

Université de Caen

LMNO

Les bosons vectoriels dans les théories de jauge

C. LONGUEMARE

8 janvier 2013

Notations

$\mu = 0, 1, 2, 3$: indices de l'espace temps

$g_{\mu\nu} = +1 - 1 - 1 - 1$: tenseur métrique dans l'espace temps

$ds = \sqrt{dt^2 - dx_i^2}$ temps propre sur une trajectoire

γ_μ les matrices de Dirac

Les générateurs (hermitiens) d'un groupe de Lie seront notés T_a avec $a = 1, 2, \dots, p$

exemple : SU2, SU3 ...SU(n) $p = 3, 8, \dots, (n^2 - 1)$

L'algèbre de Lie et les constantes de structures f_{abc}

$$\tau(X) = T_a X_a \quad [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

Si l'on couple la symétrie interne (groupe de Lie) avec l'invariance de Lorentz :

$$\not{X} = \gamma_\mu Y^\mu \quad \tau(\not{X}) = \gamma_\mu T_a Y_a^\mu$$

Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp A \exp B = \exp \left\{ A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) \dots \right\}$$

A_μ	quadri-potentiel électromagnétique
P_ν	quadri-vecteur énergie-impulsion
q_ν	quadri-transfert dans une interaction
$F_{\nu\mu}$	tenseur électromagnétique
$\mathcal{E}$	le champ électrique
$\mathcal{B}$	le champ magnétique
$\mathcal{D}$	l'excitation électrique
$\mathcal{H}$	l'excitation magnétique
$\mathcal{J}$	la densité de courant
$\mathcal{F}$	Force relativiste de H. Minkowski
$\mathcal{A}$	l'action
A	l'amplitude quantique
$\mathcal{S}$	la matrice S
$\mathcal{L}(x)$	la densité lagrangienne
$\mathcal{H}$	l'espace de Hilbert
$\mathcal{H}(x)$	la densité hamiltonienne
$\mathcal{W}$	l'énergie
$\mathcal{W}(x)$	la densité d'énergie

Quarks*

symbole	Saveur	Masse	Charge
u	up	0.3	2/3
d	down	0.3	-1/3
c	charmé	1.5	2/3
s	étrange	0.5	-1/3
t	top	175.	2/3
b	bottom	5.	-1/3

Baryons et anti

Symbole	Nom	Composition	Charge	Masse	Spin
p	proton	uud	1	0.938	1/2
$\bar{p}$	anti-proton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1	0.938	1/2
n	neutron	udd	0	0.940	1/2
λ	lambda	uds	0	1.116	1/2
Δ	delta	uuu	+2	1.232	3/2
Ω	omega	sss	-1	1.672	3/2

*masse en GeV/c² et charge (électrique) en unité e

mésos $q_1\bar{q}_2$ et anti $q_2\bar{q}_1$

Symbole	Nom	Composition	Charge	Masse	Spin
π^0	pi-zéro	$u\bar{u} \text{ ..}$	0	0.135	0^-
ϕ	phi	$s\bar{s} \text{ ..}$	0	958.	1^-
Ψ	psi	$c\bar{c} \text{ ..}$	0	3097.	1^-
Υ	upsilon	$b\bar{b} \text{ ..}$	0	9460.	1^-
$\pi^\pm$	pion	$u\bar{d} \text{ , } d\bar{u}$	± 1	0.138	0^-
$K^\pm$	kaon	$u\bar{s} \text{ , } s\bar{u}$	± 1	493.	0^-
$K^0 \bar{K}^0$	K-zéro	$s\bar{d} \text{ , } d\bar{s}$	0	498.	0^-
$D^\pm$	kaon	$u\bar{c} \text{ , } c\bar{u}$	± 1	1869.	0^-
$D^0 \bar{D}^0$	D-zéro	$c\bar{d} \text{ , } d\bar{c}$	0	1864.	0^-
etc...					

Les bosons et les théories quantiques

	spin	exemples	champs	symétrie ou multiplet
photon	1	γ	A_μ	$U(1)$
bosons	1	$W \quad Z$	$W_\mu^\pm \quad Z_\mu$	$SU(2)$
higgs	0	H^0	ϕ_i	doublet $i = 1, 2$
fermions	$\frac{1}{2}$	$e^\pm \quad \nu \quad q \quad \bar{q}$	ψ	doublet - singulet - triplet
gluons	1	$g(a) \quad 1, ..8$	$g_{\mu a}$	$SU(3)$

L'interaction boson-fermion est construite selon le *principe d'interaction minimale*.

