

Sur la particule de Higgs

C. LONGUEMARE - séminaire d'analyse *

16 décembre 2008

Version 04/04/2009

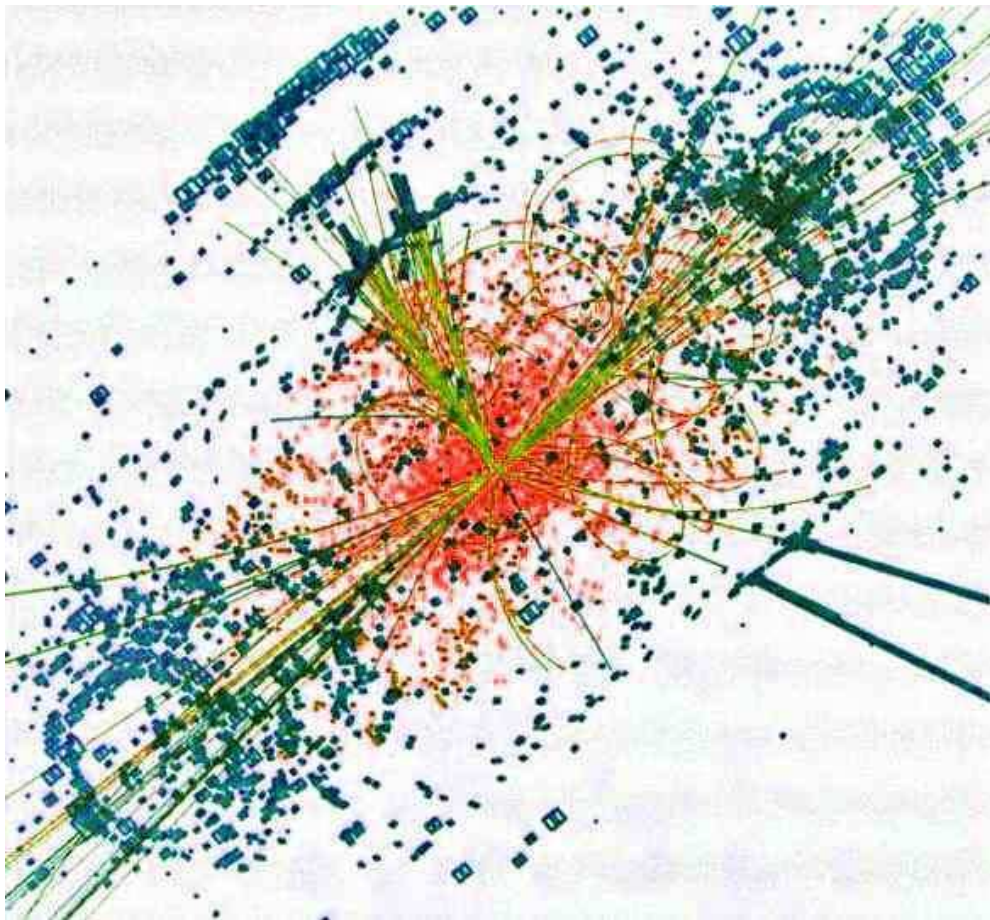


Figure 1: détection d'un boson de Higgs dans le détecteur CMS (**simulation**)

Abstract

Ces notes accompagnent un séminaire prévu le 16 décembre 2008 au département de mathématiques de l'U-Caen à la demande de Guy Laville.

*UNIVERSITE DE CAEN année 2008-2009

SOMMAIRE

1	Elaboration du modèle standard	6
1.1	historique	6
1.2	Les principes d'élaboration de la théorie des interactions	7
2	Les contraintes relativistes classiques	10
2.1	La dynamique covariante de la "force" de Minkowsky	10
2.2	La "force" électromagnétique de Lorentz.	10
3	Retour sur l'électrodynamique classique	11
3.1	La théorie classique de Maxwell-Faraday	11
3.2	Application élémentaire aux charges ponctuelles stationnaires	12
3.2.1	Le cas d'une charge au repos	12
3.2.2	L'interaction de deux charges statiques	13
3.3	L'approche lagrangienne	14
4	L'électrodynamique quantique	15
4.1	L'électron dans un champ classique $\hbar = 1$	15
4.2	Les interactions quantiques électron-photon	15
4.3	Principe d'interaction minimale (minimal coupling)	16
4.4	La mécanique ondulatoire et la moindre action ¹⁴	17
4.5	Introduction à la dynamique quantique : QED etc	17
4.6	Quelques justifications pour les règles de Feynman	19
4.6.1	Les particules observables (réelles) dans l'état final et initial	19
4.6.2	Les particules (virtuelles) qui interviennent "pendant" l'interaction	19
4.6.3	Les points d'interaction	19
4.6.4	Application à la diffusion Moeller soit $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	19
4.7	L'invariance de jauge en QED	20
5	La théorie électrofaible de Weinberg-Salam	21
5.1	L'invariance de jauge électrofaible, les constantes g g'	21
5.2	Les ondes de bosons vectoriels massifs	22
5.3	La transformation de jauge dans les théories de Yang-Mills (1954)	23
5.3.1	Propriétés attendues du groupe de jauge	23
5.3.2	L'invariance de jauge et la dynamique des fermions	23
5.3.3	Le tenseur bosonique	24
5.3.4	L'invariance de jauge et la dynamique des bosons	25
5.3.5	L'invariance de jauge du lagrangien bosonique	25
5.3.6	Le Lagrangien unifié des fermions et des bosons en interaction	26
5.4	Les choix de Weinberg-Salam (1967)	27
5.4.1	La question des courants neutres	27
5.4.2	La partie électromagnétique	28
5.4.3	La partie faible neutre	28
5.4.4	La partie faible chargée	29
6	La particule de Higgs et les masses des bosons (1964)	30
6.1	Le mécanisme de Higgs-Kibble	30
6.2	Le cas $SU(2)_L \otimes U(1)$	31

List of Figures

1	détection d'un boson de Higgs dans le détecteur CMS (simulation)	1
2	l'interaction dans les théories de jauge	8
3	(événement "réel" / chambre à bulles à hydrogène)	9
4	Le champ d'une charge ponctuelle	12
5	L'interaction de 2 charges ponctuelles, ici de même signe, est une propriété géométrique	13
6	L'électrodynamique à l'ordre 1	16
7	Les règles de Feynman pour QED (avec certaines conventions)	18
8	Les règles de Feynman pour la diffusion Moeller	19
9	L'électrofaible à l'ordre 1	22
10	La self interaction des bosons de jauge	25
11	la désintégration bêta au premier ordre $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	29

List of Tables

1	Notations	5
2	Action du "crossing" sur les observables des particules	7
3	Le groupe de jauge du modèle standard	21
4	Le modèle Left & Right de Weinberg	27
5	Les résultats expérimentaux : $\theta_W = 27,8^0$	30
6	Les bosons scalaires de Higgs-Weinberg	31
7	Les masses des bosons vectoriels W Z	32
8	Les (principaux) paramètres du modèle avec	33

Notations

$\mu = 0, 1, 2, 3$: indices de l'espace temps

$g_{\mu\nu} = +1 - 1 - 1 - 1$: tenseur métrique dans l'espace temps

$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx_i^2}$ temps propre sur une trajectoire

γ_μ les matrices de Dirac

T_a les générateurs d'un groupe de Lie : SU2, SU3 ... avec $a = 1, 2, \dots, n$.

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \not{X} = \gamma_\mu Y^\mu$$

et

$$\tau(\not{X}) = \gamma_\mu T_a Y_a^\mu$$

A_μ	quadri-potentiel électromagnétique
P_ν	quadri-vecteur énergie-impulsion
q_ν	quadri-transfert dans une interaction
$F_{\nu\mu}$	tenseur électromagnétique
$\mathcal{E}$	le champ électrique
$\mathcal{B}$	le champ magnétique
$\mathcal{D}$	l'excitation électrique
$\mathcal{H}$	l'excitation magnétique
$\mathcal{J}$	la densité de courant
$\mathcal{F}$	Force relativiste de H. Minkowski
E_i	champ électrique
B_j	champ magnétique
$\mathcal{A}$	l'action
A	l'amplitude quantique
S	la matrice S
$\mathcal{L}(x)$	la densité lagrangienne
$\mathcal{H}$	l'espace de Hilbert
$\mathcal{H}(x)$	la densité hamiltonienne
$\mathcal{W}$	l'énergie
$\mathcal{W}(x)$	la densité d'énergie

Table 1: Notations

1 Elaboration du modèle standard

1.1 historique

Les références :

- 1896 Découverte de la radioactivité par H Becquerel : la matière uranifère est active
- 1897 Découverte de l'électron par JJ Thomson : l'électricité est électronique
- 1900 Identification des radioactivités α et β par E Rutherford
- 1911 Structure du noyau par E. Rutherford : l'inertie de la matière est nucléaire
- 1919 Découverte du proton par E. Rutherford : le noyau peut émettre un proton (noyau de l'hydrogène)
- 1932 Découverte du neutron par Chadwick : la matière est constituée de protons électrons neutrons (fermions) et de photons (bosons). Il s'y ajoute le neutrino (désintégrations bêta)
- 1960... Grâce au développement des accélérateurs (jusqu'à 20 GeV) on observe de nombreuses particules massives instables et certaines antiparticules :

$$\pi^{(+ - 0)} \quad \mu^{(-)} \quad K^{(+ - 0)} \quad \Lambda^{(0)} \quad \Sigma^{(+ - 0)} \quad \Xi^{(- 0)} \quad \Omega^{(-)} \quad \dots \quad \mu^{(+)} \quad \bar{p}^{(-)} \quad \bar{n}^{(0)} \quad \bar{\Lambda}^{(0)} \quad \bar{\Sigma}^{(- + 0)} \quad \dots$$

