nu]$$

Interprétation :

1. les termes quadratiques en $F_{\mu\nu}$ rendent compte de la propagation libre de ces bosons sans masse.

$$L_0 = -\frac{1}{4} \sum_i F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

2. les termes d'ordre 3 qui mélangent $F_{\mu\nu}$ et le commutateur sont des interactions à trois bosons.

$$L = -\frac{ig}{2a} \sum_i F_{\mu\nu}^i \text{trace} \{ T^i [T.B^\mu, T.B^\nu] \}$$

3. les termes d'ordre 4 quadratiques en $[T.B_\mu, T.B_\nu]$ sont des interactions à 4 particules

$$L = +\frac{g^2}{4a} \text{trace} \{ [T.B^\mu, T.B^\nu] [T.B_\mu, T.B_\nu] \}$$

4. les couplages qui caractérisent ces interactions sont définis par la structure du groupe et son algèbre en fonction d'une seule constante g : c'est l'unification des interactions !

6 Le lagrangien électrofaible

Dans les théories de Yang Mills, les interactions couplent les courants de fermions avec des bosons vectoriels !

$$L_{int} = -g \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu (T \cdot B_\mu) \} \Psi(x) = \sum_i -g \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu T^i \} \Psi(x) \cdot B_\mu^i$$

6.1 L'invariance de jauge dans $SU(2)_L \otimes U(1)$ réf 1 page 332

In Section 14.3, we considered only the electron field and we omitted the charge operator Q . However, to incorporate all the quark and lepton fields, charge conservation requires the presence of Q in (15.2), see (15.11). The electromagnetic coupling is therefore proportional to the charge of the appropriate field; $Q_e = -1$, $Q_u = +\frac{2}{3}$, and so on.

To include weak processes in the formalism, we must replace (15.1) by two basic interactions; first, an isotriplet of weak currents $\mathbf{J}_\mu$ coupled to three vector bosons $\mathbf{W}^\mu$,

$$-ig \mathbf{J}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = -ig \bar{\chi}_L \gamma_\mu \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^\mu \chi_L \quad SU(2)_L, \quad (15.4)$$

and second, a weak hypercharge current coupled to a fourth vector boson B^μ ,

$$-i \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu = -ig' \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{Y}{2} \psi B^\mu \quad U(1)_Y, \quad (15.5)$$

see (13.17). The operators $\mathbf{T}$ and Y are the generators of the $SU(2)_L$ and $U(1)_Y$ groups of gauge transformations, respectively. Taken together, the $SU(2) \times U(1)$ transformations of the left- and right-hand components of ψ are

$$\begin{aligned} \chi_L &\rightarrow \chi'_L = e^{i\alpha(x) \cdot \mathbf{T} + i\beta(x)Y} \chi_L, \\ \psi_R &\rightarrow \psi'_R = e^{i\beta(x)Y} \psi_R, \end{aligned} \quad (15.6)$$

where the left-handed fermions form isospin doublets χ_L and the right-handed fermions are isosinglets ψ_R . For example, for the electron and its neutrino, we have [see (13.15)]

$$\begin{aligned} \chi_L &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \text{with } T = \frac{1}{2}, Y = -1, \\ \psi_R &= e_R^- \quad \text{with } T = 0, Y = -2. \end{aligned} \quad (15.7)$$

But for quarks,

$$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R = u_R, \text{ or } d_R.$$

Here, a right-handed up quark has been included since quarks, unlike neutrinos, have a finite mass and hence have both right- and left-handed components.

The electromagnetic interaction (15.1) is embedded in (15.4) and (15.5). Before we continue, it is appropriate to recall how this was achieved. The generators of the three groups satisfy

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2},$$

so that

$$j_\mu^{em} = J_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y,$$

Figure 14: Les interactions fermions-bosons du modèle standard

EXERCISE 15.1 As revision, derive (15.8) and (15.9) from the statements of the above paragraph.