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \tau(X_\mu)$$

L'électromagnétisme de Maxwell (1865)

- L'électricité statique agit à l'échelle macroscopique : la force de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}$$

- Equations de Maxwell et émission des ondes électromagnétiques classiques

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- équations de structure : pas de monopoles magnétiques

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad [1]$$

- équations dépendantes des sources du champ : les charges électriques

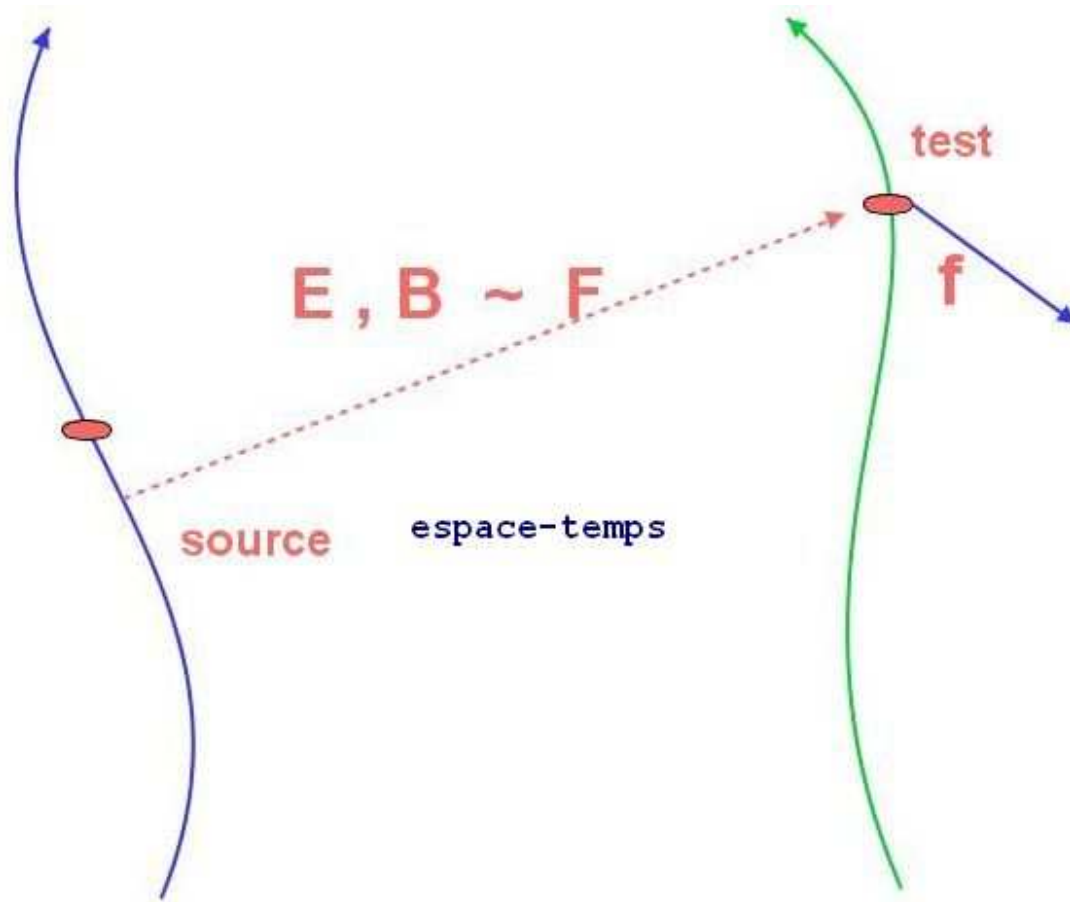
$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu \quad j_\mu \sim qV_\mu \quad [2]$$

Remarque : $F_{\mu\nu}$ antisymétrique implique la conservation de q et l'invariance de jauge

- L'action du champ sur des courants de charges (f_μ densité de force de Lorentz)

$$f_\mu = (F_{\mu\nu} j^\nu) \quad j^\nu \sim qV^\nu \quad [3]$$

- L'électricité et la lumière sont liés : même célérité (Maxwell - Faraday).



