

Interactions Relativistes

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

29 mars 2005

Version 30/04/2005

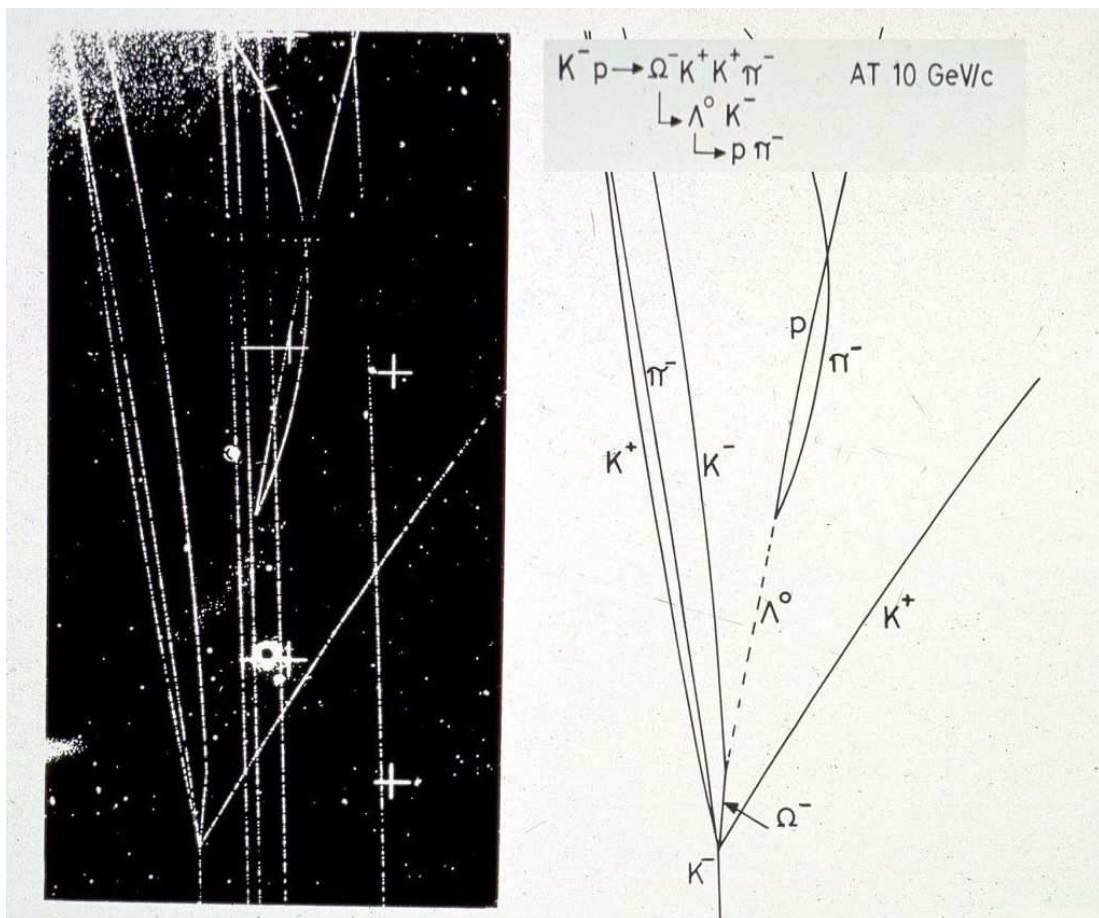


Figure 1: $K^- + p$ à 10 GeV/c au CERN en 1964

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire donné les 29 mars et 5 avril 2005 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2004-2005

SOMMAIRE

1	Interactions relativistes classiques :	4
1.1	Les différents thèmes	4
1.2	Les domaines expérimentaux de la relativité restreinte	5
1.3	La masse (au repos) n'est pas qu'un paramètre	5
1.4	Les particules accélérées	6
1.4.1	La dynamique covariante de la "force" de Minkowsky	6
1.4.2	La "force" de Minkowsky est électromagnétique.	6
1.4.3	Le champ électromagnétique est dynamique , c'est une onde	7
1.4.4	Le rayonnement	7
1.4.5	Le rayonnement quantique : ... vers QED	10
2	La mécanique ondulatoire et la moindre action	11
2.1	Les particules	11
2.2	Les ondes	12
3	Introduction à la dynamique quantique : QED etc ...	14
3.1	QED : les tests expérimentaux de QED	15
3.2	Théories de jauge et l'unification électro-faible	16
3.3	Conclusion	16

List of Figures

1	$K^- + p$ à 10 GeV/c au CERN en 1964	1
2	La production de Ω^- au CERN dans les années 1960.	4
3	Remarques d'Einstein dans les articles de 1905 - 1909 référence [14]	9
4	Emission - absorption d'un photon	10
5	La production de particules étranges dans : $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$	13
6	L'interaction électron-photon selon QED.	15
7	Graphes de la diffusion Möller et Bhabha au second ordre (référence [3])	19
8	Graphes de Feynman à l'ordre 2 pour la diffusion Bhabha et la diffusion Möller	20
9	Graphes d'annihilation	20
10	Graphes de matérialisation	20
11	Graphes d'ordre 2 de la diffusion Compton	21

Notations

$\mu = 0, 1, 2, 3$: indices de l'espace temps
 $g_{\mu\nu} = +1 - 1 - 1 - 1$: tenseur métrique dans l'espace temps
 $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx_i^2}$ temps propre sur une trajectoire
 A_μ : quadri-potentiel électromagnétique
 P_ν : quadrivecteur énergie-impulsion
 $F_{\nu\mu}$: tenseur électromagnétique
 $\mathcal{E}$: le champ électrique
 $\mathcal{B}$: le champ magnétique
 $\mathcal{F}$: Force relativiste de H. Minkowski
 E_i : champ électrique
 B_j : champ magnétique
 $\mathcal{A}$: l'action
 $\mathcal{L}(x)$: densité lagrangienne
 $\mathcal{S}$: la matrice S
 $\mathcal{H}$: l'espace de Hilbert

1 Interactions relativistes classiques :

1.1 Les différents thèmes

-

L'énergie, la masse et le temps

L'électrodynamique classique : une théorie relativiste !

Le rayonnement électromagnétique et les particules accélérées... !

Les contraintes pour une théorie "quantique" relativiste

Les états virtuels en physique quantique

Retour sur la notion de masse : source ou conséquence des interactions ?