Exemple : La désintégration du $\Sigma^0(1192)$ jusqu'aux particules stables

$$\begin{array}{l} \Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma \quad \begin{array}{l} \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\ \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_R \\ \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_R + \nu_L \end{array} : \Sigma^0 \rightarrow p + \bar{\nu}_R + e^- + \bar{\nu}_R + \nu_L + \gamma \end{array}$$

- 1945-1960 Développement de QED et de la renormalisation associée à l'invariance de jauge de l'électromagnétisme : Feynman¹, Tomonaga, Schwinger.
- 1954 Théories de Yang-Mills², généralisation de l'invariance de jauge.
- 1964 Hypothèse des quarks : M. Gell-Mann³ et G. Zweig⁴.
- 1964 Mécanisme de brisure de symétrie : R. Brout, F. Englert⁵ et P. Higgs⁶.
- 1967 Application de ces principes à l'unification électrofaible : S. Weinberg⁷, A. Salam et S. Glashow.
- 1970 La théorie électrofaible est renormalisable : M. Veltman et G. 't Hooft⁸.
- 1973 La théorie de jauge des interactions fortes basée sur SU(3) conduit à la liberté asymptotique des quarks et explique le confinement : D Politzer⁹, D Gross et F Wilczek¹⁰

¹Mathematical formulation of the quantum theory of ... Phys. Rev. 80, 440 (1950)

²Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Physical Review 96, 191 (1954)

³Physics Letters 8, 214 (1964)

⁴An SU(3) model for strong interactions ... CERN Preprint 8419/TH, 412 (1964)

⁵Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, Physical Review Letters, 13, 321 (1964)

⁶Broken Symmetries and the masses of Gauge bosons, Physical Review Letters, 13, 508 (1964)

⁷A theory of leptons, Physical Review Letters, 13, 321-322 (1967)

⁸Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields, Nuclear Physics 35B, 167 (1971)

⁹Reliable perturbative results for strong interactions, Phys. Rev. Letters 30, 1346 (1973)

¹⁰ Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories, Phys. Rev. Letters 30, 1343 (1973)

A	$\bar{A}$
p	$\bar{p}$
σ	$-\sigma$
Q	$-Q$

Table 2: Action du "crossing" sur les observables des particules

1.2 Les principes d'élaboration de la théorie des interactions

Le cadre est

- celui de la relativité restreinte car les vitesses sont voisines c
- et celui de la mécanique quantique

1. $\exists \psi \in \mathcal{H}$

2. l'amplitude de a dans ψ est $A = \langle a | \psi \rangle \in \mathbb{C}$ et la probabilité de a est $Prob = |A|^2$

3. si $\psi = \psi_1 + \psi_2$ alors $A = A_1 + A_2$

Les principes qui permettent de passer des observations macroscopiques aux propriétés microscopiques des interactions (fondamentales) sont les suivants:

Références ¹¹

- *Totalitarian Principle*

From what we observe with massive particles, it would seem that any localized particle of finite mass should be unstable, since the decay into several smaller particles provides many more ways to distribute the energy, and thus would have higher entropy.

$$A \rightarrow C + D + ..$$

Some have adopted the description "totalitarian principle" for this situation. It might be stated as "every process that is not forbidden must occur". From this point of view, any decay process which is expected but not observed must be prevented from occurring by some conservation law. This approach has been fruitful in helping to determine the rules for particle decay.

- *Crossing Symmetry ($\sim CPT$)*

If a particle interaction

$$A + B \rightarrow C + D$$

is observed to occur, then related interactions can be anticipated from the fact that any of the particles can be replaced by its antiparticle on the other side of the interaction. This is commonly known as "crossing symmetry". The observation of the above interaction implies the existence of the following interactions.

$$A \rightarrow \bar{B} + C + D$$

$$A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$$

$$\bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B}$$

¹¹hyperphysics

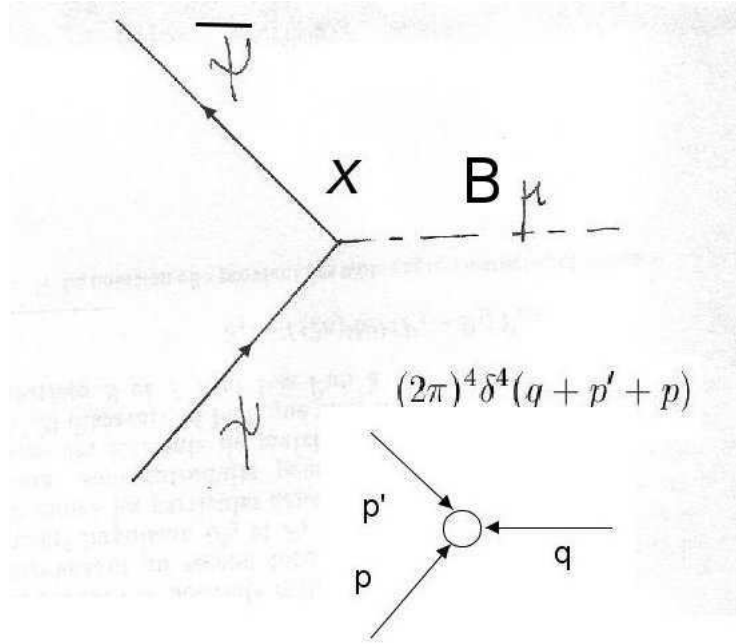


Figure 2: l'interaction dans les théories de jauge

- **Exemple**

$$\begin{aligned}
 n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_R \\
 CPT &\Rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_L \rightarrow \bar{n} \\
 crossing &\Rightarrow \nu_L + n \rightarrow p + e^- \\
 \mu^+ &\rightarrow \nu_L + e^+ + \bar{\nu}_R \\
 crossing &\Rightarrow \nu_L + e^- \rightarrow \nu_L + \mu^-
 \end{aligned}$$

- Des lois de conservation liées à des symétries quantiques de nature géométrique ou de nature structurelle (symétrie interne)

1. conservation de l'énergie-impulsion totale (invariance par translation dans l'espace temps)

$$p \not\rightarrow n + \pi^+$$

2. conservation de la parité du nombre de fermions (invariance par rotation)

$$n \not\rightarrow p + e^-$$

3. conservation des nombres quantiques internes (charges électriques ou autres charges...)

$$\begin{aligned}
 n &\not\rightarrow p + \gamma \\
 p &\not\rightarrow \pi^0 + e^+ \\
 \mu^- &\not\rightarrow e^- + \gamma
 \end{aligned}$$

- Théorie quantique des champs basée sur l'invariance de jauge des interactions (figure 2).
références (parmi beaucoup d'autres): [2] [1]

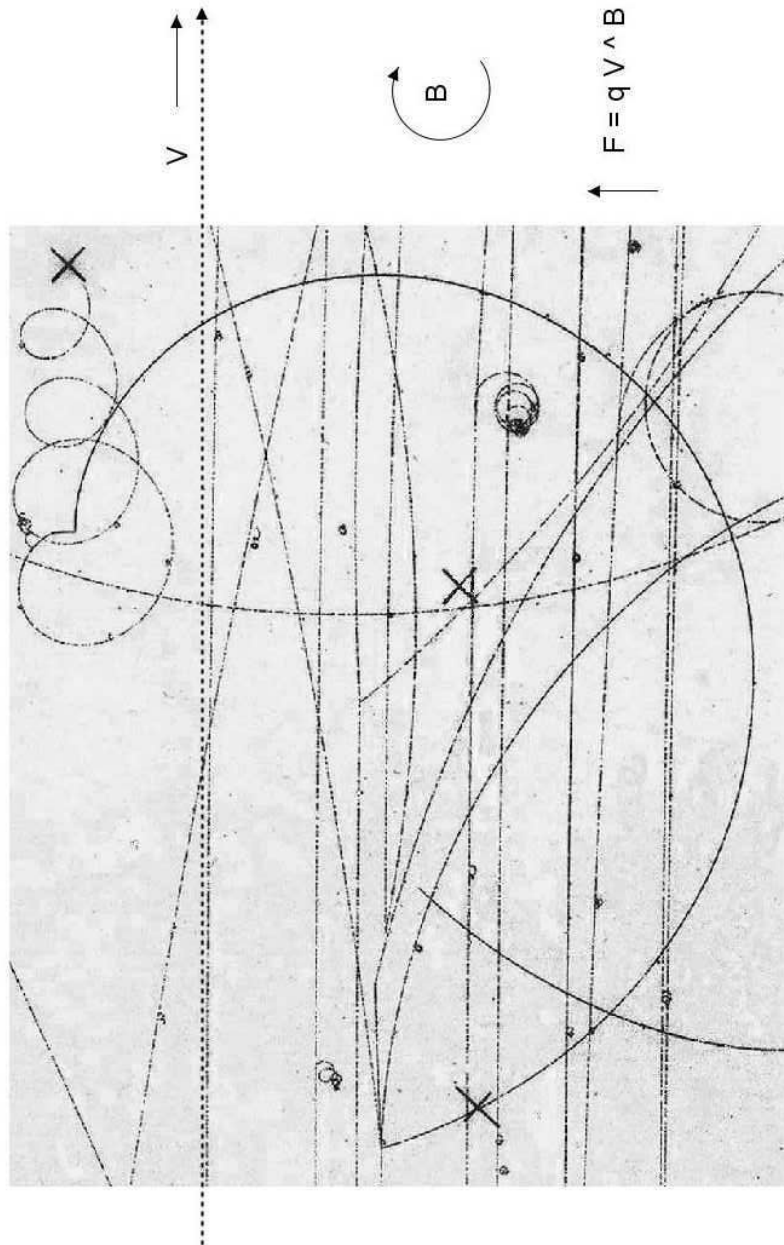


Figure 3: (**événement "réel"** / chambre à bulles à hydrogène)