L'électromagnétisme comme interaction entre courants de charge (électrique)

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu \quad [2]$$

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu \quad [3] \quad (1)$$

$$j_\mu \sim qV_\mu$$

L'électro-dynamique quantique et le photon (1935)

- Pour une onde monochromatique , le photon est caractérisé par $E = \frac{h}{\nu}$ et $p = \frac{h}{\lambda}$ soit $E = c p$ et $m_\gamma = 0$
- Le lagrangien complet de l'électrodynamique de Maxwell, avec des champs ponctuels relativistes de spin 1/2 (équation de Dirac) et avec $\epsilon_0 = 1$ s'écrira :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi} \{ \gamma^\mu (i\partial - q A)_\mu - m \} \psi(x)$$

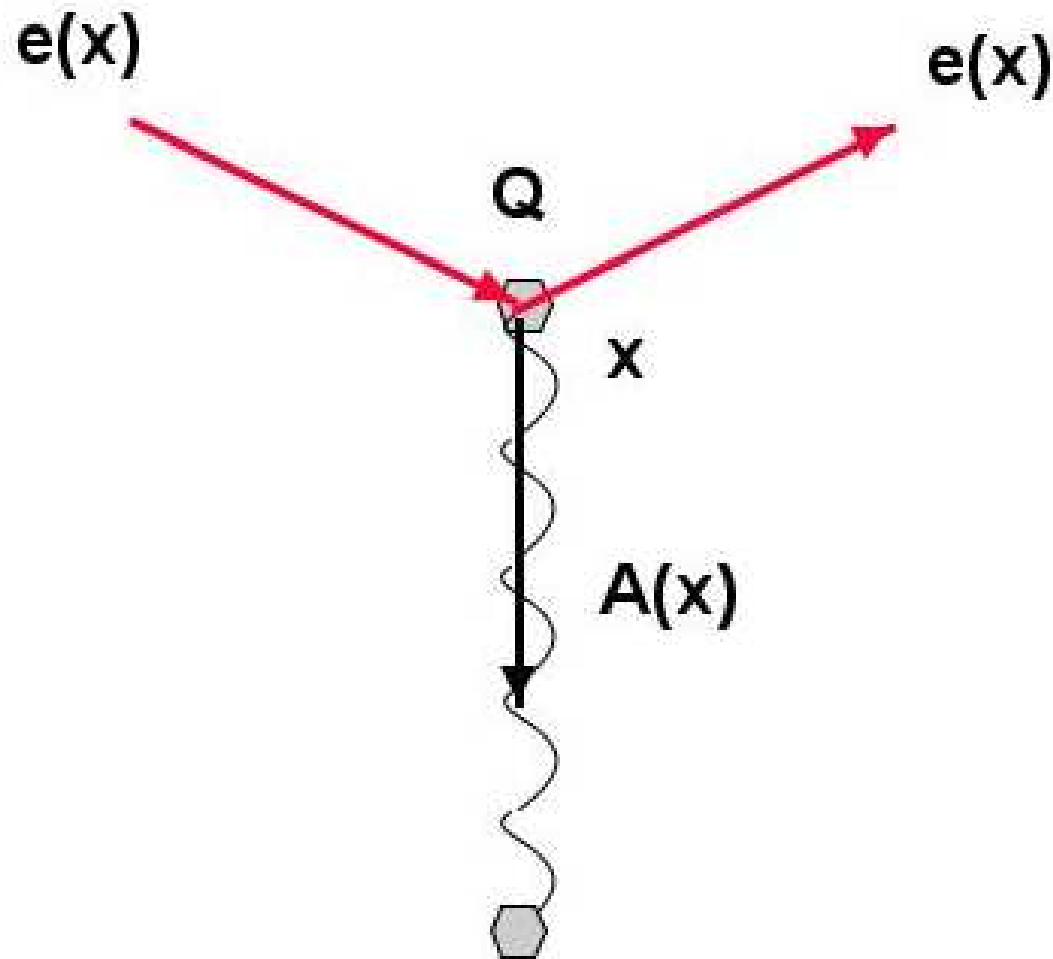
- La transformation de jauge de QED : $U(1)$ avec $\psi(x)$ et $A(x)$

$$\forall \alpha(x) \forall x \quad \begin{pmatrix} \psi \\ A_\mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(-i q \alpha) \psi \\ A_\mu + \partial_\mu \alpha \end{pmatrix}$$

- $F_{\mu\nu}(x)$ et $\mathcal{L}(x)$ sont invariants
- Les équations dynamiques pour les électrons et les photons (rayonnement et propagation)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = j_\nu = q \bar{\psi} \gamma_\nu \psi = \mathcal{S}_\nu(x)$$

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = q \gamma^\nu A_\nu \psi(x) = \mathcal{V} \psi(x)$$



$$\mathcal{L}(x) = \dots - q \bar{\psi}(\gamma^\mu A_\mu) \psi(x) \dots$$

Généralisation de l'invariance de jauge (le cas non-commutatif)