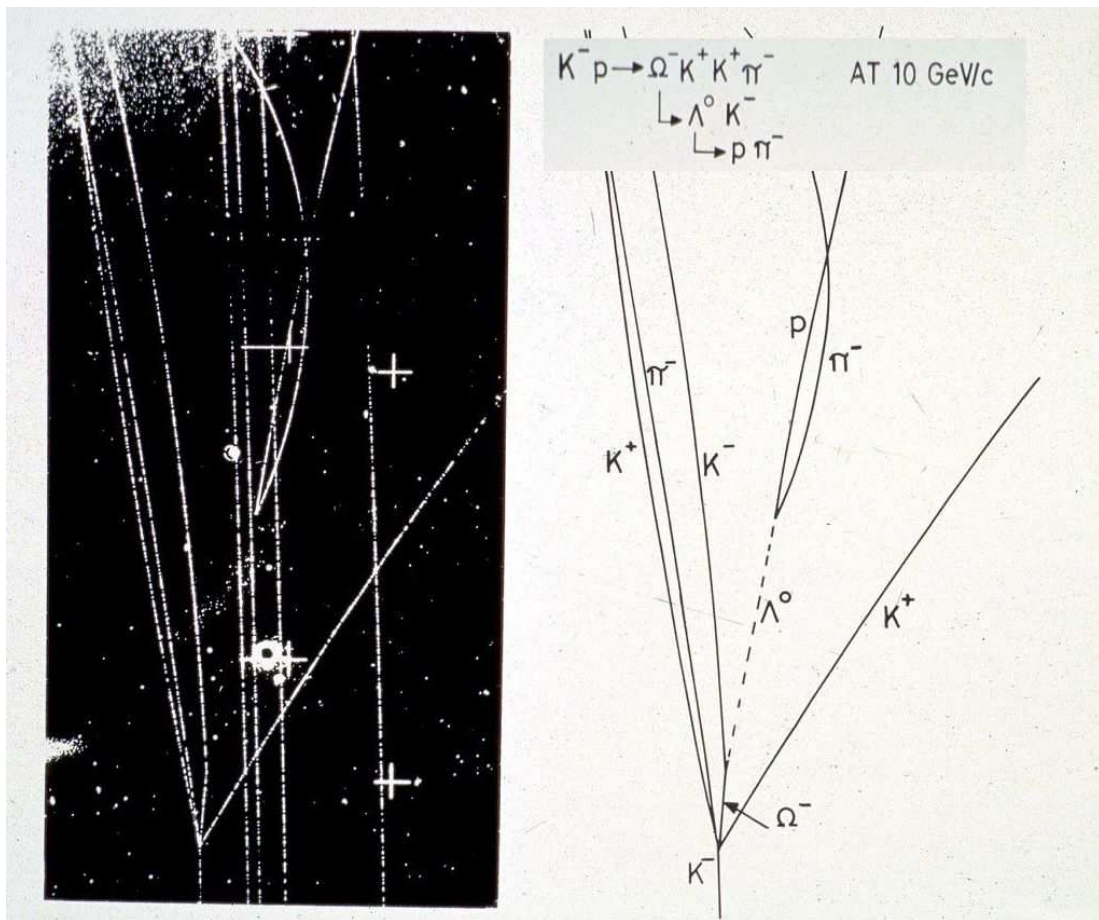


Figure 2: La production de Ω^- au CERN dans les années 1960.

Il y a plusieurs types d'interactions sur le cliché de la figure 2.

- les K^- incidents interagissent avec les courants qui produisent le champ B $\Rightarrow$ les trajectoires sont courbées.
- les K^- incidents interagissent avec les électrons atomiques $\Rightarrow$ en produisant de l'ionisation qui permet la détection.
- un K^- incident parmi 5 interagit avec un proton pour produire un Ω^- .

1.2 Les domaines expérimentaux de la relativité restreinte

$$E_0 = m c^2$$

- Les hautes énergies

$$E \gg 1 \text{ MeV électrons}$$

$$E \gg 1 \text{ GeV protons}$$

accélérateurs ou rayonnement cosmique.

- Les masses faibles

$$m c^2 < 1 \text{ eV neutrinos}$$

$$m c^2 = 0 \text{ photons}$$

les processus électrofaibles à basse énergie

1.3 La masse (au repos) n'est pas qu'un paramètre ...

-

- 1- définition " statique" : une longueur se conserve

$$P^\mu P_\mu = m^2 \text{ avec } P = (P_0 = m\gamma, \vec{P} = m\gamma\vec{v})$$

- 2- définition "dynamique" : elle s'oppose au mouvement

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \left[\frac{1}{m}\vec{f}\right]_{\vec{v}=0}$$

- 3- définition "énergétique" : elle peut se transformer en énergie...

$$E = m c^2$$

- 4- définition "ondulatoire" : elle peut être "incohérente"

$$\hbar\omega = E \text{ avec } \phi = \frac{m c^2}{\hbar} t$$

- 5- définition "géométrique" : elle transforme l'espace-temps.

$$m c^2 \sim \text{la courbure de l'espace temps}$$

(1)

on fera : $c=1=\hbar$

α	$\hbar$	c
1/137,036	6,52 10 ⁻²² MeV.s	2,998 10 ⁸ m/s

Table 1: constantes physiques ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$)

1.4 Les particules accélérées

1.4.1 La dynamique covariante de la "force" de Minkowsky

- L'intervalle de temps "propre" sur une trajectoire

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt \text{ soit } dt = \gamma d\tau$$

- La 4-vitesse sur une trajectoire

$$V_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) : P_\mu = m V_\mu$$

- La loi dynamique :

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu$$

Remarque : par construction $V^2 = 1$ et $P^2 = m^2$ se conserve au cours de l'accélération alors :

$$\mathcal{F}_\mu \cdot V^\mu = 0$$

Théorème de l'énergie cinétique : l'action de la force en terme d'énergie

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0 = \vec{\mathcal{F}} \vec{v}$$

1.4.2 La "force" de Minkowsky est électromagnétique.

- action d'un champ extérieur !.

$$F_\mu = q \{F_{\mu\nu} \cdot V^\nu\}$$

- avec le tenseur électromagnétique (6 composantes $\equiv$ E et B):

$$\begin{aligned} \{F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} \\ A^\mu &= (V(x), \vec{A}(x)) \\ \mathcal{E}_i &= (F^{i0}) \quad \mathcal{B}_k = (-F^{ij}) \quad \text{si } \epsilon_{ijk} = 1 \end{aligned}$$

- : formulation non covariante (dans le laboratoire)

$$\mathcal{F}^i = q(F^{i0} \cdot V^0 - F^{ij} \cdot V^j) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Conséquence pour l'énergie :

$$\mathcal{F}^0 = q(F^{0i} \cdot V_i) \Rightarrow \frac{dP_0}{dt} = q(\vec{v} \cdot \vec{E})$$