Just as the QED Lagrangian, (15.3), resulted from imposing $U(1)_{em}$ local gauge invariance, so we are led to the electroweak Lagrangian by requiring an $SU(2) \times U(1)_Y$ invariant form. For example, for the electron–neutrino lepton pair, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \bar{\chi}_L \gamma^\mu \left[i \partial_\mu - g \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu - g' \left(-\frac{1}{2} \right) B_\mu \right] \chi_L \\ & + \bar{e}_R \gamma^\mu \left[i \partial_\mu - g' (-1) B_\mu \right] e_R - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (15.10)$$

where we have inserted the hypercharge values $Y_L = -1$, $Y_R = -2$ of (15.7). $\mathcal{L}_1$ embodies the weak isospin and hypercharge interactions of (15.4) and (15.5). The final two terms are the kinetic energy and self-coupling of the $\mathbf{W}_\mu$ fields, see (14.67), and the kinetic energy of the B_μ field, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Gauge invariance means that the Lagrangian transforms as a singlet under transformations of each gauge group. Take the $U(1)_{em}$ gauge group as an example. A term in the Lagrangian which is the product of fields $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ transforms as

$$(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \rightarrow e^{i\alpha(x)(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)} (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n),$$

15.1 Electroweak Interactions Revisited 333

see (13.26). In other words, the electromagnetic current is a combination of the two neutral currents J_μ^3 and j_μ^Y occurring in (15.4) and (15.5). The two physical neutral gauge fields A_μ and Z_μ are thus orthogonal combinations of the gauge fields W_μ^3 and B_μ , with mixing angle θ_W , and the interaction in the neutral current sector can be rewritten in terms of these physical fields as in (13.21):

$$\begin{aligned} -igJ_\mu^3 W^{3\mu} - i\frac{g'}{2}j_\mu^Y B^\mu &= -i \left[g \sin \theta_W J_\mu^3 + g' \cos \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2} \right] A^\mu \\ &\quad - i \left[g \cos \theta_W J_\mu^3 - g' \sin \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2} \right] Z^\mu \\ &= -ie j_\mu^{em} A^\mu - \frac{ie}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \left[J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em} \right] Z^\mu. \end{aligned} \quad (15.8)$$

The requirement that the electromagnetic interaction, (15.1), must appear on the right-hand side has specified the weak neutral current interaction and fixed the couplings g and g' in terms of e and θ_W , namely,

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (15.9)$$

Figure 15: Les interactions électromagnétiques & faibles

6.2 Les masses de bosons de l'interaction électrofaible

réf 1 page 335

15.2 Choice of the Higgs Field

We want to formulate the Higgs mechanism so that the $W^\pm$ and Z^0 become massive and the photon remains massless. To do this, we introduce four real scalar fields ϕ_i . We have to add to $\mathcal{L}_1$ an $SU(2) \times U(1)$ gauge invariant Lagrangian for the scalar fields

$$\mathcal{L}_2 = \left| \left(i\partial_\mu - g\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2 - V(\phi) \quad (15.13)$$

where $|\phi|^2 \equiv (\phi^\dagger \phi)$. The structure of $\mathcal{L}_2$ is explained in Section 14.9, see (14.65). To keep $\mathcal{L}_2$ gauge invariant, the ϕ_i must belong to $SU(2) \times U(1)$ multiplets. The most economical choice is to arrange four fields in an isospin doublet with weak hypercharge $Y = 1$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{aligned} \phi^+ &\equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \\ \phi^0 &\equiv (\phi_3 + i\phi_4)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

This is in fact the choice originally made in 1967 by Weinberg. It completes the specification of the standard (or minimal) model of electroweak interactions. It is also called the “Weinberg–Salam model.”