- Généralisation $U(\alpha)$: représentation d'un groupe de Lie (éventuellement unitaire)

$$U(\alpha) = \exp(-ig\tau(\alpha)) = 1 - ig\tau(\alpha) + O(\alpha^2)$$

avec $g \in R$ une constante (de couplage), positive, arbitraire (nulle?).

l'algèbre de Lie d'ordre p : T_a avec $a = 1, 2, \dots, p$

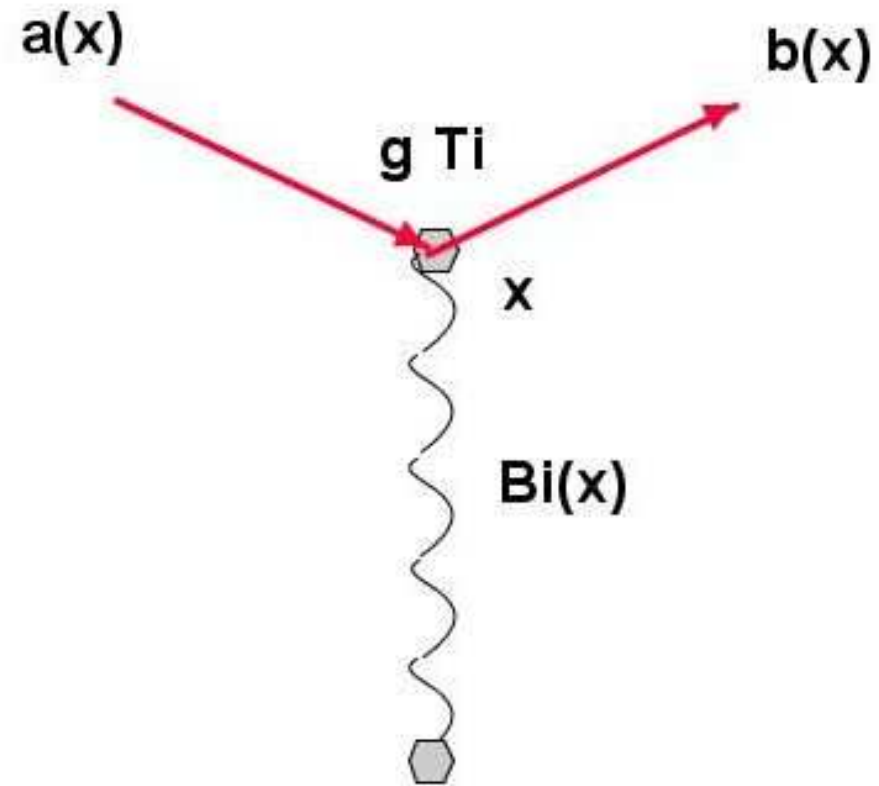
- **Les théories de Yang Mills** pour B^μ (p vecteurs), ψ (n-spinor 1/2) et U représenté par une matrice (n,n) dans l'espace ψ .

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} \text{Trace}\{\tau(G_{\mu\nu}) \cdot \tau(G^{\mu\nu})\}(x) + \bar{\psi}\{\gamma_\mu(i\partial^\mu - g\tau(B^\mu)) - m\}\psi(x) \quad (2)$$

- avec $\tau(G_{\mu\nu}) = \frac{i}{g} [i\partial_\mu - g\tau(B_\mu), i\partial_\nu - g\tau(B_\nu)]$

$$\text{soit} \quad \tau(G_{\mu\nu}) = \partial_\mu\tau(B_\nu) - \partial_\nu\tau(B_\mu) + ig [\tau(B_\mu), \tau(B_\nu)]$$

Les interactions des fermions avec les bosons



$$\mathcal{L}(x) = \dots - g \bar{\psi}_b(\gamma_\mu \tau(B^\mu)) \psi_a(x) \dots \quad (3)$$

L'invariance de jauge locale (1960-70)

- Transformation de jauge * : $U(\alpha) = \exp(-ig\tau(\alpha))$

$$\forall \alpha(\mathbf{x}) \quad \begin{pmatrix} \psi \\ (i\partial_\mu - g\tau(B_\mu)) \\ \tau(G_{\mu\nu}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U \psi \\ U (i\partial_\mu - g\tau(B_\mu)) U^{-1} \\ U \tau(G_{\mu\nu}) U^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\tau(B_\mu) \rightarrow U \tau(B_\mu) U^{-1} - g^{-1} U [i\partial_\mu, U^{-1}]$$

- au premier ordre en α

$$\begin{aligned} \tau(B_\mu) &\rightarrow \tau(B_\mu + \partial_\mu \alpha) - i g [\tau(\alpha), \tau(B_\mu)] \\ \tau(G_{\mu\nu}) &\rightarrow \tau(G_{\mu\nu}) - ig[\tau(\alpha), \tau(G_{\mu\nu})] + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}(x)$ est invariant en particulier

Trace $\{\tau(G_{\mu\nu}).\tau(G^{\mu\nu})\}$ est invariant !