1.4.3 Le champ électromagnétique est dynamique , c'est une onde ...

- Propriété du champ électromagnétique : l'invariance de jauge :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \Rightarrow F_{\mu\nu} \text{ stable}$$

$$\text{condition de Lorentz : } \partial^\nu A_\nu = 0$$

- équations covariantes de Maxwell :
équations de structure : (pas de monopoles)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [1]$$

équations dépendantes des sources du champ : les charges électriques

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu \quad [2]$$

Remarque 1 : le courant est un mouvement de charges distribuées spatialement

$$j_\mu \sim qV_\mu$$

Remarque 2 : $F_{\mu\nu}$ antisymétrique implique la conservation de Q et l'invariance de jauge

$$\Rightarrow \partial^\mu j_\mu = 0 \text{ et } A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$$

équations aux potentiels retardés dans la jauge de Lorentz :

$$\{\partial^\nu \partial_\nu\} A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu \Rightarrow \square A_\mu = -\frac{1}{\epsilon_0} j_\mu$$

solution par exemple [5] page 258 et 428 : déplacement du signal E-B à la vitesse c !

$$A_\mu(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} j_\mu(x', t') \delta(t' + \frac{R}{c} - t) d^3x' dt'$$

avec $R(t') = |\vec{x} - \vec{x}'(t')|$

1.4.4 Le rayonnement

- une charge en mouvement est une source de champ E-B :
équations sur le potentiel : (références [4] page 163 ou [13])

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R (1 - \vec{n} \cdot \vec{v})}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}}{R (1 - \vec{n} \cdot \vec{v})}$$

$$\text{avec } R = |\vec{x} - \vec{x}'| \text{ avec } t' = t - R(t')/c$$

- une charge accélérée est une source de rayonnement dans le vide :
équations sur le champ à l'infini..en R^{-1} : ([4] page 166)

$$\vec{E} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R (1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} \left\{ \vec{a} - (\vec{n} \cdot \vec{a}) \left(\frac{\vec{n} - \vec{v}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})} \right) \right\}$$

$$\vec{B} = q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R (1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} \left\{ \vec{n} \wedge \vec{a} - (\vec{n} \cdot \vec{a}) \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})} \right) \right\}$$

Remarque 1 : l'énergie est bien rayonnée car :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = \vec{B} \text{ et aussi } (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \epsilon_0 E^2 \vec{n}$$

Remarque 2 : Par exemple, à la limite N.R on a :

$$\vec{P} \sim \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 R^{-2} \frac{1}{\epsilon_0} (a)^2 \sin^2(\theta) \vec{n}$$

Où θ est l'angle entre la direction de $\vec{n}$ et celle de $\vec{a}$. Si l'on intègre on obtient la formule de Larmor pour la puissance rayonnée :

$$Puissance = \aleph |\vec{a}|^2 = \aleph m^{-2} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 \quad \text{avec } \aleph = \frac{2}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = \frac{2}{3} (\alpha \hbar)$$

La *puissance rayonnée* permet de calculer la section efficace Thomson qui représente la "taille" d'un électron libre exposé à un rayonnement E-B qu'il rediffuse :

$$\text{avec } m\vec{a} = q\vec{E} \quad \text{et flux d'énergie incidente} = \epsilon_0 E^2 \quad \text{et } q = -e$$

$$\sigma_{th} = \frac{\text{puissance rayonnée}}{\text{flux d'énergie incidente}} = \frac{8\pi}{3} \left(\alpha \frac{\hbar}{mc} \right)^2 = 0,665 \, 245 \, 854 \, (15) \, 10^{-24} \, m^2$$

Remarque 3 : A la limite U.R avec $\vec{a} \perp \vec{v}$ et $v \sim 1$, on obtient la formule pour le rayonnement synchrotron ; dans ce cas, l'émission est concentrée vers l'avant à $\theta \sim 0$ et :

$$Puissance = \aleph |\vec{a}|^2 \gamma^4$$

$$\text{avec } \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad Puissance = \aleph m^{-2} \gamma^2 \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 \rightarrow \infty$$

- Rayonnement à vitesse constante : une charge à vitesse relativiste constante peut être une source de rayonnement dans la matière, c'est l'effet Cerenkov : il faut $v > c$ (dans la matière!)

Une onde de choc électromagnétique se développe dans la direction $\vec{n}$ si :

$$(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{c}{v} \text{ dans la matière !}$$

- En principe l'interaction classique de deux charges relativistes dans le vide peut être décrite par l'interaction de leurs champs E-B. Elle se traduit par du rayonnement qui accompagne l'accélération de l'une dans le champ de l'autre et réciproquement. Ce rayonnement appartient à ce qu'il est convenu d'appeler les corrections radiatives, il est négligé voire négligeable dans de nombreux cas sauf quand il devient "catastrophique" par exemple dans le domaine ultra relativiste, citons deux cas :

[1] le rayonnement de freinage (bremstrahlung)

[2] ou le rayonnement synchrotron au voisinage de $v=1$ (électrons).

Dans le vide, le rayonnement E-B est engendré par l'"accélération" de la charge, cette accélération peut avoir une origine autre qu'électromagnétique ; tout processus de transformation des états de particules chargées peut conduire à du rayonnement ($\sim$ corrections radiatives).

- le rayonnement de Maxwell est essentiellement irréversible ! il n'y a aucune "chance" de produire le processus inverse par renversement du temps. Ce rayonnement classique génère fondamentalement de l'entropie.

Ce n'est pas le cas si le rayonnement est quantifié car l'émission d'un photon admet le processus inverse : l'absorption d'un photon. Cet événement est singulier donc réversible.

Il existe une profonde différence formelle entre les représentations théoriques des physiciens à propos des gaz et des autres corps pondérables, et la théorie de Maxwell des processus électromagnétiques dans ce qu'il est convenu d'appeler l'espace vide (...). Selon la théorie de Maxwell, l'énergie doit être conçue, pour tous les phénomènes purement électromagnétiques, et donc également pour la lumière, comme une fonction continue de l'espace, alors que l'énergie d'un corps pondérable doit, selon la conception actuelle des physiciens, être décrite comme une somme portant sur les atomes et les électrons.

L'énergie d'un corps pondérable ne peut pas être divisée en parties aussi nombreuses et aussi petites que l'on veut, alors que l'énergie d'une radiation lumineuse émise par une source de lumière ponctuelle est, selon la théorie de Maxwell de la lumière (ou, selon toute théorie ondulatoire), distribuée de façon continue sur un volume sans cesse croissant.