To generate gauge boson masses, we use the familiar Higgs potential $V(\phi)$ of (14.66) with $\mu^2 < 0$ and $\lambda > 0$ and choose a vacuum expectation value, ϕ_0 , of $\phi(x)$. The appropriate choice is (14.70),

$$\phi_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

15.3 Masses of the Gauge Bosons

Just as in Section 14.9, the gauge boson masses are identified by substituting the vacuum expectation value ϕ_0 for $\phi(x)$ in the Lagrangian $\mathcal{L}_2$. The relevant term in (15.13) is

$$\begin{aligned} & \left| \left(-ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu - ig'\frac{B_\mu}{2} \right) \phi \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} v^2 g^2 \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right] + \frac{1}{8} v^2 (g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B_\mu - gW_\mu^3) \\ &= \left(\frac{1}{2} v g \right)^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8} v^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Figure 16: Le mécanisme de Higgs du modèle standard

Remarque : Dans 15.3, le lagrangien engendré par la brisure de symétrie introduit une oscillation entre W_μ^3 et B_μ , ces champs sont donc instables ! Les champs stables associés, obtenus par la rotation de Weinberg (θ_W), sont ceux que l'on observe expérimentalement : Z_μ et A_μ .

Remarque : La matrice de mélange $W_\mu^3 - B_\mu$ comporte la valeur propre 0, en effet, l'un des vecteurs propres doit être le photon.

336 The Weinberg-Salam Model and Beyond

since $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$. Comparing the first term with the mass term expected for a charged boson, $M_W^2 W^+ W^-$, we have

$$M_W = \frac{1}{2}vg. \quad (15.18)$$

The remaining term is off-diagonal in the W_μ^3 and B_μ basis:

$$\frac{1}{8}v^2 \left[g^2 (W_\mu^3)^2 - 2gg'W_\mu^3 B_\mu + g'^2 B_\mu^2 \right] = \frac{1}{8}v^2 \left[gW_\mu^3 - g'B_\mu \right]^2 + 0 \left[g'W_\mu^3 + gB_\mu \right]^2. \quad (15.19)$$

One of the eigenvalues of the 2×2 matrix in (15.17) is zero, and we have included this term in (15.19) with a combination of fields that is orthogonal to the combination given in the first term. Now, the physical fields Z_μ and A_μ diagonalize the mass matrix so that (15.19) must be identified with

$$\frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu^2 + \frac{1}{2}M_A^2 A_\mu^2,$$

where the $\frac{1}{2}$ is appropriate for a mass term of a neutral vector boson (see Exercise 14.4). So, on normalizing the fields, we have

$$A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{with} \quad M_A = 0, \quad (15.20)$$

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{with} \quad M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (15.21)$$

We can reexpress these results in the notation introduced in Chapter 13. From either (13.23) or (15.9),

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W. \quad (15.22)$$

In terms of θ_W , (15.20) and (15.21) therefore become

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \\ Z_\mu &= -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3, \end{aligned} \quad (15.23)$$

and from (15.18) and (15.21), we have

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W. \quad (15.24)$$

The inequality $M_Z \neq M_W$ is due to the mixing between the W_μ^3 and B_μ fields. The mass eigenstates are then automatically a massless photon (A_μ) and a massive Z_μ .

Figure 17: Les masses des bosons du modèle standard

6.3 Les paramètres essentiels

Modèle EW de Weinberg-Salam (réf 1 page 333 - 336 - 337)

$$v = 246. \text{ GeV} \quad \alpha = 1/137.0 \quad \sin^2(\theta_W) = .215 \quad (20)$$

On en déduit (ou inversement) :

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} \quad g = \frac{e}{\sin(\theta_W)} \quad M_W = \frac{1}{2}v g \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos(\theta_W)} \quad M_A = 0 \quad G^2 = \frac{1}{2v^4} \quad (21)$$

6.4 Les paramètres de Modèle Standard : saveur + couleur

réf 13 Annexe

Appendix E Standard Model

E.1 Lagrangian

The Lagrangian of the Standard Model is quite voluminous, and it is already a problem by itself to get all the Feynman rules correct. We will give it a try in this appendix. This section gives the explicit form of the Lagrangian. We assume the simplest Higgs sector. The gauge chosen is the Feynman-'t Hooft gauge. In this gauge the numerator of the vector boson propagators is of the form $\delta_{\mu\nu}$ with respect to the Lorentz indices. There are ghost fields, Higgs ghosts and Faddeev-Popov ghosts. The ghost fields must be included for internal lines, but they should not occur as external lines. They do not correspond to physical particles, but they occur in the diagrams to correct violations of unitarity that would otherwise arise due to the form of the vector boson propagators chosen here. The proof of that fact is really the central part of gauge field theory.