- L'invariance de $\mathcal{L}(x)$ est préservée par l'absence de termes de masse.

m^2 Trace $\{\tau(B_\mu).\tau(B^\mu)\}$ qui n'est pas invariant !

*remarque $(1 - ig\tau(\alpha))A(1 + ig\tau(\alpha)) = A - ig[\tau(\alpha), A] + O(\alpha^2)$

- Equation de Lagrange-Euler (équation de Maxwell) pour les bosons $B_{\mu a}$

$$\partial^\nu \text{Trace}\{T_a \cdot \tau(G^{\mu\nu})\} = -g \bar{\psi} \gamma_\mu (T_a) \psi(x) - ig \text{Trace}\{[T_a, \tau(B_\nu)] \tau(G^{\mu\nu})\}$$

- Si $\text{Trace}\{T_a T_b\} = C_2 \delta_{ab}$ alors

$$\partial^\nu G_{\nu\mu a} - g f_{abc} B_{\nu b} G_c^{\mu\nu} = + \frac{g}{C_2} \bar{\psi} \gamma_\mu (T_a) \psi(x)$$

$$\text{avec } (G_{\mu\nu a}) = \partial_\mu (B_{\nu a}) - \partial_\nu (B_{\mu a}) - g f_{abc} (B_{\mu b}) (B_{\nu c})$$

1. **U1** : l'électro-dynamique (jauge commutative)

$$T = 1; p = 1; g = e; f = 0; C_2 = 1; B_{\nu a} = A_\nu$$

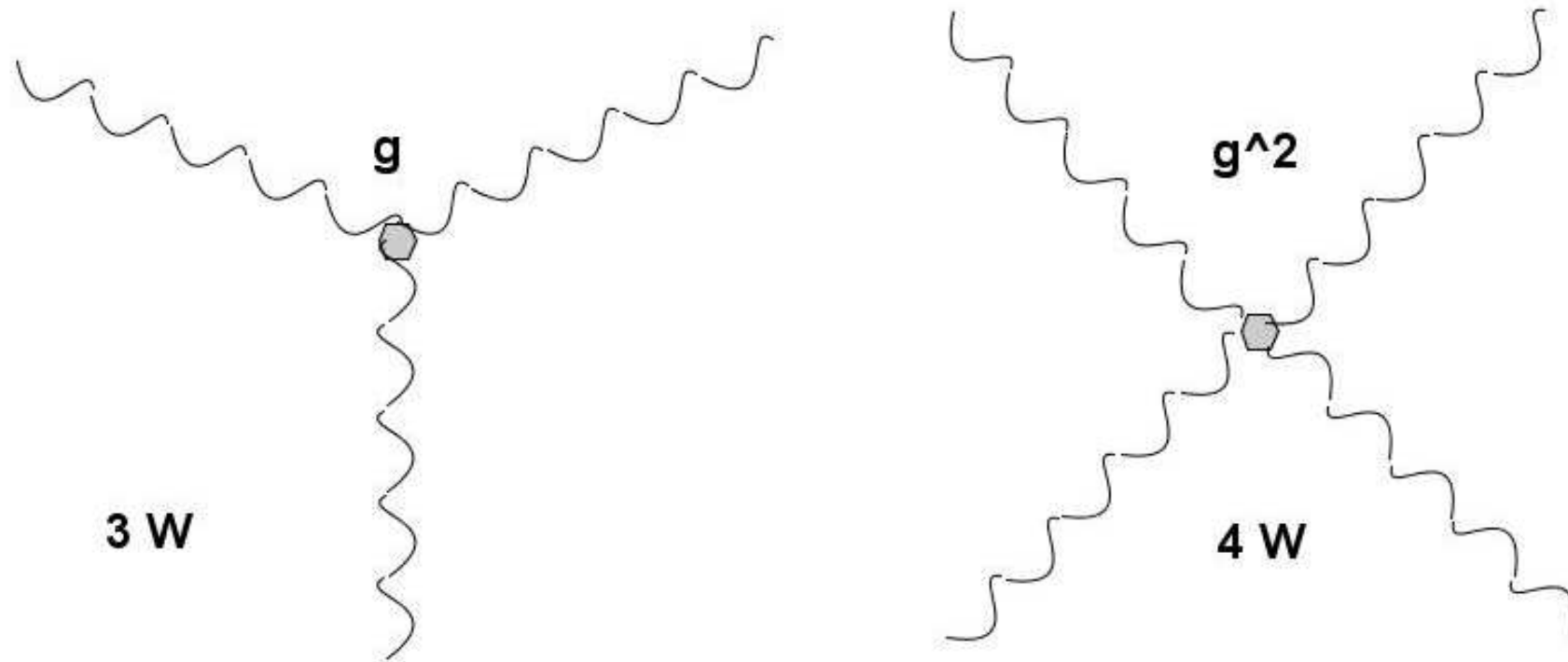
2. **SU2** : interaction faible (modèle de Weinberg)