Einstein cherche à montrer la structure discontinue du rayonnement: (1905)

Selon l'hypothèse envisagée ici, l'énergie n'est pas distribuée de façon continue sur des espaces de plus en plus grands, mais est constituée d'un nombre fini de quanta d'énergie localisés en des points de l'espace, chacun se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être absorbé ou produit que tout d'un bloc.

Einstein l'écrit en 1909:

La caractéristique fondamentale de la théorie ondulatoire qui est à l'origine de ces difficultés est, me semble-t-il, la suivante. (...). Dans la théorie qui nous est habituelle, un ion oscillant engendre une onde sphérique qui se propage vers l'extérieur. Le processus inverse en tant que processus élémentaire n'existe pas. En effet, s'il est vrai qu'une onde sphérique se propageant vers l'intérieur est mathématiquement possible, il n'en reste pas moins que sa réalisation approchée nécessite une énorme quantité d'entités élémentaires émettrices. Le processus élémentaire d'émission de lumière ne possède donc pas, en tant que tel un caractère de réversibilité. C'est sur ce point à mon avis que notre théorie ondulatoire n'est pas juste. [AE1909-4, p93] (1909)

Le concept d'entropie du rayonnement (théorie "scalaire" de la lumière) nécessite l'introduction de processus réversibles au sens thermodynamique qui montrent l'insuffisance de la théorie ondulatoire.

Figure 3: Remarques d'Einstein dans les articles de 1905 - 1909 référence [14]

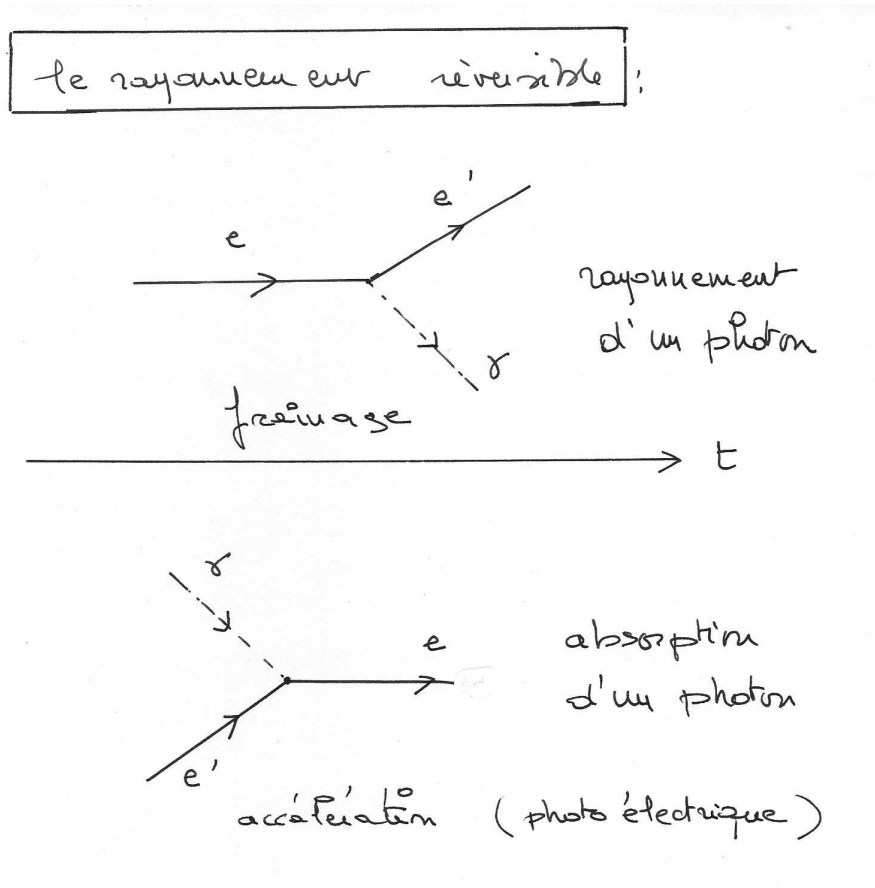


Figure 4: Emission - absorption d'un photon

1.4.5 Le rayonnement quantique : ... vers QED

- Conséquence de la quantification : les particules virtuelles existent ...

Une conséquence importante de la quantification est en effet que, si on veut garder les principes de la "relativité" dans les "collisions" élémentaires à savoir, entre autre la conservation de l'énergie impulsion, il est impossible de préserver la masse de l'électron dans l'absorption et l'émission d'un photon "réel", l'électron devient nécessairement virtuel !

- Cette remarque permet de comprendre la physique élémentaire du rayonnement grâce à la notion de virtualité (figure 4) :

- 1 L'électron absorbe un photon et devient virtuel car sa masse est alors $> 511 \text{ keV}$: cette phase correspond à l'accélération classique qui est à l'origine du rayonnement dans le vide.
- 2 L'électron ne peut être observé comme tel à distance macroscopique car on a :

$$P^2 = m^2 \text{ avec } m \neq 511 \text{ keV}$$

- 3 Il interagit donc à nouveau par l'émission spontanée d'un deuxième photon, l'électron retrouve sa "réalité" $m = 511 \text{ keV}$.

La vision quantique (discrète) donne une interprétation nouvelle au mécanisme de rayonnement par l'accélération initiale.

- Limite classique : une particule chargée relativiste peut interagir avec une source de photons virtuels (le champ magnétique d'une bobine parcourue par un courant). Alors les microdiffusions

s'ajoutent, la trajectoire devient classique, l'électron est constamment réel tel que : $P^2 = m^2$ et son rayonnement est à la limite continu.

• où tester QED sur le plan expérimental ? bien évidemment dans des interactions où les actions des photons pourront être détectées une à une : c'est donc plus "naturel" à haute énergie qu'à basse énergie. Exemple la diffusion Compton :

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^- \quad E_\gamma \sim 1 \text{ MeV}$$

Remarque qui n'engage que l'auteur : *Les interactions relativistes n'intéressent vraiment que les physiciens des particules et les théoriciens de cette discipline car l'idéologie ambiante présuppose que "ce n'est pas utile ...", je me permets d'ajouter : en effet, ça ne sert qu'à comprendre*

2 La mécanique ondulatoire et la moindre action

2.1 Les particules

• Rappel : Le principe de moindre action pour une particule ponctuelle dans un potentiel classique s'exprime par :

$$\mathcal{L} = \frac{m v^2}{2} - V(x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{min} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} \mathcal{L} dt$$

Remarque 1 : L'action est sans dimension ! $\mathcal{A}$ pourrait être une phase si on associait le principe de moindre action avec la stabilité d'une phase, par exemple en écrivant l'onde quantique de la particule de la façon suivante:

$$\Psi \propto \exp(+i\mathcal{A}) \Psi_0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} (\vec{p} d\vec{x} - E dt)$$