The Lagrangian including the gauge breaking terms can conveniently be subdivided in a number of pieces:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_w + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{fH} + \mathcal{L}_{fc} + \mathcal{L}_{FPc} + \mathcal{L}_{FPw}.$$

These pieces are

- $\mathcal{L}_c$: colour Lagrangian, describing the gluons of quantum chromodynamics and their mutual interactions;
- $\mathcal{L}_w$: weak Lagrangian, describing the vector bosons and their interactions including interactions with the Higgs system;
- $\mathcal{L}_f$: fermion Lagrangian, describing the interactions of the fermions with the weak vector bosons;
- $\mathcal{L}_{fH}$: fermion-Higgs Lagrangian, describing the interactions of the fermions with the Higgs system;

Figure 18: Le modèle standard

250

Standard Model

- $\mathcal{L}_{fc}$: fermion-colour Lagrangian, describing the interactions of the fermions with the gluons;
- $\mathcal{L}_{FPc}$: the Faddeev-Popov ghost Lagrangian of quantum chromodynamics;
- $\mathcal{L}_{FPw}$: the Faddeev-Popov ghost Lagrangian of the weak interactions.

A feature of the present day situation must be mentioned here. In the old days, doing quantum electrodynamics, the important feature was the bare simplicity of the Feynman rules and the small number of particles. The electron and/or muon and the photon were the main players. One vertex, the fermion-photon vertex was all that was needed. As a consequence the number of graphs remained relatively small, in fact usually only one at the one loop level. This fact has made the calculation of as much as four loop effects possible. These very advanced calculations require the use of mechanical procedures, i.e., algebraic computer programs.

To some extent this same simplicity applies to quantum chromodynamics. But in the weak interactions the situation is vastly different. There are now many particles to be considered, and the number of vertices is huge. As a consequence the number of one loop graphs is often already so large that mechanical procedures are needed to process them. These mechanical procedures are very different in nature from those used in quantum electrodynamics. In weak interactions the difficulty is in handling the multitude of vertices and particles.

To establish notation, here are the fields corresponding to the known particles at this moment and the various ghosts.

- A_μ : the photon;
- $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0$: the charged and neutral vector bosons of weak interactions;
- ϕ^+, ϕ^-, ϕ^0 : the charged and neutral Higgs ghosts;
- H : the physical Higgs particle;
- $e^\alpha, \nu^\alpha, \alpha = 1, 2, 3$: three lepton generations;
- $d_j^\alpha, u_j^\alpha, \alpha = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$: three quark generations of three colours each.
- Y : the FP ghost associated with the photon;
- X^+, X^- and X^0 : the FP ghosts associated with the three vector bosons of weak interactions;

Figure 19: Le modèle standard

E.1 Lagrangian

251

- g_μ^a , $a = 1 \dots 8$: the eight gluons;
- G^a , $a = 1 \dots 8$: the eight FP ghosts associated with the gluons.