$$T = \frac{1}{2} \sigma_a; p = 3; g \sim e; f = \epsilon_{abc}; C_2 = \frac{1}{2}; B_{\nu a} = W_{\nu\pm}, Z_\nu$$

3. **SU3** : interaction forte (chromodynamique D. Gross & F. Wilczek et al)

$$T = \frac{1}{2} \lambda_a; p = 8; g = \alpha_s; f = f_{abc}; C_2 = \frac{1}{2}; B_{\nu a} = g_{\nu a}$$

Les self-interactions des bosons (cas non commutatif)



$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} \text{Trace}\{\tau(G_{\mu\nu}).\tau(G^{\mu\nu})\}(x) + \dots \quad (4)$$

$$\text{avec } \tau(G_{\mu\nu}) = \tau(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) + ig [\tau(B_\mu), \tau(B_\nu)]$$

- Le groupe d'invariance est SU(3), l'ordre de l'algèbre est 8

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad a = 1, \dots, 8$$

- Les bosons associés sont noté g_a et appelés gluons , l'indice a est la couleur, les gluons sont sans masse.

$$B_{\mu a} \equiv g_{\mu a} \quad a = R, B, G$$

- "Evidences" expérimentales de la chromodynamique

le principe de Pauli appliqué aux systèmes qqq

comparaison du quarkonium $\bar{q}q$ et du positronium e^+e^- .

Exemples : $\bar{s}s$ $\bar{c}c$ $\bar{b}b$

le "potentiel" de couleur ?

$$V(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + a r \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \text{ et } a > 0$$

- la liberté asymptotique ($\sim$ hautes énergies)

Le confinement

- Les seules particules observables sont des singulets de couleur

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \epsilon_{ijk} |q_i q_j q_k\rangle \quad |M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \delta_{ij} |q_i \bar{q}_j\rangle$$

hadrons	dimension	décomposition	nbre Baryonique
q	3	3	1/3
$\bar{q}$	3	$\bar{3}$	1/3
$q\bar{q}$	9	$1 \oplus 8$	0
qq	9	$6 \oplus \bar{3}$	2/3
$qq\bar{q}$	27	$3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus 15$	1/3
qqq	27	$1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$	1
$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$	27	$1 \oplus \bar{8} \oplus \bar{8} \oplus \bar{10}$	-1
$qqqq$	81	$3 \oplus 3 + ..$	4/3

Seuls les singulets sont les structures observables à "distance macroscopique" : **Baryons, anti-baryons et mésons.**

- La couleur est confinée aux distances "quantiques", c'est une propriété virtuelle !

La liberté asymptotique

- Comptage des couleurs : avec la couleur la probabilité est $\times 3$

$$e^+ + e^- \rightarrow q_i + \bar{q}_i$$

- rayonnement de gluons (virtuels) dans certaines réactions : "bremstrahlung" de gluons