C'est l'approximation eikonale pour les ondes semi-classiques, l'action qui apparaît est celle de Maupertuis et on retrouve pour ces particules semi-classiques la mécanique ondulatoire de Broglie et la quantification de Bohr-Sommerfeld :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \nu = \frac{E}{h} \quad ; \quad \int \vec{p} d\vec{x} = n 2\pi \hbar$$

• Dans un champ E-B classique, l'action relativiste pour une particule chargée peut être construite par extension :

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2} - q(-\vec{v} \cdot \vec{A} + V)$$

Remarque 1 : L'action est évidemment un invariant de Lorentz, tous les observateurs de Lorentz sont "d'accord" sur le principe de moindre d'action c'est à dire sur la dynamique.

$$\mathcal{L} dt = -m d\tau - q A_\mu dx^\mu$$

Remarque 2 : Pour une particule relativiste libre l'action est proportionnelle à son temps propre :

$$\mathcal{A} = -m \tau \Rightarrow m = \hbar \omega$$

Remarque 3 : L'action est-elle mesurable ? la réponse est oui mais c'est difficile : l'expérience de Bohm Aaronov avec des électrons. L'état d'interférence des ondes électroniques dépend du potentiel vecteur rencontré sur le chemin choisi par l'électron alors que le champ E-B est constamment nul.

2.2 Les ondes

Question : Peut-on appliquer la moindre action aux ondes ?

La réponse est oui mais le lagrangien est alors une densité lagrangienne dans l'espace. Pour obtenir l'action il faut intégrer dans l'espace-temps de t_1 à t_2 . En acoustique élémentaire, avec $\phi(x)$ le potentiel des vitesses, on posera par exemple :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\rho \vec{v}^2 - \chi p^2) \text{ avec } \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi \text{ et } p = \rho \dot{\phi}$$

L'équation du mouvement de ϕ loin des sources est l'équation de d'Alembert :

$$\square \phi(x) = 0 \Rightarrow \text{propagation du signal à la vitesse } c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho}}$$

Remarque 1 : L'équation générale de l'acoustique avec des sources distribuées pourrait s'écrire :

$$\square \phi(x) = \rho(x)$$

$\rho(x)$ est ici la source du potentiel des vitesses $\phi(x)$. La source est évidemment à l'origine de la distribution spectrale. La solution peut être obtenue à l'aide des fonctions de Green de l'équation d'onde qui sont les solutions de l'équation ci-dessous :

$$\square G(x, x') = \delta(x - x') \Rightarrow G(x, x') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - \tilde{t})$$

avec $\tilde{t}$ temps retardé ou avancé par la propagation : il y a la possibilité d'une onde entrante (avancée) et d'une onde sortante (retardée).

- De la même façon, le lagrangien (la densité lagrangienne) du champ E-B classique sans les sources est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 - B^2) \quad \text{dans le référentiel du laboratoire} \\ \mathcal{L}(x) &= -\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) \quad \text{expression covariante} \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L}(x) d^4x \end{aligned} \quad (2)$$

Remarque sur une question de Guy Laville : Pourquoi le deuxième invariant de Lorentz du champ $\vec{E} \cdot \vec{B}$ n'intervient-il pas dans le Lagrangien ? une hypothèse : à cause de l'absence des monopoles magnétiques. A voir ?

- le lagrangien d'interaction du champ avec les courants de charges relativistes :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -A_\mu \cdot j^\mu(x)$$

- Le lagrangien complet de l'électrodynamique de Maxwell avec des champs ponctuels relativistes de spin 1/2 (équation de Dirac : un électron par exemple) s'écrira :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - q A)_\mu - m \} \Psi(x)$$

Remarque 1 : Le principe de moindre action permet de construire l'action du champ sur le courant de charge et inversement .

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \epsilon_0^{-1} j_\nu \\ \{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - q A_\mu) - m \} \Psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

avec $j_\nu = q\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi(x)$

Remarque 2 : L'invariance de jauge : Un changement de phase sur Ψ engendre une transformation de jauge du champ .

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \exp(-iq f(x)).\Psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)\end{aligned}$$

Remarque 3 : Le changement de phase local sur Ψ engendre un groupe continu de transformations unitaires sur les champs de particules chargées . L'existence de cette symétrie a été associée à la renormalisation de QED et généralisée pour l'électrofaible en 1971 par Veltman et t'Hooft (prix nobel 1999).

$$U = \exp(-iq f(x)).$$

Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = \sum q$

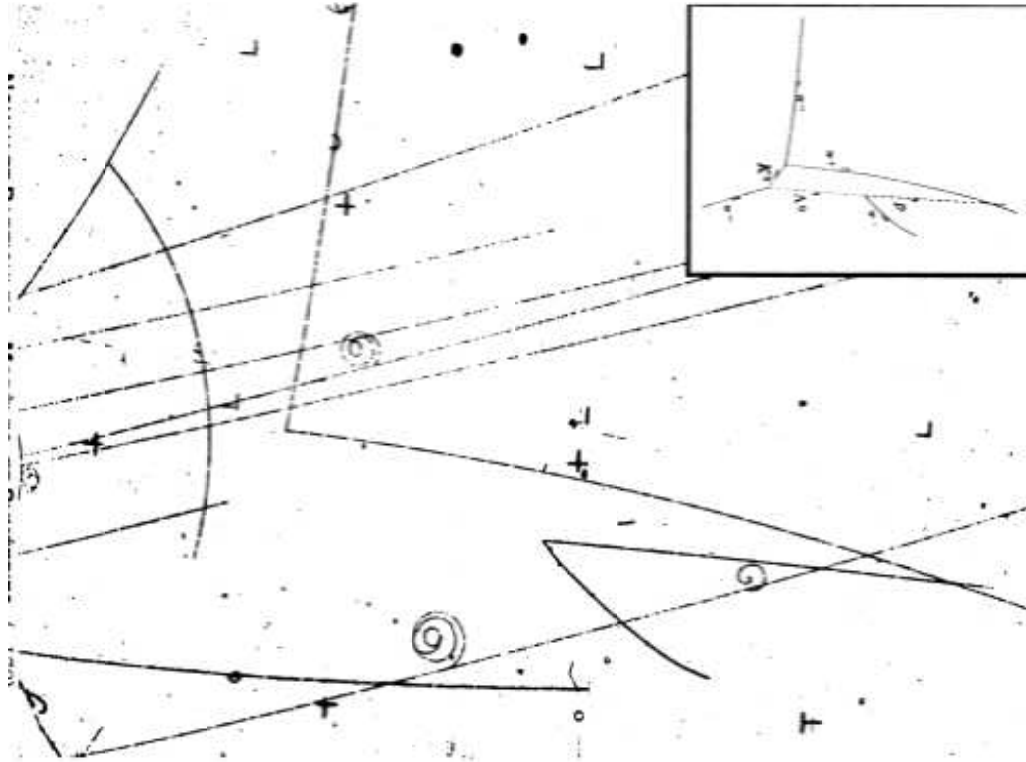


Figure 5: La production de particules étranges dans : $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$.