The FP (= Faddeev-Popov) ghost fields are larger in number than one might think at first. To begin with, remember that they are fictitious particles with fictitious rules. The minus sign for a closed FP loop is just a prescription. Further, the X^- field has nothing to do with the X^+ field, for example it is not true that the X^+ field contains a creation operator for an X^- particle. The way this must be read is this: the X^- field contains the absorption operator for an X^- and the creation operator for an anti- X^- . The anti- X^- field will be denoted by $\bar{X}^-$ and contains the absorption operator for an anti- X^- and the creation operator for an X^- . So, on the one loop level, considering Z^0 self-energy diagrams there will be typically two X -graphs: one with an X^- and one with an X^+ circulating. By contrast, there is only one graph with a circulating charged vector boson. If we had used real vector bosons W^1 and W^2 there would have been two W graphs, and that indeed corresponds more closely to the situation in the FP Lagrangian. In fact, the rule is that corresponding to a real vector field there is a complex FP field. In the case at hand that applies to the FP ghosts associated with the photon and gluon fields. Thus there are $\bar{Y}$ and $\bar{G}^\alpha$ fields.

The parameters occurring in this Lagrangian will be discussed below.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w = & \\
& -\partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - M^2 W_\mu^+ W_\mu^- \quad -\frac{1}{2} \partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 \\
& -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu \quad -\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_h^2 H^2 \\
& -\partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2 \phi^+ \phi^- \quad -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \frac{1}{2c_w^2} M \phi^0 \phi^0 \\
& -\beta_h \left[\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g} H + \frac{1}{2} (H^2 + \phi^0 \phi^0 + 2\phi^+ \phi^-) \right] + \frac{2M^4}{g^2} \alpha_h \\
& -igc_w [\partial_\nu Z_\mu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - Z_\nu^0 (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) \\
& \quad + Z_\mu^0 (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)]
\end{aligned}$$

Figure 20: Le modèle standard

7 Le lagrangien phénoménologique réf 1 page 298

7.1 A basse énergie la désintégration du neutron

298 Electroweak Interactions

13.3 The Effective Current–Current Interaction

Before we continue, we should relate our basic interactions to the current–current structure of weak interactions that we used throughout Chapter 12. There, we saw that *charged current* phenomena could be explained by invariant amplitudes of the form

$$\mathfrak{M}^{CC} = \frac{4G}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J_\mu^\dagger, \quad (13.27)$$

see (12.13), where in the new isospin notation [see (13.7)]

$$J_\mu \equiv J_\mu^+ = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_+ \chi_L = \frac{1}{2} (J_\mu^1 + iJ_\mu^2). \quad (13.28)$$

For an interaction proceeding via the exchange of a massive charged boson, we can follow the QED procedure of Section 6.2 to calculate $\mathfrak{M}$. The analogue of Fig. 6.2 is Fig. 13.2. First, we rewrite the basic charged current interaction of (13.17) in the form

$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu W_\mu^+ + J_\mu^\dagger W_\mu^-), \quad (13.29)$$

where we have used the identity

$$\frac{1}{2} (\tau_1 W^1 + \tau_2 W^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_+ W^+ + \tau_- W^-) \quad (13.30)$$

with $W^\pm$ given by (13.18). Then, we copy the QED procedure leading to (6.8) and obtain

$$\mathfrak{M}^{CC} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu \right) \left(\frac{1}{M_W^2} \right) \left(\frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger \right), \quad (13.31)$$

where $1/M_W^2$ is the approximation to the W propagator at low q^2 (see Section 6.17). Comparison of (13.31) with (13.27) gives

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (13.32)$$

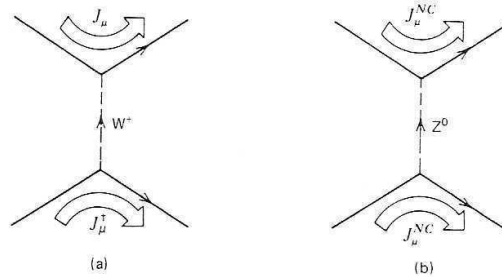
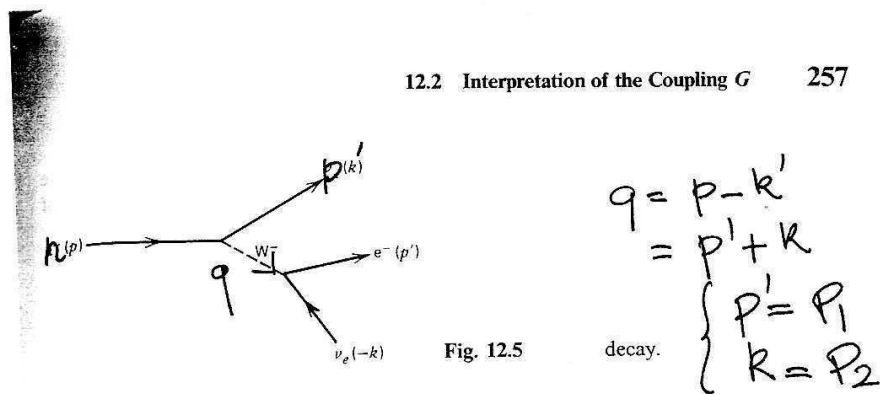