$$q \rightarrow q + g \quad \text{de 5 à 100 GeV}$$

- fusion de gluons : graphe dominant pour la production de higgs

$$g + g \rightarrow q + \bar{q}$$

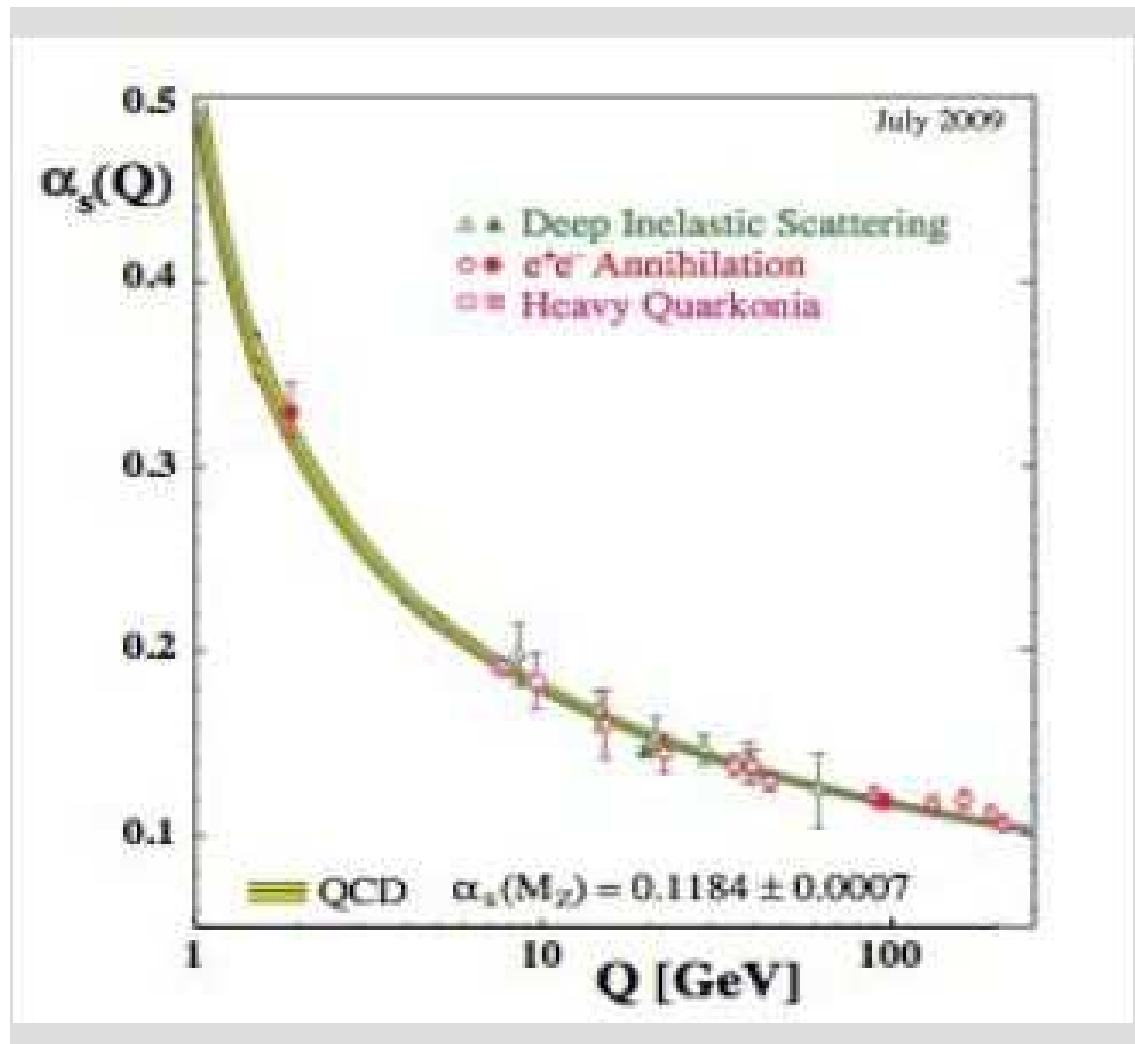
- Evolution des constantes de couplages avec l' énergie croissante

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\Lambda^2)}{1 + b \operatorname{Ln}(q^2/\Lambda^2)}$$