Interprétation :

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^- + \pi^+ + K^+ + K^- \text{ avec } K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$$

ou

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + 2\pi^+ + 2\pi^- \text{ avec } \pi^- + p \text{ interaction élastique}$$

2 Les contraintes relativistes classiques

2.1 La dynamique covariante de la "force" de Minkowsky

- La particule apparaît comme un événement qui suit une trajectoire dans l'espace temps :

$$(x_0, x_i) = x_\mu$$

- L'intervalle de temps "propre" sur la trajectoire avec $c=1$

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt$$

soit

$$d\tau = \gamma^{-1} dt$$

- La 4-vitesse sur la trajectoire

$$V_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) : P_\mu = m V_\mu$$

- La loi dynamique (extension de la physique classique): équation 1

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu \quad (1)$$

Remarque : par construction $V^2 = 1$ et $P^2 = m^2$ se conserve au cours de l'accélération :

$$\mathcal{F}_\mu \cdot V^\mu = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_0 = \vec{\mathcal{F}} \vec{v}$$

Remarque : La masse m mesure l'inertie du point matériel car

$$\frac{dV_\mu}{d\tau} = m^{-1} F_\mu$$

Théorème de l'énergie cinétique : L'action de la force fait varier l'énergie

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0$$

2.2 La "force" électromagnétique de Lorentz.

- action d'un champ extérieur sur une charge

$$\mathcal{F}_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot V^\nu) \quad (2)$$

- avec le tenseur électromagnétique (6 composantes $\equiv \vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$):

$$A^\mu = (V(x), \vec{A}(x)) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\mathcal{E}^i = (F^{i0}) \quad \mathcal{B}^k = (-F^{ij}) \quad \text{si } \epsilon_{ijk} = 1$$

- formulation non covariante (dans le laboratoire)

$$\mathcal{F}^i = q(F^{i0} \cdot V^0 - F^{ij} \cdot V^j) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

3 Retour sur l'électrodynamique classique

3.1 La théorie classique de Maxwell-Faraday

Equations covariantes de Maxwell

1. Les sources du champ sont les charges **avec $c=1$ et $\epsilon_0 = \mu_0^{-1}$!**
équations de structure : (pas de monopoles)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [a] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathcal{E}) = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\mathcal{B}) = 0 \end{array} \right.$$

équations dépendantes des sources du champ : les charges électriques

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathcal{J}_\mu \quad [b] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathcal{D}) = \rho \\ \text{rot}(\mathcal{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Remarque : le courant est un mouvement de charges distribuées spatialement

$$\mathcal{J}_\mu = \rho V_\mu \sim q V_\mu \quad \text{pour une charge ponctuelle}$$

2. Les actions du champ sur les charges

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu = q (F_{\mu\nu} \cdot V^\nu) \quad [c] \quad (3)$$

3. L'invariance de jauge de l'électromagnétisme : le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ est invariant dans la transformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x)$$

où $f(x)$ est fonction arbitraire de l'espace.

L'antisymétrie du tenseur F induit la conservation de P^2 et donc de la masse.

4. La densité d'énergie associée à la présence du champ électromagnétique est ω avec

$$\mathcal{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{H}) \quad (4)$$

L'énergie électromagnétique se déplace et ce déplacement forme des ondes électromagnétiques dans le vide ; la densité de courant d'énergie ou vecteur de Poynting s'écrit :

$$(\text{quadri-vecteur courant d'énergie}) \quad \mathcal{J} = (\mathcal{W}(x), \mathcal{E} \wedge \mathcal{H}) \Rightarrow \quad \partial \mathcal{J} = 0 \quad (5)$$

5. L'intensité microscopique ($q = e$) de la force électromagnétique est caractérisée par une constante (de couplage) dite constante de structure fine α :

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137,0$$

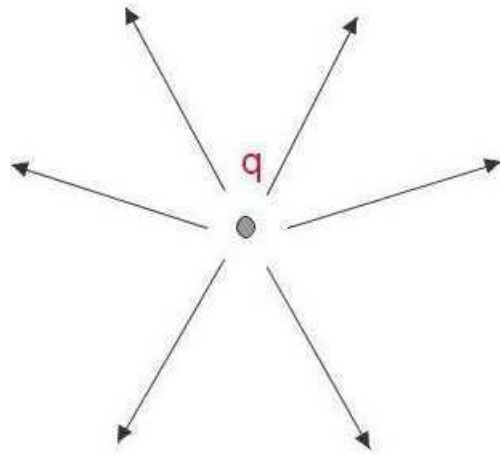


Figure 4: Le champ d'une charge ponctuelle

3.2 Application élémentaire aux charges ponctuelles stationnaires

3.2.1 Le cas d'une charge au repos

Il faut une énergie infinie pour créer un charge ponctuelle

$$\mathcal{W}_0 = \int_r^\infty \mathcal{W}(x) d^3x = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow \infty$$

Définition du rayon classique (électromagnétique) de l'électron ($q = e$)

$$\mathcal{W}_0 = mc^2 \Rightarrow r_e = \alpha \frac{\hbar}{mc} = 2,82 \cdot 10^{-15} m \quad (6)$$

- la longueur compton : $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3,86 \cdot 10^{-13} m$
- le rayon de Bohr : $a_0 = \alpha^{-1} \lambda_c = 0,53 \cdot 10^{-10} m$
- l'unité de rayon nucléaire : $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} m$

Remarque : Le champ électrique de la charge participe à son inertie car si elle est soumise à une accélération extérieure, la théorie classique prévoit qu'elle émet du rayonnement et donc qu'elle résiste à cette accélération !¹² Une particule chargée ne se réduit donc pas à un point de charge et de masse déterminées.

¹²cf Interactions relativistes : C.L. séminaire mars 2005

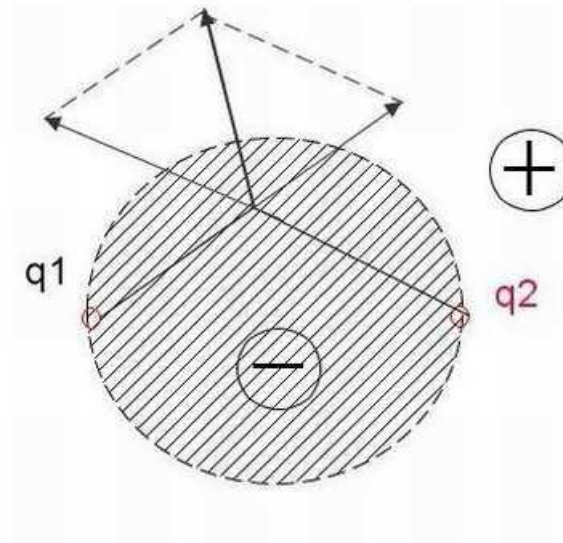


Figure 5: L'interaction de 2 charges ponctuelles, ici de même signe, est une propriété géométrique

3.2.2 L'interaction de deux charges statiques

a Le champ total est

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

b La densité d'énergie électrique ω est proportionnelle à

$$\propto \mathcal{E}^2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$$

c La densité d'énergie d'interaction est proportionnelle au produit $2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$, il existe dans l'espace des régions qui contribuent positivement et négativement. (analogie avec la liaison chimique!)

$$\mathcal{W}_{int}(x) \propto 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$$

d Quand les charges se déplacent l'énergie d'interaction varie.

e L'intégration dans tout l'espace de la densité d'énergie converge et donne l'énergie d'interaction électrique

$$\mathcal{W}_{int} = \int_r^\infty \mathcal{W}_{int} d^3x = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où r est la distance des charges

Rappel : La force de Coulomb peut se déduire de $\mathcal{W}_{int}$ (par variation) ; elle est attractive ou répulsive selon le signe de $q_1 q_2$

$$\vec{F}_{interaction} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

3.3 L'approche lagrangienne

La dynamique classique de l'interaction du champ et des charges peut s'exprimer sous une formulation lagrangienne relativiste ; il faut alors considérer les différents termes du lagrangien $\mathcal{L}$ et l'action associée:

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt$$

La dynamique est fixée en principe par $\mathcal{A}$ minimum entre un état initial et final physiquement acceptables.

Le lagrangien de la particule libre

$$\mathcal{L}_0 = -m\sqrt{1-v^2}$$

à la limite non-relativiste $\mathcal{L}_0$ devient

$$\mathcal{L}_0 = -m + \frac{m}{2}v^2$$

La masse apparaît comme une énergie potentielle ce qui est physiquement satisfaisant car on sait elle peut se convertir en énergie cinétique.

$$\mathcal{L}_0 dt = -md\tau$$

L'action est à un facteur près le temps propre de la particule libre ce qui est également assez naturel.