3 Introduction à la dynamique quantique : QED etc ...

- Amplitude de diffusion : (référence Landau [11] page 302)

" Le problème des collisions se présente sous la forme générale suivante : connaissant l'état initial d'un système (un certain ensemble de particules libres), calculer la probabilité de divers états finals possibles (d'autres ensembles de particules libres). Si le symbole $|i\rangle$ désigne l'état initial, le résultat de la collision peut être représenté par une superposition quantique

$$\sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle$$

où la somme est étendue aux divers états finals possibles. Les coefficients de ce développement $\langle f|S|i\rangle$ constituent, en principe, une matrice que l'on appelle matrice de diffusion ou matrice S (pour scattering). Les carrés $|S_{fi}|^2$ donnent les probabilités de transition vers des états $|f\rangle$ déterminés (figure 5).

• Dans la littérature, il existe de nombreuses écritures plus ou moins formelles de l'opérateur S. Elles conduisent à ce qu'il est convenu d'appeler les règles de Feynman qui permettent de calculer les amplitudes S_{if} dans certains cas simples. Formellement on écrira :

$$\mathcal{S} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x) d^4x \right] \quad \text{référence [15] page 187 ou [2] page 389}$$

• $\mathcal{L}(x)$ est la densité lagrangienne générale en x ; elle comportera des termes assurant la propagation libre des champs et des termes d'interaction locale intervenant directement ou indirectement dans la diffusion.

La dualité onde-corpuscule est introduite dans le formalisme de la théorie des champs par le fait qu'il s'agit d'ondes quantiques étendues dans l'espace mais qui interagissent entre elles ponctuellement comme des points matériels.

- Pour construire correctement les amplitudes de transition il faudra :

- 1 factoriser la possibilité de n'avoir aucune interaction ou bien d'avoir des interactions sans conséquences physiques : c'est un élément de la renormalisation.
- 2 respecter les invariances de Lorentz et Poincaré : conservation de l'énergie-impulsion et du moment cinétique.
- 3 respecter éventuellement d'autres symétries : exemple la conservation de la charge électrique..(et les symétries internes en général).

Remarque 1 : L'expression exponentielle de S permet un développement en série d'opérateurs, comme par exemple le terme ci-dessous qui est un terme du deuxième ordre :

$$\mathcal{S} = \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) d^4x d^4y$$

Remarque 2 : A la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, on peut admettre que dans le développement de S les termes d'ordre plus élevé interviennent davantage car :

$$\mathcal{S} \sim \hbar^{-n} \int \mathcal{L}_{int}(x_1) \dots \mathcal{L}_{int}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \quad n \rightarrow \infty \quad \text{si } \hbar \rightarrow 0$$

Ceci correspond à l'idée commune que l'on a d'une interaction classique douce et quasi-continue mais notons que l'argument vaut ici pour l'amplitude de transition.

Question : Est-il vraisemblable dans ce contexte que l'on recherche les processus les "plus élémentaires" vers les hautes énergies et dans des interactions dures.

Plus élémentaires signifiant ici plus quantique donc à l'ordre le plus bas de l'interaction.

• En fait S prend en compte **tout ce qui est possible** avec le lagrangien $L(x)$ mais l'état initial et l'état final étant fixés, seuls "certains chemins" dans S conduiront à une amplitude non nulle voire dominante .

Si l'interaction est perturbative , le développement en série de S converge et les termes d'ordre le plus bas dominant ; c'est la cas de QED car

$$\mathcal{L}_{int}(x) \sim e \quad \text{et} \quad e \sim \sqrt{\alpha = 1/137,0..} \sim 0.10$$

3.1 QED : les tests expérimentaux de QED

Le lagrangien d'interaction pour QED s'écrit

$$\mathcal{L}_{int}(x) = - A_\mu \cdot j^\mu(x) = - e A_\mu \cdot \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi(x)$$

Les champs quantiques sont alors des "opérateurs" qui, en x, créent et absorbent les particules, électrons et photons. Feynman a proposé une représentation graphique des termes du développement de S pour QED, c'est ce qu'on a appelé les graphes de Feynman. Le graphe pour $L(x)$ est :

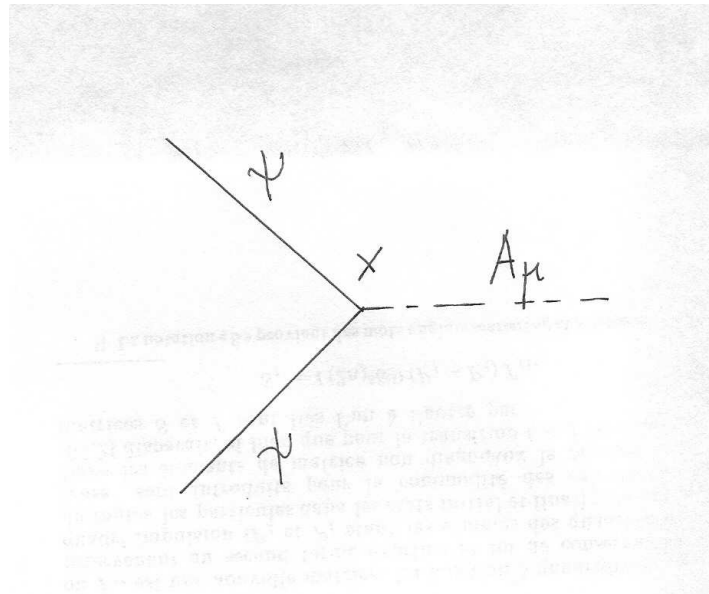


Figure 6: L'interaction électron-photon selon QED.

• Le graphe élémentaire de la figure 6 représente l'interaction d'une particule matérielle (le fermion chargé) avec un boson (le rayonnement γ). La conservation du spin impose des contraintes à cette structure. Actuellement dans les théories invariantes de jauge de la physique des particules le boson est vectoriel (spin 1) et les fermions élémentaires sont de spin 1/2 (les leptons et les quarks).

• La caractéristique essentielle d'un graphe est le nombre de points d'interaction qui fixe l'ordre du graphe dans le développement perturbatif. Entre les différents points x de l'espace-temps la propagation des champs est libre et se doit de respecter la causalité relativiste.