Fig. 13.2 Charged and neutral current weak interactions.

Figure 21: Les courants d'isospin et d'hypercharge



$$\mathcal{M} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \gamma^\sigma \frac{1}{2} (\mathbf{f}_V - \mathbf{f}_A \gamma^5) u_n \right) \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma_\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_{e^c} \right), \quad (12.14)$$

where $g/\sqrt{2}$ is a dimensionless weak coupling and q is the momentum carried by the weak boson (the factors $1/\sqrt{2}$ and $\frac{1}{2}$ are inserted so that we have the conventional definition of g). In contrast to the photon, the weak boson must be massive, otherwise it would have been directly produced in weak decays. Indeed, it turns out that $M_W \sim 80$ GeV (see Chapter 15).

However, at the moment, we are interested in situations where $q^2 \ll M_W^2$ (e.g., β -decay and μ -decay). Then, (12.14) reverts to (12.11) with

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (12.15)$$

and the weak currents interact essentially at a point. That is, in the limit (12.15), the propagator between the currents disappears.

Weak interaction amplitudes are of the form

$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu^\dagger. \quad ($$

Figure 22: L'interaction effective courant.courant à basse énergie réf 1 page 251

7.2 La durée de vie du neutron : application des règles de Feynman

La réaction est :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \text{ soit } a \rightarrow b + 1 + \bar{2}$$

L'interaction courant - courant effective permet l'écriture de l'élément de matrice à l'ordre 2 :

$$M = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right) \left\{ \bar{u}(b) \gamma_\mu \frac{(f_V - f_A \gamma_5)}{2} u(a) \right\} \frac{1}{M_W^2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right) \left\{ \bar{u}(1) \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} v(2) \right\}$$

Calcul de la durée de vie dans l'hypothèse où

1. a et b restent au repos car $M_{a,b} \gg m_{1,2}$
2. on néglige la charge du proton dans l'état final

$$\Lambda = \int 2\pi \delta(E_f - E_i) \sum |M|^2 \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{2E_2(2\pi)^3} \text{ avec } \frac{g^2}{8 M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

$$\sum |M|^2 = \frac{G^2}{2} 8 \frac{1}{2} \text{trace} [\{ 2(-f_A \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 + f_V E_1)(-f_A \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2 + f_V E_2) - (p_1 \cdot p_2)(-f_A^2 \vec{\sigma}^2 + f_V^2) \}]$$

le Q de la réaction représente l'énergie cinétique disponible :

$$Q = M_a - M_b - m_1 - m_2 \text{ donc } E_f - E_i = 0 \Rightarrow Q - (T_1 + T_2) = 0$$

$$\Lambda = \int 2\pi \delta(Q - T_1 - T_2) 4G^2 (f_V^2 (E_1 E_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + f_A^2 (3E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)) \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{2E_2(2\pi)^3}$$

$$\Lambda = \tau^{-1} = G^2 m^5 \frac{1}{2\pi^3} \times (f_V^2 + 3 f_A^2) \times f(Q, Z = 1)$$