Le lagrangien du champ électromagnétique libre

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

exprimé en fonction des champs

$$\mathcal{L}'_0 = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{H})$$

Le lagrangien de l'interaction classique

$$\mathcal{L}_{int} = -A_\mu \mathcal{J}^\mu \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}^\mu = q V^\mu \quad V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (7)$$

explicitement :

$$\mathcal{L}_{int} = q \gamma (-V + \vec{A} \cdot \vec{v})$$

Le lagrangien total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}_{int}$$

Les équations de Lagrange - Euler avec $\mathcal{L}$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [a]$$

$$\epsilon_0 \partial^\nu F_{\nu\mu} = \mathcal{J}_\mu \quad [b] \quad \text{soit les équations de Maxwell}$$

$$m \frac{dV_\mu}{d\tau} = (F_{\mu\nu} \cdot \mathcal{J}^\nu) \quad [c]$$

4 L'électrodynamique quantique

4.1 L'électron dans un champ classique $\hbar = 1$

L'électron est représenté par un champ de spineurs (spin $1/2 \times 2$) de Dirac tel que

$$\psi(x)$$

$\psi(x)$ est la fonction d'onde quantique à laquelle est associée une densité de courant de charges électroniques ($q = e$)

$$\mathcal{J}_\mu = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Le champ électromagnétique est classique

$$A_\mu(x) \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

La densité de lagrangien dans l'espace temps est :

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(\gamma^\mu i \partial_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu \mathcal{J}_\mu \Rightarrow \mathcal{L}_{int}(x) = - A^\mu(x) \mathcal{J}_\mu(x) \quad (8)$$

et l'action devient

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) d^4x$$

4.2 Les interactions quantiques électron-photon

Mathematics ¹³

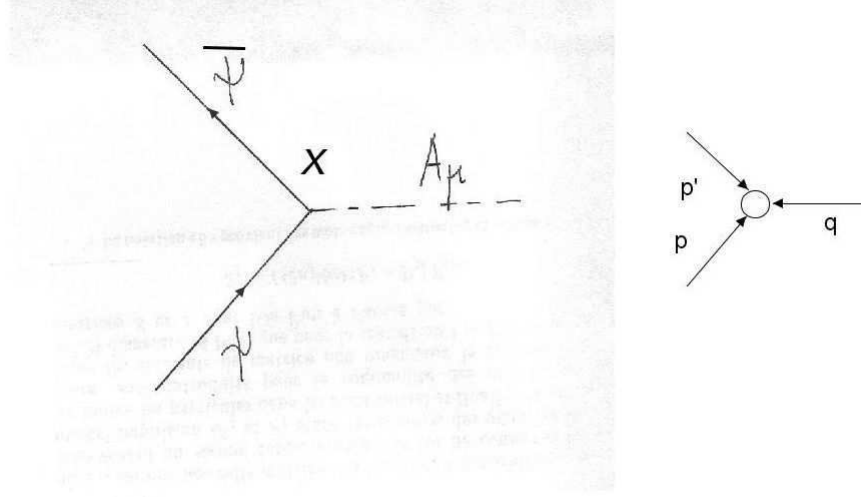
Mathematically, QED is an abelian gauge theory with the symmetry group $U(1)$. The gauge field, which mediates the interaction between the charged spin-1/2 fields, is the electromagnetic field. The QED Lagrangian for a spin-1/2 field interacting with the electromagnetic field is given by the real part of :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i D_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9)$$

where

- γ_μ are Dirac matrices;
- ψ a bispinor field of spin-1/2 particles (e.g. electron-positron field);
- $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$, called "psi-bar", is sometimes referred to as Dirac adjoint;
- $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ is the gauge covariant derivative;
- e is the coupling constant, equal to the electric charge of the bispinor field;
- A_μ is the covariant four-potential of the electromagnetic field;
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ is the electromagnetic field tensor.

¹³Quantum electrodynamics



$$S = \frac{-i}{\hbar} \int (2\pi)^4 \delta^4(q + p' + p) [A_F^\mu(q) \bar{\psi}_F(p') (-e \gamma_\mu) \psi_F(p)] d^4q d^4p d^4p'$$

Figure 6: L'électrodynamique à l'ordre 1

Euler-Lagrange equations¹⁴

Next, we can substitute this Lagrangian into the Euler-Lagrange equation of motion to find the field equations for QED.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = e\gamma_\mu A^\mu \psi. \quad (10)$$

The left-hand side is like the original Dirac equation and the right-hand side is the interaction with the electromagnetic field.

One further important equation is for the field, A_μ :

$$\epsilon_0 \partial_\nu F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \quad (11)$$

4.3 Principe d'interaction minimale (minimal coupling)

L'interaction électron-photon ($q \equiv e$) est construite en utilisant le principe d'interaction minimal appliqué au lagrangien libre

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow p'_\mu = i\partial_\mu - e A_\mu$$

$$\text{ou} \quad \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie A_\mu$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Ce terme du lagrangien est associé au graphe du 1er ordre de la figure 6; il s'agit de l'interaction fondamentale.

¹⁴Quantum electrodynamics

4.4 La mécanique ondulatoire et la moindre action¹⁴

Rappel ¹⁵ : Le principe de moindre action pour une particule ponctuelle dans un potentiel classique s'exprime par :

$$\mathcal{L} = \frac{m v^2}{2} - V(x) = \vec{p} \cdot \vec{v} - E \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{min} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} \mathcal{L} dt$$

$$\mathcal{L} dt = (\vec{p} d\vec{x} - E dt)$$

L'action est sans dimension ! $\mathcal{A}$ pourrait être la phase l'onde quantique si on associait le principe de moindre action avec la dynamique quantique de la particule :

$$\psi \propto \exp(+i\mathcal{A}) \psi_0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{\hbar} \int_{min} \mathcal{L} dt \quad (12)$$

L'intégrale sur les chemins de Feynman est définie dans ce contexte.

4.5 Introduction à la dynamique quantique : QED etc ...

- Amplitude de diffusion :

" Le problème des collisions se présente sous la forme générale suivante : connaissant l'état initial d'un système (un certain ensemble de particules libres), calculer la probabilité de divers états finals possibles (d'autres ensembles de particules libres). Si le symbole $|i\rangle$ désigne l'état initial, le résultat de la collision peut être représenté par une superposition quantique

$$\sum_f |f\rangle \langle f| S |i\rangle$$

où la somme est étendue aux divers états finals possibles. Les coefficients de ce développement $\langle f|S|i\rangle$ constituent, en principe, une matrice que l'on appelle matrice de diffusion ou matrice S (pour scattering). Les carrés $|S_{fi}|^2$ donnent les probabilités de transition vers des états $|f\rangle$ déterminés

- Dans la littérature, il existe de nombreuses écritures plus ou moins formelles de l'opérateur S. Elles conduisent à ce qu'il est convenu d'appeler les règles de Feynman qui permettent de calculer les amplitudes S_{fi} dans certains cas simples. Formellement on écrit :

$$S = \exp \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}(x) d^4x \quad (13)$$

- par exemple avec QED et l'interaction au premier ordre

$$S = \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4x = \frac{-i}{\hbar} \int [-e A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)] d^4x$$

Par transformation de Fourier $f(x) = \int \exp -ipx f_F(p) d^4p$ l'amplitude s'écrit

$$S = \frac{-i}{\hbar} \int (2\pi)^4 \delta^4(q + p' + p) [A_F^\mu(q) \bar{\psi}_F(p') (-e \gamma_\mu) \psi_F(p)] d^4q d^4p d^4p'$$

¹⁵ Interactions relativistes : C.L. séminaire mars 2005

6.17 Summary of the Feynman rules for QED 149

TABLE 6.2
Feynman Rules for $-i\mathcal{M}$

		Multiplicative Factor
External Lines		
Spin 0 boson (or antiboson)		1
Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)		$u, \bar{u}$
antifermion (in, out)		$\bar{v}, v$
Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$
Internal Lines—Propagators (need $+i\epsilon$ prescription)		
Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Spin $\frac{1}{2}$ fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
Vertex Factors		
Photon—spin 0 (charge $-e$)		$ie(p + p')^\mu$
Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k/(2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices

Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+

Figure 7: Les règles de Feynman pour QED (avec certaines conventions)

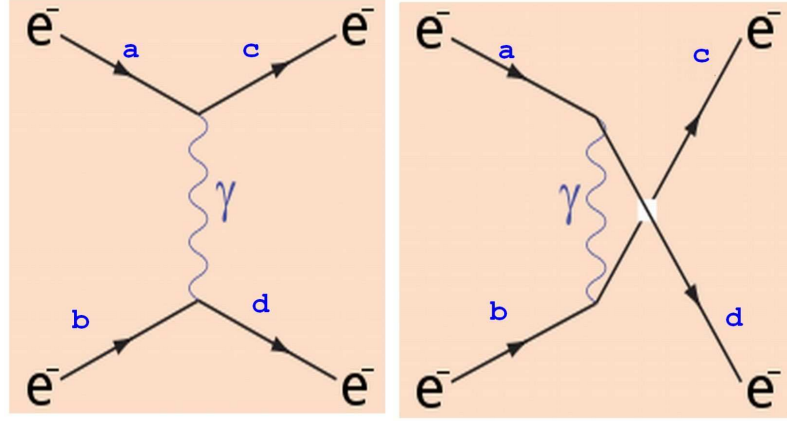


Figure 8: Les règles de Feynman pour la diffusion Moeller

4.6 Quelques justifications pour les règles de Feynman

4.6.1 Les particules observables (réelles) dans l'état final et initial

Elles sont détectées dans un état libre de toute interaction ; elles obéissent donc aux équations libres qui sera l'équation de Dirac pour les fermions et l'équation de Klein-Gordon pour les bosons :