• Une application

Soit à comparer deux processus purement QED très semblables : la diffusion Möller et la diffusion Bhabha figure 7. Les différences sont purement quantiques et permettent de tester les phases de

QED à l'ordre 2 (figure 8).

$$\begin{aligned} e^- + e^- &\rightarrow e^- + e^- \quad \text{Möller} \\ e^+ + e^- &\rightarrow e^+ + e^- \quad \text{Bhabha} \end{aligned}$$

Dans un cas, les particules sont identiques et donc il existe une symétrie d'échange des particules, dans l'autre cas, il y a une possibilité d'annihilation des particules initiales.

Dans les deux cas il existe à l'ordre 2 deux amplitudes différentes. La probabilité de diffusion sous un angle θ dans le référentiel du centre de masse est bien décrite par les formules présentées figure 7 qui prennent en compte l'interférence. Ces expériences peuvent être apparentées à celle des fentes d'Young en optique et à beaucoup d'autres où la lumière suit des chemins différents et finalement interfère lors de la détection.

• D'autres tests de QED :

Nous nous limitons aux processus purement leptoniques :

- 1 Annihilation figure 9.

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

- 2 Matérialisation figure 10

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

- 3 Diffusion Compton figure 11.

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

3.2 Théories de jauge et l'unification électro-faible

à voir ...

3.3 Conclusion

Le but de ces notes était d'accompagner un séminaire donné les 29 mars et 5 avril 2005 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville. Evidemment, tant les notes que les deux heures de séminaire ne permettent qu'un survol de la question des interactions relativistes (des particules). J'ai souhaité que ces notes puissent être au moins un guide dans une littérature scientifique assez confuse. En particulier en soulignant les contraintes physiques essentielles qui bornent les développements mathématiques. Je les rappelle ci-dessous afin de regrouper l'essentiel :

- 1 La nécessité de la quantification du rayonnement relativiste des ondes de Maxwell, une exigence de la réversibilité microscopique.
- 2 La notion de particules virtuelles de masse variable est une conséquence de la quantification des interactions. Ces particules restent par essence des "images" de celles que nous observons à l'état "libre" et stable dans l'"univers macroscopique".
- 3 L'élémentarité des processus est une notion difficile à définir, elle doit être recherchée dans un développement des amplitudes quantiques en fonction de $\frac{g}{\hbar}$

$$A\left(\frac{g}{\hbar}\right) = \sum_n \left(\frac{g}{\hbar}\right)^n \times a_n$$

avec g la constante de couplage de l'interaction ($g = e$ pour QED).

Les processus élémentaires se situent à l'ordre le plus bas de ce développement. Ceci vient du principe de moindre action et de son extension quantique.

- 4 Le système des unités adapté à la physique microscopique est tel que $\hbar$ et c doivent être pris égaux à 1. Dans ce système d'unités construit sur les valeurs actuelles des deux constantes, il peut être légitime de faire varier $\hbar$ entre 0 et 1 et c entre 1 et ∞ pour étudier les limites quantiques, relativistes et classiques.

Le développement perturbatif est possible pour QED, vraisemblable pour l'électrofaible, questionnable pour les interactions fortes (même à haute énergie). En effet la nature ne nous permet pas de faire varier librement α autant que nous le souhaiterions. Rappelons pour finir que la gravitation est exclue des considérations évoquées au cours du séminaire.

Nos références : [12][14][13][4][9][10] [3][5][15][6][8][7] [1][16][2]

References

- [1] Fayyazuddin & al. *{ A modern introduction to .. }*. ..., 1992.
- [2] M. Le Bellac. *{ Des phénomènes critiques aux champs .. }*. Intereditions CNRS, 1988.
- [3] S.J. Chang. *{ Théorie des champs }*. World Scientific, 1990.
- [4] M. Cissoko. *{ La relativité.. }*. Armand-Colin, 1994, 1994.
- [5] J.D. Jackson. *{ Electrodynamique classique }*. Dunod, 2005.
- [6] G. Joos. *{ Theoretical physics }*. Dover, 1986.
- [7] G. Kane. *{ Particle garden }*. ..., 1995.
- [8] T.D. Lee. *{ Particle physics }*. ..., 1990.
- [9] L. Landau & Lifchitz. *{ Le champ électromagnétique }*. MIR, 1989.
- [10] L. Landau & Lifchitz. *{ Relativité }*. MIR, 1989.
- [11] L. Landau & E. Lifchitz. *{ Théorie quantique relativiste I }*. MIR , Inc., 1972.
- [12] Lumbroso. *{ La relativité }*. Edi-science, 1996.
- [13] R. Omnes. *{ Cours de maîtrise }*. Orsay 1967, 1967.
- [14] Y Pierseaux. *{ La structure fine de la R.R }*. L'Harmattan, 1999.
- [15] L.H. Ryder. *{ Intro to Quantum Field Theory }*. Cambridge U.P., 1985.
- [16] M. Veltman. *{ A path to Feynman rules : Diagrammatica }*. Cambridge U.P., 1994.