$$\text{où } f(Q, Z = 0) = m^{-5} \int \delta(Q - T_1 - T_2) \frac{d^3 p_1}{(4\pi)} \frac{d^3 p_2}{(4\pi)} = m^{-5} \int_0^{p_1(\max)} p_1^2 (Q - T_1)^2 dp_1$$

$$f(Q, Z = 1) = f(Q, Z = 0) \times \text{correction} = 1.64 \times 1.08 = 1.77$$

$$f_V = 1 \text{ et } f_A = 1.26$$

$$\frac{g^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\sin^2(\theta_W)} \text{ et } \frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137,0}$$

$$\text{avec } m = .511 \text{ MeV et } Q = .782 \text{ MeV } M_W = 80.4 \text{ GeV } \sin^2(\theta_W) = 0.215$$

(22)

Résultat : (on a pris en compte l'angle de Cabbibo : $G \rightarrow G_\beta$ avec $\cos(\theta_C) = .974$)

$$\frac{G_\beta^2 m^5}{2\pi^3} = \frac{\alpha^2 m^5 \cos^2(\theta_C)}{4\pi M_W^4 \sin^4(\theta_W)} = 1.103 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

$$\tau = 889 \pm 10 \text{ sec expérimentalement } 887 \pm 2 \text{ sec}$$

Références

- | | |
|---|---|
| [1] F. Halzen John Wiley 1984 | Quarks and leptons |
| [2] C. Itsykson & Zuber Macgraw Hill 1980 | Quantum field theory |
| [3] B. de Wit & al North holland 1986 | field theory in particle physics |
| [4] I. Aitchison & al Institute od Physics 2004 | Gauge theories in particle physics |
| [5] L. Landau & Lifchitz MIR 1989 | Electrodynamique quantique |
| [6] S.J. Chang, World Scientific 1990 | Intro to Quantum Field Theory |
| [7] J.D. Jackson, Dunod, nelle édition | Electrodynamique classique |
| [8] L.H. Ryder, Cambrideg U.P. 1985 | Quantum Field Theory |
| [10] T.D. Lee, 1990 | Particle physics |
| [12] Fayyazuddin & al , 1992 | A modern introduction to .. |
| [13] M. Veltman, Cambridge U.P. 1994 | A path to Feynman rules : Diagrammatica |

6.16 The $+i\epsilon$ Prescription for Propagators 147

From translational invariance, $G_F(x, x')$ is a function only of the difference $x - x'$. To solve (6.123), we first Fourier transform to momentum space:

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(p) e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p. \quad (6.125)$$

Then, on substituting into (6.123), we obtain

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not{p} - m) S_F(p) e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p,$$

where the right-hand side is the Fourier representation of the delta function. In momentum space, (6.123) therefore becomes simply

$$(\not{p} - m) S_F(p) = 1.$$

That is,

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (6.126)$$

So far, this is just a sophisticated version of the derivation of Section 6.10.

To complete the determination of S_F , we need to know how to treat the singularities at

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2) = (p_0 - E)(p_0 + E) = 0.$$

Since the electron is off mass shell, p_0 and $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ are independent variables. To obtain the correct prescription for integration over the poles at $p_0 = \pm E$, we need to impose the appropriate boundary conditions on $G_F(x - x')$. From (6.125) and (6.126),

$$\begin{aligned} G_F(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{p} + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip \cdot (x - x')} d^4p \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (x - x')} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip_0(t - t')}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Recall that $G_F(x - x')$ represents the wave produced at x by a unit source at x' . That is, the propagation is from x' to x . Now, we seek an S_F which is associated with the propagation of positive-energy electrons forward in time ($t > t'$) and with negative-energy electrons backward in time ($t < t'$); see Section 3.5. This can be accomplished by performing the p_0 integration along the contour in the complex p_0 plane shown in Fig. 6.15. That is, the required properties of S_F are obtained by choosing the contour along the $\text{Re } p_0$ axis to go below the $p_0 = -E$ pole and above the $p_0 = +E$ pole.