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \rightarrow u \bar{u} \bar{v} v$$

4.6.2 Les particules (virtuelles) qui interviennent "pendant" l'interaction

Le propagateur des particules virtuelles $G(p)$ vérifie l'équation ci-dessous dans l'espace des impulsions :

$$(\not{p} - m) G(p) = 1 \text{ soit } G(p) = (\not{p} - m)^{-1} = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)}$$

On intègre sur les états p des particules virtuelles, par exemple sur les impulsions.

$$\int d^4p$$

4.6.3 Les points d'interaction

Pour l'électrodynamique la contribution sera :

$$-e \gamma_\mu \delta^4(p_1 + p_2 + \dots)$$

4.6.4 Application à la diffusion Moeller soit $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

$a + b \rightarrow c + d$ voir figure 8

$$S = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) (A_1 + A_2)$$

$$A_1 = (-e \bar{u}(c) \gamma_\mu u(a)) \frac{-g^{\mu\nu}}{(p_a - p_c)^2} (-e \bar{u}(d) \gamma_\nu u(b)) \quad A_2 = -(-e \bar{u}(d) \gamma_\mu u(a)) \frac{-g^{\mu\nu}}{(p_a - p_d)^2} (-e \bar{u}(c) \gamma_\nu u(b))$$

4.7 L'invariance de jauge en QED

Notations : avec $\epsilon_0 = 1$ et $e \equiv q = -|e|$

• Le lagrangien complet de l'électrodynamique avec **des champs relativistes** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ s'écrit :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \sum \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial - eA)^\mu - m \} \psi(x) \quad (14)$$

La transformation de jauge quantique agit sur la phase des champs de fermions et laisse la dynamique invariante en profitant de l'invariance de jauge du champ électromagnétique.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp -ie\alpha(x) \cdot \psi(x)$$

$$P_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu + e \partial_\mu \alpha(x) \quad \mathcal{L}_{int}(x) = -e A^\mu(x) \cdot \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad : \quad F_{\mu\nu} \text{ invariant}$$

Remarque 1 : La dynamique lagrangienne (équations de Lagrange-Euler) est également invariante dans cette transformation.

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = \mathcal{J}_\nu(x) = e \bar{\psi} \gamma_\nu \psi(x) \quad (15)$$

$$\{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - m) \} \psi(x) = -e A_\mu(x) \psi(x)$$

Remarque 2 : Si la fonction α est constante, la transformation de jauge est dite globale. Si la fonction α est, par exemple, linéaire $\alpha(x) = k_\mu x^\mu$ alors,

$$P_\mu \rightarrow P_\mu + e k_\mu$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + k_\mu$$

Remarque 3 : La transformation de phase **locale** sur ψ engendre un groupe de transformations unitaires continu commutatif agissant sur les champs de particules chargées.

$$U = \exp(-ie \alpha) \quad \alpha(x) \text{ fonction de l'espace}$$

L'existence de cette symétrie est associée à certaines propriétés

1. la conservation de la charge électrique.
2. la renormalisation de QED, c'est à dire la validité de QED à tous les ordres.
3. Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = \sum e_i$, c'est une matrice diagonale dans l'espace des fermions. Les valeurs propres sont par exemple 0 pour le neutrino et $e < 0$ pour l'électron.

$$U = \exp(-iQ \alpha(x))$$

4. Ces propriétés ont été généralisées en 1971 par Veltman et t'Hooft (prix nobel 1999) et appliquées au modèle de Weinberg¹⁶ (prix nobel 1979) qui unifiait antérieurement l'interaction électrofaible (modèle de Weinberg-Salam).

¹⁶ A theory of leptons, Physical Review Letters, 13, 321-322 (1964)

5 La théorie électrofaible de Weinberg-Salam

5.1 L'invariance de jauge électrofaible, les constantes g g'

1. Pour respecter les propriétés expérimentales de l'interaction faible, il est possible d'introduire une transformation de jauge non-abélienne basée sur les groupes unitaires SU2 et U1 agissant sur les fermions. Les générateurs de ce groupe sont :
 - (a) l'hypercharge faible Y une matrice diagonale qui agira sur les fermions de la théorie. Les fermions seront des états propres de l'hypercharge¹⁷.
 - (b) les trois générateurs de SU2, $\vec{T}_j$ avec $j = 1, 3$, qui agiront sur des doublets de fermions.
2. le choix des sous-espaces de fermions sera dicté par les contraintes expérimentales imposées par les propriétés connues des interactions.
3. La transformation de jauge du groupe s'écrira :

$$SU(2) \sim \exp(-i g T_j \alpha_j(x)) \otimes U(1) \sim \exp(-i g' Y \beta(x)) \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -g \vec{W}^\mu(x) \cdot \bar{\psi} \vec{T} \gamma_\mu \psi(x) - g' B^\mu(x) \cdot \bar{\psi} Y \gamma_\mu \psi(x) \quad (17)$$

où α_j et β sont des fonctions à valeurs réelles.

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ν_L	1/2	-1/2	0
e_L	-1/2	-1/2	-1
e_R	0	-1	-1

Table 3: Le groupe de jauge du modèle standard

4. L'opérateur de charge électrique est alors nécessairement une combinaison de T_3 et Y et la valeur e de la charge élémentaire s'exprimera en fonction de g et g' .
5. Pour respecter le principe d'invariance de jauge, à chaque générateur du groupe sera associé un boson vectoriel :

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \vec{W}_\mu(x) \cdot \vec{T} - g' B_\mu(x) \cdot Y$$

$$\vec{T} \rightarrow \vec{W} \quad Y \rightarrow B$$

Finalement trois bosons pour l'interaction faible et un boson pour l'électromagnétique seront nécessaires pour satisfaire à l'expérience ($W^\pm$, Z , γ) (voir figure 9).

6. Les bosons $W^\pm$ Z devront être massifs pour expliquer que l'interaction qu'ils engendrent est très faible à basse énergie ($E \sim 1\text{GeV}$) tandis que le photon sera de masse nulle.

$$M_W, M_Z \sim 80 \text{ GeV} \quad M_\gamma = 0$$

¹⁷ Notre définition de l'hypercharge se distingue de la définition historique par un facteur 2, ainsi la relation qui définit la charge électrique s'écrit traditionnellement $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ et les valeurs propres sont alors 0 ou -2

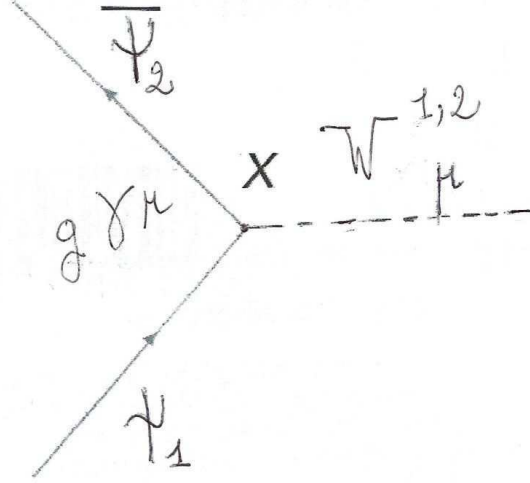


Figure 9: L'électrofaible à l'ordre 1

5.2 Les ondes de bosons vectoriels massifs

Le lagrangien libre pour Les bosons neutres peut être construit à partir de l'électromagnétisme en introduisant un terme de masse.

Si le boson B interagit avec une source $\mathcal{J}(x)$, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - \mathcal{J}_\mu(x) B^\mu \quad (18)$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ m est la masse

L'équation dynamique de Lagrange pour le boson B est **l'équation de A. Proca** introduite dans les années 50 pour rendre compte de l'interaction forte sur le modèle de l'électromagnétisme ¹⁸ :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 B_\nu - \partial^\mu \partial_\nu B_\mu = -m^2 B_\nu + \mathcal{J}_\nu \quad (19)$$

Le champ du boson B en présence de la source vérifiera :

$$(\partial^2 + m^2) B_\nu - \partial_\nu \partial^\mu B_\mu = \mathcal{J}_\nu \Rightarrow (\square - m^2) B_\nu + \partial_\nu (\partial^\mu B_\mu) = -\mathcal{J}_\nu$$

Par transformation de Fourier, le propagateur du boson **libre** s'écrira :

$$((p^2 - m^2)g^{\nu\mu} - p^\mu p^\nu)^{-1} = \frac{1}{(p^2 - m^2)} \left(g_{\nu\mu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \text{ avec } i\partial_\mu = p_\mu$$

- L'interaction du champ de bosons et du courant $\mathcal{J}$ en x est locale et doit permettre une émission ou une absorption quantifiée de bosons d'énergie et d'impulsion déterminées. En dérivant l'équation 19 par ∂_ν , on montre que le champ B vérifie **la condition de Lorentz** pourvu qu'il soit massif $m > 0$ et que le courant $\mathcal{J}$ soit conservé

$$m^2 \partial^\nu B_\nu = \partial^\nu \mathcal{J}_\nu = 0 \Rightarrow (\square - m^2) B_\nu = -\mathcal{J}_\nu \quad (20)$$

- Pour Les bosons $\vec{W}$, en introduisant un terme de masse (m) et une interaction avec une source $\mathcal{J}$ le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}) + \frac{m^2}{2} \vec{W}_\mu \vec{W}^\mu - \vec{\mathcal{J}}_\mu(x) \vec{W}^\mu \quad \text{avec } \vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g \vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu$$

A cause du terme de masse les lagrangiens ci-dessus ne sont pas invariants dans une transformation de jauge !