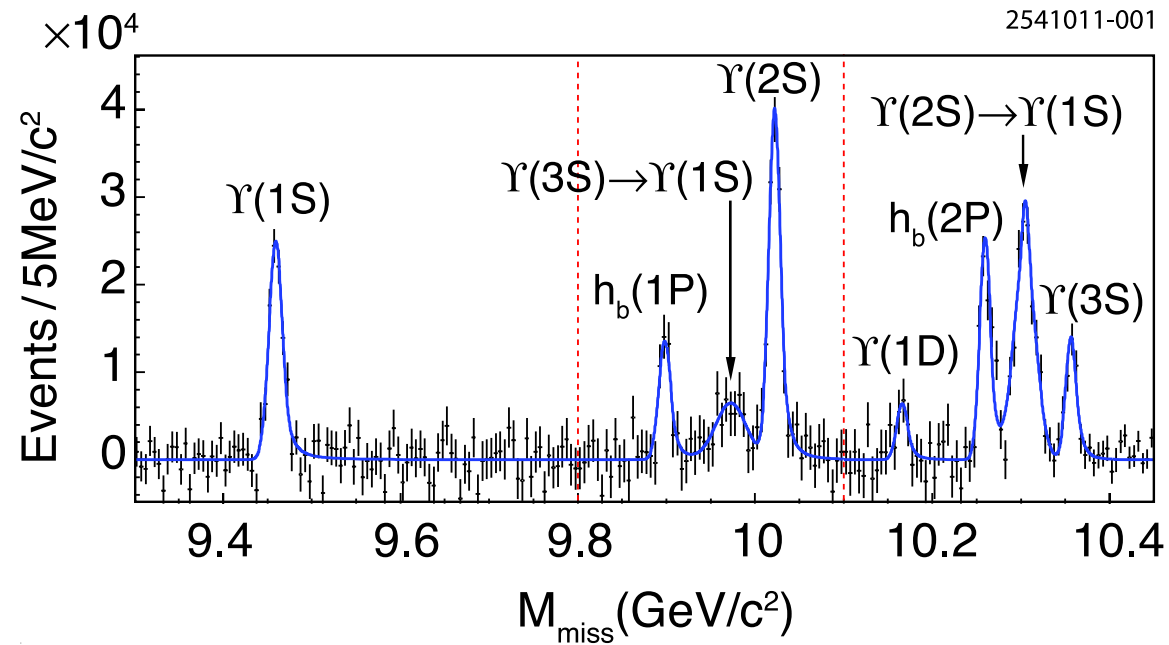
QED $b < 0$ $\alpha(q^2) \uparrow$ jusqu'au pôle.

QCD $b > 0$ $\alpha(q^2) \downarrow$ tend vers 0.

- QCD permet des prédictions perturbatives à haute énergie : renormalisation etc...



référence : O. Pène, LPT Orsay, SMAI(société de mathématiques appliquées et industrielles) 2011.



Spectroscopie du système $\bar{b}b$ (CLEO, Cornell, USA)

Conclusions

- QCD est un élément fondamental du modèle standard (nécessité de l'interaction forte).
- Pour autant , sa justification théorique reste très lourde (techniques de renormalisation ou de calcul sur réseau).
- L'algèbre de SU_3 permet de justifier le confinement si on admet que les particules "physiques" sont des singlets de la couleur.
- L'extrapolation à SU_5 reste une possibilité attrayante même si les tentatives des années 1980 ont conduit à un désaccord avec les expériences...à suivre.

références

-
- D. Gross & F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories*, Phys Review D8(3633), 1973.
- C. Itsykson & Zuber , *Quantum field theory*, Macgraw Hill Inc., 1980.
- E. Leader & al , *Gauge theories and the new physics* , Cambrideg UP., 1982.
- F. Halzen & al., *Quarks and leptons* , John Wiley Inc., 1984.
- L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambrideg UP., 1985.
- P. Renton, *Electroweak interactions*, Cambrideg UP., 1990.
- S.J. Chang, *Introduction to Quantum Field Theory*, World Scientific Inc., 1990.
- I. Aitchison & al. , *Gauge theories in particle physics*, Institute of Physics, 2004.
- S.S. Schweber, *Gauge theories in particle physics*, Dover publications , 2005.

Quelques propriétés de la physique des particules

T (s)	particule	J	mc^2	unités
$> 3, 10^{38}$ $> 3, 10^{31}$ $> 3, 10^{17}$ ∞	proton électron neutrino photon	$1/2$ $1/2$ $1/2$ 1	$938, 3$ $0, 511$ $< 10^{-3}$ 0	(MeV/c ²)
$886,$ $2, 2 \cdot 10^{-6}$ $2, 6 \cdot 10^{-8}$	neutron muon $\mu^\pm$ pion $\pi^\pm$	$1/2$ $1/2$ 0	$939, 6$ $105, 6$ $139, 6$	
$2, 0 \cdot 10^{-22} *$ $2, 6 \cdot 10^{-25}$ $3, 1 \cdot 10^{-25}$	higgs H^0 boson Z^0 boson $W^\pm$	0 1 1	$\sim 125,$ $91, 19$ $80, 37$	(GeV/c ²)
$\mathcal{G}$ c $\hbar$ k_B $\mathcal{N}$ α_e α_w α_s	cte de gravitation vitesse de la lumière cte de Planck cte Boltzmann nombre d'Avogadro Structure fine EM Weak interactions Strong interactions		$6, 673 \cdot 10^{-11}$ $2, 998 \cdot 10^8$ $6, 582 \cdot 10^{-22}$ $8, 617 \cdot 10^{-5}$ $6, 022 \cdot 10^{23}$ $1/137, 036$ $1/29, 46$ $1/8, 5$	$m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ $m.s^{-1}$ MeV.s eV.K ⁻¹ mol ⁻¹

* valeur théorique