Figure 23: propagateur de Feynman réf 1 page 147

82-89

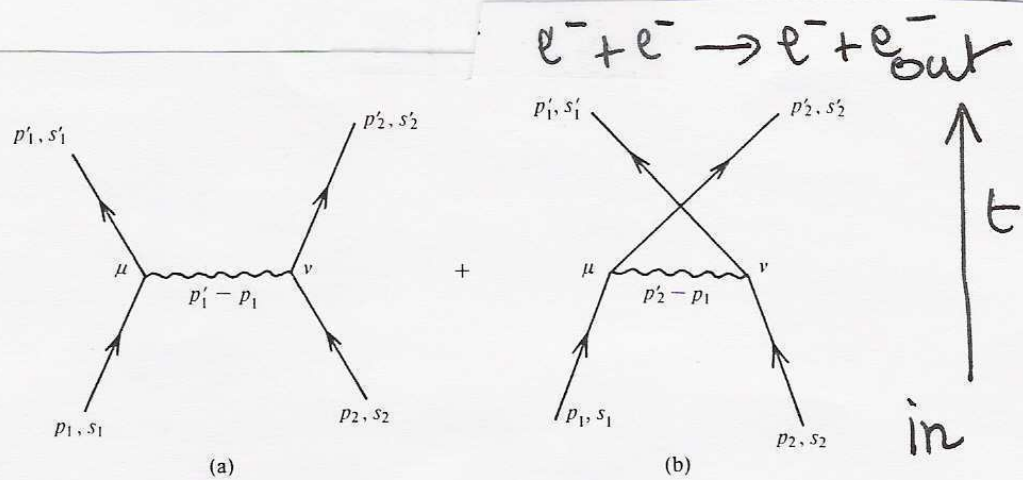


Fig. 5.3 Electron-electron scattering.

möller scattering

p-89

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} + \frac{2}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} + \frac{1 + \sin^4 \theta/2}{\cos^4 \theta/2} \right]$$

Ref 6

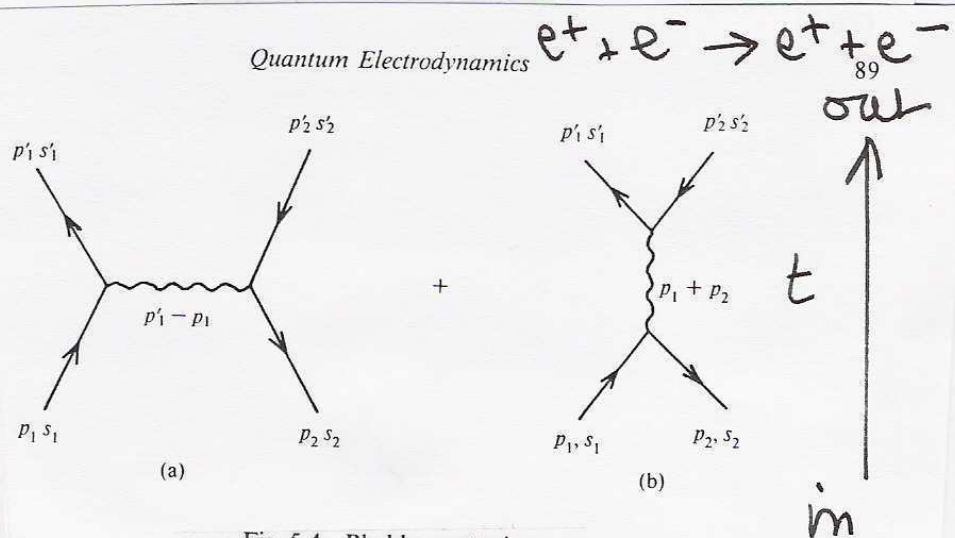


Fig. 5.4 Bhabha scattering.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} - \frac{2 \cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right]$$

Figure 24: Graphes de Feynman à l'ordre 2 pour la diffusion Möller et la diffusion Bhabha (réf 6 pages 82-89)