¹⁸Proca

5.3 La transformation de jauge dans les théories de Yang-Mills (1954)

5.3.1 Propriétés attendues du groupe de jauge

Il s'agit d'une transformation linéaire continue éventuellement unitaire dans l'espace des fermions (spin 1/2), nous la noterons U . La transformation U sera dite locale car elle sera fonction de l'espace (continue dérivable). Cette transformation couple donc des propriétés internes (la nature des fermions) avec l'espace-temps relativiste.

Le groupe (de Lie) de transformations U sera caractérisé par ses générateurs T^a (avec $a = 1, \dots, n$) et son algèbre de Lie :

$$[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = i f_{abc} \mathbf{T}_c$$

Utilisant les conventions d'Einstein, on pourra écrire

$$U(\alpha(x)) = \exp(-ig T_a \alpha_a(x)) \quad (21)$$

La constante de couplage¹⁹ n'est pas indispensable à ce niveau mais simplifie l'écriture des équations finales.

Notation :

$$\tau(X) = T_a X_a \quad \text{et} \quad \not{X} = \gamma_\mu X^\mu$$

Au voisinage de l'identité, la transformation U sera linéaire en α

$$U(\alpha) = 1 - ig T_a \alpha_a + \dots = 1 - ig \tau(\alpha) + \dots$$

Remarque : pour SU2, on obtient les générateurs T_a en fonction des matrices de Pauli

$$T_a = \frac{1}{2} \sigma_a \quad \text{avec } a = 1, 2, 3 \quad \sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \sigma_c \quad [T_a, T_b] = i \epsilon_{abc} T_c \quad f_{abc} = \epsilon_{abc}$$

5.3.2 L'invariance de jauge et la dynamique des fermions

Le lagrangien libre des fermions de spin 1/2 est construit pour conduire à l'équation de Dirac.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{P} - m)\psi(x) \quad P_\mu = i\partial_\mu \quad (22)$$

En interaction avec les fermions nous introduisons des bosons vectoriels en nombre égal au nombre de générateur du groupe d'invariance soit $B_{a\mu}$. Le lagrangien d'interaction est construit selon le *principe d'interaction minimale*.

$$P_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \tau(B_\mu) \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{int} = -\bar{\psi}(g \tau(\not{B}))\psi(x) \quad (23)$$

Dans la transformation de jauge, les champs, spineurs et bosons, sont transformés mais la dynamique lagrangienne doit rester invariante. L'équation de Lagrange-Euler pour ces fermions en interaction avec les bosons s'écrit :

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = \mathcal{V}(x) \psi(x) = g \tau(\not{B})\psi(x)$$

L'invariance de jauge s'exprime par la stabilité de l'équation ci-dessous sous la transformation de jauge locale [21] avec $\alpha(x)$ une fonction quelconque de x :

$$(i \not{\partial} - m) U \psi(x) = g \tau(\not{B}') U \psi(x) \quad \text{avec} \quad U = \exp - i g \tau(\alpha)$$

¹⁹Le sens physique de g peut être perçu car l'effet du champ B sur $i\partial$ est d'autant plus important que g est grand

La condition d'invariance fixe la loi de transformation des bosons :

$$\begin{aligned} g \tau(\mathcal{B}') U &= g U \tau(\mathcal{B}) + [(i \not{\partial} - m), U] \\ \text{soit } \tau(\mathcal{B}') &= U \tau(\mathcal{B}) U^{-1} + g^{-1} [i \not{\partial}, U] U^{-1} \end{aligned}$$

Au voisinage de l'identité, $\alpha \sim 0$ et $U = 1 - ig \tau(\alpha) + \dots$, cette condition implique :

$$\tau(\mathcal{B}') = \tau(\mathcal{B} + \not{\partial}\alpha) - \mathbf{i} \mathbf{g} [\tau(\alpha), \tau(\mathcal{B})]$$

Composante par composante on obtient

$$\mathbf{B}'_{\mu, \mathbf{a}} = \mathbf{B}_{\mu, \mathbf{a}} + \partial_\mu \alpha_{\mathbf{a}} + \mathbf{g} \mathbf{f}_{\mathbf{abc}} \alpha_{\mathbf{b}} \mathbf{B}_{\mu, \mathbf{c}}$$

Pour SU2, $a = 1, 2, 3$:

$$\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + \partial_\mu \vec{\alpha} + g \vec{\alpha} \wedge \vec{B}_\mu$$

En résumé, dans la théorie de Yang-Mills, les interactions des fermions et des bosons sont du type de celles présentées sur le graphe de la figure 2. Les bosons vectoriels ($B_{\mu a}$) interagissent avec des fermions de spin 1/2 (ψ) en tout point de l'espace.

Les interactions sont décrites par un lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_{int}$ faisant apparaître un courant de fermions :

$$\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{J}_{\mu a} B^{\mu a} \equiv \text{graphe figure 2} \quad \mathcal{J}_{\mu a} = g \bar{\psi} \gamma_\mu T_a \psi(x)$$

Elles ne dépendent que d'une seule constante de couplage g ; les intensités relatives des différents processus possibles, voire les règles de sélection, sont fixées par les générateurs T_a du groupe d'invariance choisi (exemple SU2).

Question Ce courant est-il toujours conservé ?

5.3.3 Le tenseur bosonique

Il reste à construire le lagrangien des bosons sur le modèle de l'électrodynamique. En électrodynamique, le lagrangien libre ne dépend que d'un tenseur d'ordre deux $F_{\mu\nu}$ construit par dérivation du champ A_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \dots \quad (24)$$

Revenons sur le principe d'interaction minimal qui transforme l'opérateur d'impulsion en présence d'un champ bosonique ; il permet une expression particulièrement simple du tenseur électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = i e^{-1} [P_\mu, P_\nu] \quad \text{avec} \quad P_\mu = i \partial_\mu - e A_\mu$$

On peut admettre sa généralisation aux interactions de jauge avec $\mathbf{P}_\mu = \mathbf{i} \partial_\mu - \mathbf{g} \tau(\mathbf{B}_\mu)$:

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{i} \mathbf{g}^{-1} [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_\nu]$$

fermions libres ... $F_{\mu\nu} = 0$

avec l'électromagnétisme $A_\nu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

avec un champ bosonique $B_{\mu a}$

$$\tau(G_{\mu\nu}) = \tau(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) + ig [\tau(B_\mu), \tau(B_\nu)]$$

Soit

$$\tau(G_{\mu\nu}) = \tau_a (\partial_\mu B_{\nu a} - \partial_\nu B_{\mu a} - g f_{abc} B_{\mu b} B_{\nu c})$$

Remarque : pour SU2, on obtient

$$\tau(G_{\mu\nu}) = \vec{T} \cdot (\partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu - g \vec{B}_\mu \wedge \vec{B}_\nu)$$

5.3.4 L'invariance de jauge et la dynamique des bosons

Le lagrangien doit être un "nombre" pour conduire à un principe de moindre action, le tenseur $G_{\mu\nu}$ est un opérateur dans l'espace de la transformation de jauge ; pour généraliser l'électromagnétisme on admettra le lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{trace} (\tau(G^{\mu\nu})^+ \tau(G_{\mu\nu})) + \dots \quad (25)$$

Le monde des bosons est donc plus complexe que celui des fermions car le lagrangien libre ci-dessus fait naturellement apparaître des self-interactions à 2, 3 et 4 bosons (figure 10) qui feront que, par exemple, un boson pourra se transformer en 2 ou 3 autres bosons en respectant les règles de conservation. **D'autre part, la présence de termes de masse dans le lagrangien ci-dessus brise l'invariance de jauge !**

5.3.5 L'invariance de jauge du lagrangien bosonique

Nous avons montré au paragraphe 5.3.2 que la dynamique des fermions était invariante, il reste à vérifier que le lagrangien des bosons est lui-même invariant.

Transformation des champs et tenseurs bosoniques

- Pour les champs au premier ordre en α on a vu que (paragraphe 5.3.2) :

$$\tau(\mathbf{B}') = \tau(\mathbf{B} + \not{\partial}\alpha) - \mathbf{i} g [\tau(\alpha), \tau(\mathbf{B})]$$

- Pour les tenseurs on vérifiera aisément que :

$$\tau(G'_{\mu\nu}) = \tau(G_{\mu\nu}) - \mathbf{i} g [\tau(\alpha), \tau(G_{\mu\nu})] \sim U \tau(G_{\mu\nu}) U^{-1}$$

Dans ces conditions, il semble bien que le lagrangien bosonique (équation 25) soit invariant (c'est évident si U est unitaire).