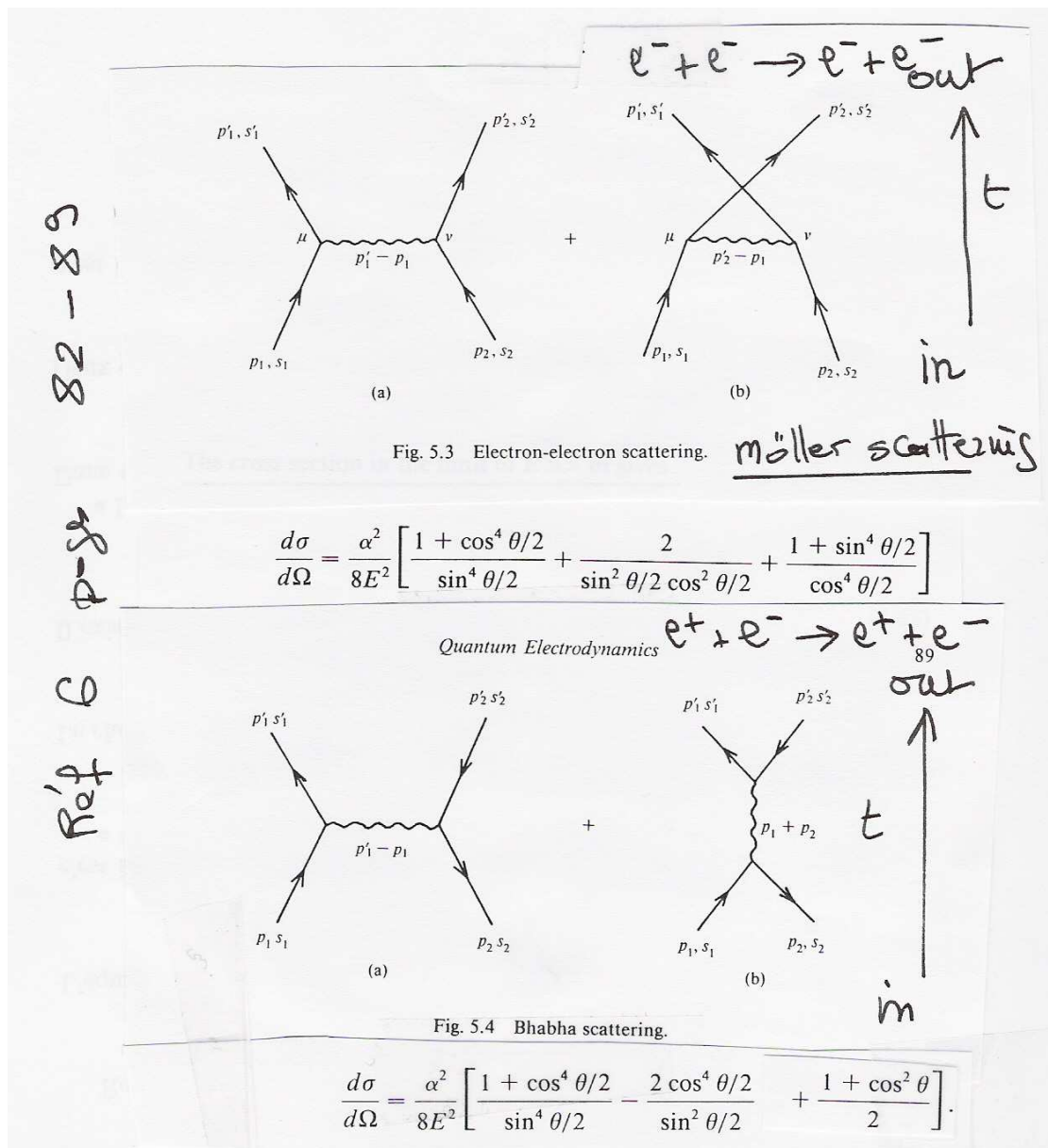


Figure 7: Graphes de la diffusion Möller et Bhabha au second ordre (référence [3])

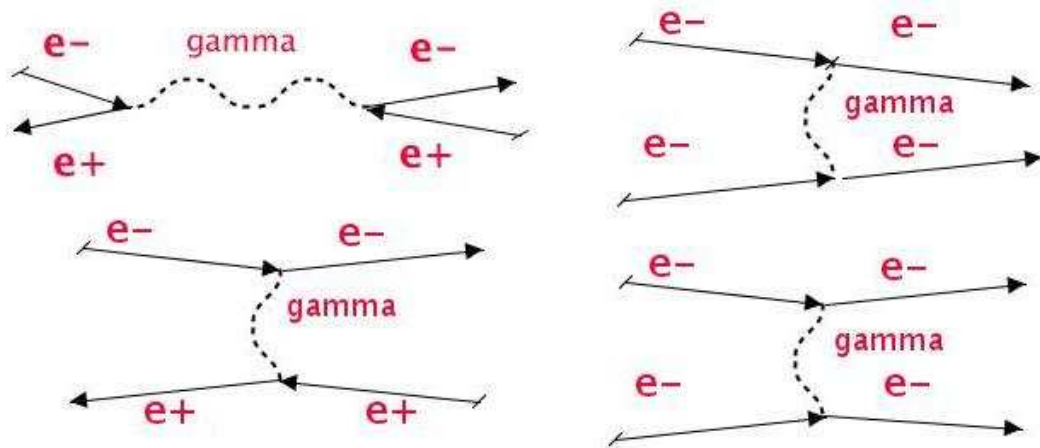


Figure 8: Graphes de Feynman à l'ordre 2 pour la diffusion Bhabha et la diffusion Möller

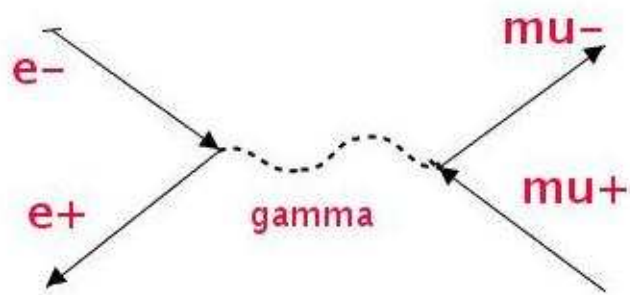


Figure 9: Graphes d'annihilation

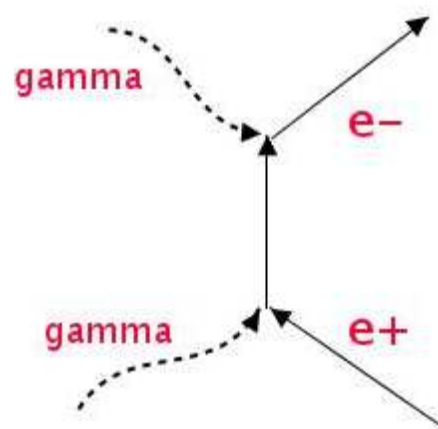


Figure 10: Graphes de matérialisation

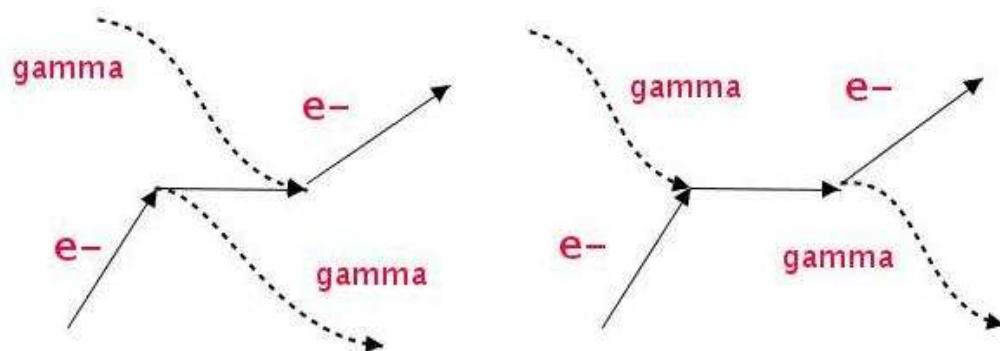


Figure 11: Graphes d'ordre 2 de la diffusion Compton