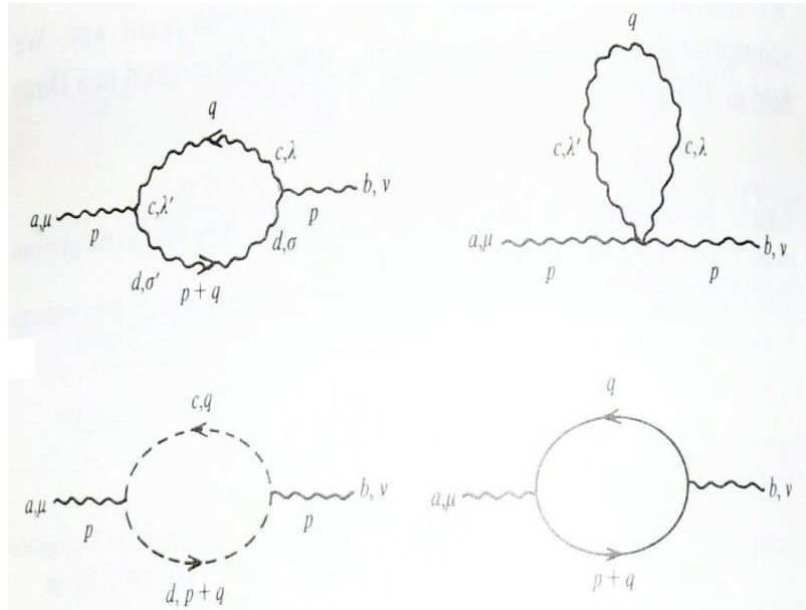


Figure 10: La self interaction des bosons de jauge

5.3.6 Le Lagrangien unifié des fermions et des bosons en interaction

Le lagrangien unifié est la somme des contributions présentées ci-dessus

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = -\frac{1}{4}\text{trace}(\tau(\mathbf{G}^{\mu\nu})^+\tau(\mathbf{G}_{\mu\nu})) + \bar{\psi}(\mathbf{x})(i \not{\partial} - \mathbf{m}) \psi(\mathbf{x}) - g \bar{\psi}(\mathbf{x})(\tau(\mathbf{B}))\psi(\mathbf{x})$$

$$\tau(\mathbf{G}_{\mu\nu}) = \tau(\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) + ig [\tau(\mathbf{B}_\mu), \tau(\mathbf{B}_\nu)]$$

$$\tau(\mathbf{B}) = \mathbf{T}_a \gamma^\mu \mathbf{B}_{\mu a}$$

(g est l'unique constante de couplage)

Ce type de construction participe à la recherche d'une **unification des interactions** dans la mesure où une grande variété de transitions entre particules élémentaires est regroupée dans le cadre d'un groupe de jauge avec un seul paramètre libre, la constante g .

5.4 Les choix de Weinberg-Salam (1967)

Pour respecter les propriétés connues des interactions faibles, Weinberg avait choisi dans sa publication de 1967, "a theory of leptons", deux groupes continus unitaires, $SU_{2L} \otimes U_1^{20}$.

- SU_2 , constante de couplage g , agissant sur un doublet de fermions gauches

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ avec } T_a = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ et } B_{\mu a} = (W_{\mu 1}, W_{\mu 2}, W_{\mu 3})$$

- U_1 , constante de couplage g' , agissant sur ce doublet et sur un singulet droit électronique

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \oplus \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ avec } T_a = Y \text{ et } B_{\mu a} = (B_\mu)$$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ν_L	1/2	-1/2	0
e_L	-1/2	-1/2	-1
e_R	0	-1	-1

Table 4: Le modèle Left & Right de Weinberg

Ce choix était justifié par la violation de parité par des interactions faibles et sa conservation par l'interaction électromagnétique.

L'interaction entre fermions et bosons est alors entièrement définie et sa confrontation avec l'expérience va demander environ 20 ans (il aura fallu au préalable étendre ce modèle aux hadrons ou plutôt aux quarks).

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}_L (-gT_a \not{W}_a - g'Y \not{B}) \psi_L + \bar{\psi}_R (-g'Y \not{B}) \psi_R$$

5.4.1 La question des courants neutres

Ce modèle prévoyait des interactions neutres des neutrinos mais celles-ci n'avaient pas encore été observées ; d'autre part les interactions électromagnétiques risquaient de violer la parité. Il était donc nécessaire, pour l'expérience, de redéfinir ces bosons en bosons "physiques" en attribuant des masses aux bosons et en brisant la symétrie initiale, la nature choisissant, pour ainsi dire, une solution ! :

réécrivons la partie diagonale de $\mathcal{L}_{int}$

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - g\{\mathcal{J}_3\}_L W_3 - g'\{\mathcal{J}_Y\} B$$

en explicitant les courants fermioniques droits et gauche :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{J}_3\}_L &= \bar{\psi}_L (T_3 \gamma) \psi_L \\ \{\mathcal{J}_Y\} &= \bar{\psi}_L (Y \gamma) \psi_L + \bar{\psi}_R (Y \gamma) \psi_R \end{aligned} \tag{26}$$

A la suite de Weinberg on effectue une rotation dans l'espace (W_3, B) qui brise la symétrie :

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ A \end{pmatrix}$$

²⁰ou peut-être $U_{2L} \otimes U_{1R}$? car les sous-espaces L et R seraient alors sur un pied d'égalité.

5.4.2 La partie électromagnétique

L'interaction électromagnétique devient (interaction avec A)

$$\mathcal{L}_{em} = \dots - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A (\{\mathcal{J}_{3L} + \mathcal{J}_Y\}) \quad \mathcal{J}_{em} = \{\mathcal{J}_{3L} + \mathcal{J}_Y\} \quad -e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} > 0$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{em} = \dots - |e| A \mathcal{J}_{em}}$$

en explicitant pour les leptons :

$$\mathcal{J}_{em} = \{(\bar{\nu}\nu)_L(\frac{1}{2}) + (\bar{e}e)_L(\frac{-1}{2}) + (\bar{\nu}\nu)_L(\frac{-1}{2}) + (\bar{e}e)_L(\frac{-1}{2}) + (\bar{e}e)_R(-1)\}$$

Soit

$$\mathcal{J}_{em} = -(\bar{e}e)$$

en clair

$$\mathcal{L}_{em}(x) = -e A_\mu \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) = -|e| A_\mu \mathcal{J}_{em}^\mu \quad (27)$$

L'interaction électromagnétique conserve la parité et le neutrino n'interagit pas avec le champ électromagnétique A . On obtient l'expression de la charge électronique dans ce modèle :

$$e = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} < 0 \quad (28)$$

5.4.3 La partie faible neutre

Le modèle prévoyait l'existence d'une interaction neutre (couplage au Z_0) des neutrinos qui a été découverte en 1973 par une expérience CERN conduite par le professeur A. Lagarrigue du LAL (Orsay). On peut écrire l'interaction du Z_0 explicitement comme cela a été fait pour l'interaction électromagnétique. En introduisant l'angle de Weinberg θ_W tel que :

$$\cos(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g'} \quad ; \quad \sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{|e|}{g} \quad (29)$$

en explicitant :

$$\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0 (\{\cos^2(\theta_W)\mathcal{J}_{3L} - \sin^2(\theta_W)\mathcal{J}_Y\})$$

Remarque : Le lien entre l'électromagnétisme et les interactions faibles neutres s'exprime conventionnellement par la relation ci-dessous :

$$\text{si } \{\mathcal{J}_Y\} = \{J_{em} - \mathcal{J}_{3L}\} \Rightarrow \{J_Z\} = \{\mathcal{J}_{3L} - \sin^2(\theta_W)\mathcal{J}_{em}\}$$

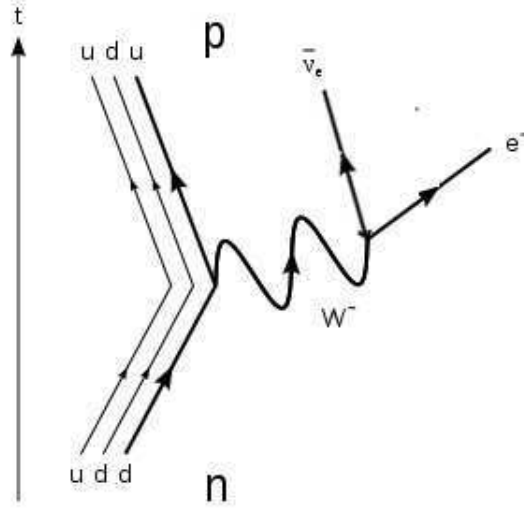
$$\boxed{\mathcal{L}_Z = \dots - \sqrt{g^2 + g'^2} Z_0 \mathcal{J}_Z}$$

en explicitant pour les leptons:

$$\mathcal{J}_Z = \left((\bar{\nu}\nu)_L(\frac{1}{2}) + (\bar{e}e)_L(\frac{-1}{2}) - \sin^2(\theta_W)(-\bar{e}e) \right)$$

en clair

$$\mathcal{L}_Z(x) = -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_{0\mu} \left(\bar{\nu}(x) \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu(x) + \bar{e}(x) \gamma^\mu \left(-\frac{1-\gamma_5}{2} - 2\sin^2(\theta_W) \right) e(x) \right) \quad (30)$$

Figure 11: la désintégration bêta au premier ordre $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

5.4.4 La partie faible chargée

Cette partie du Lagrangien d'interaction est due aux bosons "primaires" W_1 et W_2 qui sont responsables des désintégrations bêta (figure 11) soit :

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - g (\mathcal{J}_{1L} W_1 + \mathcal{J}_{2L} W_2)$$

que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{int} = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}_{+L} W_+ + \mathcal{J}_{-L} W_-)$$

$$T_+ = T_1 + iT_2 \quad T_- = T_1 - iT_2$$

avec

$$W_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - iW_2) \quad W_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + iW_2)$$

en explicitant pour les leptons :

$$\mathcal{J}_{+L}^\mu = \left(\bar{\nu}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e(x) \right) \quad \mathcal{J}_{-L}^\mu = \left(\bar{e}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu(x) \right)$$

en clair

$$\mathcal{L}_W(x) = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (W_+^\mu \mathcal{J}_{+L\mu} + W_-^\mu \mathcal{J}_{-L\mu}) \quad (31)$$

De ce résultat, il est possible de calculer une première estimation de la masse des W à partir de la durée de vie du neutron ²¹ : on trouve $M_W \sim 50 \text{ GeV}$ si g est choisi de l'ordre de $|e|$.

Plus précisément , on vérifie avec $\cos(\theta_C) = .974$ et les valeurs de la table 8 :

$$\frac{1}{\tau \times 10, 20} = \frac{G_\beta^2 m^5}{2\pi^3} = \left(\frac{g^4}{(4\pi)^3} \right) \frac{\cos^2(\theta_C) m^5}{M_W^4} = 1.109 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1} = 7,299 \cdot 10^{-26} \text{ MeV}$$

$$\tau = 884 \pm 10 \text{ sec expérimentalement } 887 \pm 2 \text{ sec}$$

²¹C. Longuemare : Interactions électro-faibles, janvier 2006

6 La particule de Higgs et les masses des bosons (1964)

A l'ensemble des constituants fondamentaux déjà introduits et expérimentalement fondés (fermions et bosons vectoriels) s'ajoute la particule de Higgs dont l'existence est essentiellement théorique.

la particule de Higgs est notée $\mathbf{H}^0$

C'est **un boson neutre et scalaire** qui, à travers une brisure de la symétrie de jauge, fait apparaître des termes de masse dans le lagrangien. Le mécanisme de Higgs-Kibble repris et appliqué par S. Weinberg au modèle électrofaible a permis une prédiction confirmée par l'expérience pour le rapport des masses des W et Z tout en laissant le boson A de masse nulle. C'est sans doute le grand succès de ce modèle qui relie ici des propriétés totalement indépendantes sur le plan expérimental.

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad M_A = 0 \quad tg(\theta_W) = \frac{g'}{g}$$

Si cette particule $\mathbf{H}^0$ peut être observée, elle doit être néanmoins rejetée en dehors du champ

	expériences
$\cos^2 \theta_W$	0,77
M_Z	91,19 GeV
M_W	80,40 GeV

Table 5: Les résultats expérimentaux : $\theta_W = 27,8^\circ$

d'expérimentation connu actuellement; plus précisément, sa masse doit être élevée, supérieure à 100 GeV. Ceci justifie la construction du LHC et des expériences qui y sont installées dont le coût doit se mesurer en milliards de francs-suisse (figure 1).

6.1 Le mécanisme de Higgs-Kibble

Considérons le cas étudié référence [1], page 326. Il s'agit de construire le lagrangien quantique et relativiste d'un boson scalaire chargé $\phi(x)$ sur lequel s'applique l'invariance de jauge électromagnétique U1

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + [(i\partial - eA)_\mu \phi]^+ [(i\partial - eA)^\mu \phi] - m^2 \phi^+ \phi(x) \quad (32)$$

avec $\phi = \phi_1 + i\phi_2$

La transformation de jauge équivaut à une rotation dans le plan complexe ϕ_1, ϕ_2

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp -ie\alpha(x) \cdot \phi(x) \quad (33)$$

La brisure de la symétrie consiste à postuler que l'action de ϕ sur le vide conduit à un état instable et que le champ physique du boson doit être redéfini :

$$\phi(x) = \eta(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (34)$$

La partie électromagnétique du lagrangien devient

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(e^2 v^2) A_\mu A^\mu + [\eta \dots] \quad (35)$$

Il apparaît dans ce lagrangien le terme $A_\mu A^\mu$ qui "donne" une masse au photon, cette masse vaut :

$$m_A = e^2 v^2$$

6.2 Le cas $SU2_L \otimes U1$

particule	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
ϕ^+	$1/2$	$+1/2$	1
ϕ^0	$-1/2$	$+1/2$	0

Table 6: Les bosons scalaires de Higgs-Weinberg

Suivant la lettre de Weinberg de 1967 (réf [3]) un boson scalaire est introduit dans la théorie, il appartient à un multiplet de l'isospin faible ($SU2$) ; l'hypothèse la plus simple est le doublet $\phi(x)$ d'isospin $1/2$:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad Q = T_3 + Y \quad (36)$$

Le lagrangien quantique relativiste pour ces bosons scalaires chargés sur lesquels s'applique l'invariance de jauge $SU2 \otimes U1$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(x) = \dots + | (i\partial - g T_a W_a - g' Y B)_\mu \phi |^2 - m_\phi^2 \phi^+ \phi + V(\phi) \quad (37)$$

En brisant la symétrie de telle sorte que

$$\phi(x) = \mathbf{H}^0(x) + \phi_0 \quad \text{avec } \phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \text{Cte !} \quad (38)$$

L'équation ci-dessus exprime le fait que le vide est instable en présence du champ ϕ car

$$\langle | \phi | \rangle = \phi_0 < | \rangle \neq 0$$

Les termes de masse des W_a, B sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dots + \frac{v^2}{2} | (-g T_a W_a - g' Y B)_\mu \phi_0 |^2 \quad \text{soit} \\ &= \dots + \frac{v^2}{8} | - \begin{pmatrix} gW_3 + g'B & g(W_1 - iW_2) \\ g(W_1 + iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |^2 \quad \text{soit} \\ \mathcal{L} &= \dots + \frac{v^2}{8} | (g(W_1 - iW_2)) |^2 + \frac{v^2}{8} | (gW_3 - g'B) |^2 + 0 \times | (g' W_3 + g B) |^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Il en résulte que, si à la suite de Weinberg on effectue une rotation dans l'espace des bosons neutres (W_3, B), les masses des quatre bosons vectoriels physiques sont fixées théoriquement (table 7).

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ +g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}$$

avec expérimentalement (grâce à la désintégration bêta) $v \sim 250 \text{ GeV}^{22}$

²²La dimension de v (au sens physique) est celle de ϕ , celle-ci est déterminée par celle du lagrangien $\mathcal{L} \sim m^2 \phi^2$ qui ne saurait être que E^4 car l'action $\int \mathcal{L} d^4x$ est une phase, un angle, dans le système d'unités où $\hbar = c = 1$, donc ϕ et v ont la dimension d'une énergie.

particule	masse
$W^\pm$	$(v/2) g$
Z^0	$(v/2) \sqrt{g^2 + g'^2}$
A	0

Table 7: Les masses des bosons vectoriels W Z

7 Conclusion

$$M_W/M_Z = g/\sqrt{g^2 + g'^2} = \cos \theta_W$$

La confrontation du modèle avec l'expérience a conduit à ce qu'il est convenu d'appeler le modèle standard (des particules) mais il a fallu de plus

- intégrer les hadrons par le biais des quarks qui sont des fermions de spin 1/2 et jouent le même rôle que les doublets électron-neutrino ; la dimension d'isospin faible peut porter par extension le nom de saveur. Le terme de saveur est aussi utilisé pour distinguer les différents types de leptons (électron-muon-tau et autres quarks) dont il n'a pas été question ici.
- y ajouter l'interaction forte avec QCD qui est aussi une théorie de jauge mais fondée sur SU3 (une théorie à 3 couleurs) : la dimension de l'isospin fort s'appelle la couleur. Les leptons doivent être considérés comme des singulets de couleur, les particules observables également car la couleur est un paramètre caché (les quarks n'ont jamais été observés directement).

En principe, la mécanique des interactions fondamentales est très simple mais les aspects quantiques demeurent mystérieux ; n'est-ce pas réconfortant ? Pour les valeurs numériques des constantes physiques , notre référence est le site du "particle data group"

Il existe beaucoup de très bons manuels sur la théorie quantique des champs et les théories de jauge, j'ai eu l'occasion de m'y référer antérieurement²³.

²³C. Longuemare , séminaires d'analyse du Imno : Interactions électro-faibles (janvier 2006), Le lambshift (mars 2006).

paramètre	modèle W& S	valeurs admises	fit exp. global (2000)
G_F	$G_F = g^2/4\sqrt{2}M_W^2$	$1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	
$\tilde{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}$		.7345	
$e = \sqrt{(4\pi\alpha)}$		0,303	0,30282
paramètre	-	prédiction	
θ_W	$\sin(2\theta_W) = 2 e/\tilde{g}$	$27,8^0$	$28,7^0$
v	$v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2}$	$246,3 \text{ GeV}$	
$\cos(\theta_W)$		0,8846	0,87683
g'	$g' = \tilde{g} \sin(\theta_W)$	0,3426	0,34536
g	$g = \tilde{g} \cos(\theta_W)$	0,6497	0,62983
$M_{W^\pm}$	$(v/2) g$	$80,00 \text{ GeV}$	$80,42 \text{ GeV}$
M_{Z^0}	$(v/2) \tilde{g}$	$91,56 \text{ GeV}$	$91,19 \text{ GeV}$
M_A	0	0	$< 2 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}$

Table 8: Les (principaux) paramètres du modèle avec

α électromagnétisme	G_β désintégration bêta	$\cos \theta_C$ particules étranges
1/137,036...	$1,1361.. \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	0,974..

$$G_\beta = G_F \cos(\theta_C)$$

References

- [1] F. Halzen & al. *{ Quarks and leptons }*. John Wiley, Inc., 1984.
- [2] S.J. Chang. *{ Introduction to Quantum Field Theory }*. World Scientific, Inc., 1990.
- [3] S. Weinberg. *{ A theory of leptons }*. Physical review letters, 13, 1967.